Cours d'Analyse Vectorielle

Saint Denis, automne 2014

Cours 08

Intégrales de surface

François Dubois

STN2, Analyse Vectorielle

(9) Produit mixte et produit vectoriel.

- On se donne une base orthonormée directe de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, notée $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$, de coordonnées u_i, v_i, w_i :

(1) $\vec{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \vec{e_i}$, $\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{e_i}$, $\vec{w} = \sum_{i=1}^{3} w_i \vec{e_i}$.

Le produit mixte $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le déterminant des coordonnées des trois vecteurs (dans cet ordre!) :

(2) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$.

Il ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie

- On récupère les propriétés usuelles du déterminant : changement de signe si on échange deux colonnes. Typiquement

(3) $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$,

et invariance cyclique :

(4) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$.

En effet,

$$(\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = -(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) = -\left(-(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\right) = (\vec{u},\vec{v},\vec{w}).$$

- on a la propriété classique

$$(5)\left\{\begin{array}{l}\text{la famille } \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\} \text{ est liée si et seule-}\\ \text{ment si } \quad (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0.\end{array}\right.$$

En termes géométriques, on note P le polytope obtenu en prenant un point de l'espace dont toutes les coordonnées dans la base (non orthogonale) $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sont entre 0 et 1 [illustré figure 1] :

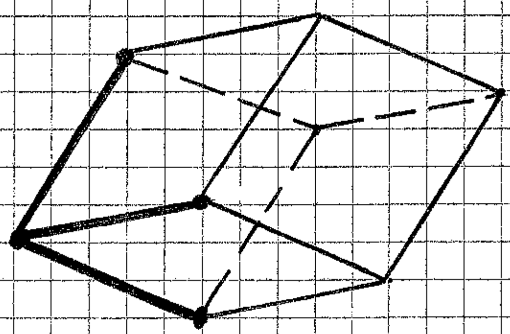


Figure 1

$$(6)\quad P = \{x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w},\ 0 \leq x,y,z \leq 1\}.$$

Alors le produit mixte est (au signe près) le volume de P :

$$(7)\qquad |P| = |(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|.$$

- Le produit mixte joue le rôle du déterminant jacobien dans les changements de variables pour les intégrales triples (voir plus loin dans le cours). Il généralise à trois dimensions spatiales ce qui a été vu lors du cours (7) pour le changement de variable dans une intégrale double.

Figure 2

Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est un couple de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, décomposé dans une base orthonormée sous la forme $\vec{u} = \sum_{j=1}^{2} u_j \vec{e_j}$, $\vec{v} = \sum_{j=1}^{2} v_j \vec{e_j}$, le polytope P_2 de la figure 2, à savoir

(8) $$P_2 = \{ x\vec{u} + y\vec{v},\ 0 \leq x, y \leq 1 \}$$

a une <u>surface</u> qui est au signe près le déterminant de la matrice jacobienne:

(9) $$|P_2| = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right| .$$

- <u>Le produit vectoriel</u> $\vec{u} \times \vec{v}$ de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ (orienté) est l'unique vecteur $\vec{u} \times \vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que

(10) $$\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^3,\ (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}),$$

où le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est noté avec un point.

on calcule les composantes $(\vec{u}\times\vec{v})_j$ du vecteur $\vec{u}\times\vec{v}$ dans la base $\vec{e_j}$ en prenant successivement $\vec{w}=\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ dans la relation (10) on a par exemple

$$(11)\qquad (\vec{u}\times\vec{v})_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

puisque $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1$. Les autres composantes se déduisent de (11) par permutation circulaire. A partir des relations (11) donnant les composantes, il est clair que la relation (10) est vraie pour tout $\vec{w}$, compte tenu de son caractère <u>linéaire</u> par rapport au vecteur $\vec{w}$. On peut aussi synthétiser les relations de type (11) sous la forme

$$(12)\qquad \vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \vec{e_1} \\ u_2 & v_2 & \vec{e_2} \\ u_3 & v_3 & \vec{e_3} \end{vmatrix}.$$

- On déduit immédiatement de (3)

$$(13)\qquad \vec{v}\times\vec{u} = -\vec{u}\times\vec{v},$$

en testant $\vec{v}\times\vec{u}$ contre un vecteur $\vec{w}$:

$(\vec{v}\times\vec{u})\cdot\vec{w} = (\vec{v},\vec{u},\vec{w}) = -(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$
et $\vec{w}$ est arbitraire donc (13) a lieu.

on déduit de (13) avec $\vec{v} = \vec{u}$:

(14) $\qquad \vec{u} \times \vec{u} = 0$.

Plus généralement, on a la

(Prop) Le produit $\vec{u} \times \vec{v}$ est <u>nul</u> si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement <u>dépendants</u> (i.e. colinéaires).

<u>Preuve</u> Si $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ pour un certain scalaire λ, on a $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{u}) = \lambda \vec{u} \times \vec{u} = 0$ compte tenu de (14).

Réciproquement on peut calculer $\vec{u} \times \vec{v}$ grâce à un choix astucieux de la base $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. On choisit $\vec{e_1}$ colinéaire à $\vec{u}$, c'est à dire

(15) $\qquad \vec{u} = U \, \vec{e_1} \, , \qquad U \in \mathbb{R}$.

Ensuite, le plan $(\vec{u}, \vec{v})$ [c'est un plan si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendants, hypothèse que nous pouvons faire pour un calcul général] admet une base orthonormée $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ qui prolonge $\vec{e_1}$. On développe $\vec{v}$ dans cette base :

(16) $\qquad \vec{v} = \alpha \vec{e_1} + V \vec{e_2} \, , \quad \alpha, V \in \mathbb{R}$.

Le calcul de $\vec{u} \times \vec{v}$ avec la relation (12) n'offre alors pas de difficulté :

$$U\vec{e_1} \times (\alpha\vec{e_1} + V\vec{e_2}) = UV\vec{e_3}$$

et $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ si et seulement si $UV = 0$.
Si $U = 0$, alors $\vec{u} = 0$ et les vecteurs sont liés ;
si $U \neq 0$, alors $V = 0$ et (16) devient
$\vec{v} = \alpha\vec{e_1} = \frac{\alpha}{U}\vec{u}$, ce qui montre que les vecteurs sont liés. D'où le résultat. $\blacksquare$

- On a pu remarquer au passage les règles de calcul pratique :

(17) $\vec{e_1} \times \vec{e_2} = \vec{e_3}$; $\vec{e_2} \times \vec{e_3} = \vec{e_1}$; $\vec{e_3} \times \vec{e_1} = \vec{e_2}$.

- On a aussi

(18) $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$; $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$.

Le vecteur $\vec{u} \times \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
En effet, $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = 0$ et
$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) = 0$. D'où (18).

- Prop. Si $\vec{u} \times \vec{v} \neq 0$, le trièdre $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ est direct ; son produit mixte $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ est strictement positif.

<u>Preuve</u>. Si $\vec{u} \times \vec{v} \neq 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants ; ils engendrent

un plan. Quand on écrit la relation (10) avec $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, il vient $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}) = \|\vec{u}\times\vec{v}\|^2 > 0$. Donc 7

(19) $\vec{u}\times\vec{v} \neq 0 \Rightarrow (\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}) > 0$

et le trièdre $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v})$ est direct. □

Prop Le module $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ du produit vectoriel est égal à la surface du parallélogramme P_2 défini en (8) :

(20) $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = |P_2|$, P_2 défini par (8).

Preuve.

On reprend le calcul fait page 5 avec les hypothèses (15) et (16). Alors (cf la leçon numéro ⑦ 5),

(21) $|P_2| = \left|\det\begin{pmatrix} U & \alpha \\ 0 & V\end{pmatrix}\right| = |UV|$.

or $\vec{u}\times\vec{v} = UV\vec{e}_3$, donc $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = |UV|$, ce qui établit la propriété. □

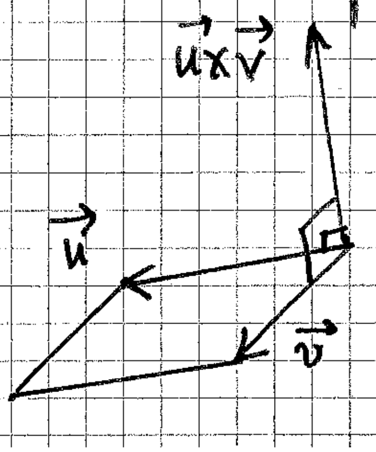


Figure 3.

Prop Double produit vectoriel.

Pour $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on a

(22) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}$.

Preuve. On sait (cf (18)) que $\vec{u} \times \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ donc au plan engendré par ces deux vecteurs. Donc $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u} \times \vec{v}$, donc appartient au plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$; on peut écrire

(23) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$,

avec des coefficients a et b qu'il faut déterminer. On calcule $\vec{u} \times \vec{v}$ à l'aide de (15) et (16) : $\vec{u} \times \vec{v} = UV\,\vec{e_3}$. Si $\vec{w} = \sum_{j=1}^{3} w_j \vec{e_j}$, on a :

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = UV\vec{e_3} \times (w_1\vec{e_1} + w_2\vec{e_2} + w_3\vec{e_3})$$

$$= UV(w_1\vec{e_2} - w_2\vec{e_1})$$

On exprime $V\vec{e_2}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$V\vec{e_2} = \vec{v} - \alpha\vec{e_1} = \vec{v} - \alpha \frac{1}{U}\vec{u}$. D'où

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = Uw_1\left[\vec{v} - \frac{\alpha}{U}\vec{u}\right] - Vw_2\,\vec{u}$$

$$= -(\alpha w_1 + Vw_2)\,\vec{u} + Uw_1\,\vec{v}.$$

On remarque que

$$\vec{V}\cdot\vec{w} = \alpha w_1 + V w_2\,, \quad \vec{u}\cdot\vec{w} = U w_1\,,$$

donc la relation (22) résulte du calcul précédent. □

<u>Remarque</u> Le produit vectoriel n'est pas associatif !
En général, $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} \neq \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$.
On a par exemple, avec $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{v} = \vec{e}_2$ et $\vec{w} = \vec{e}_1$:

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = ((\vec{e}_1+\vec{e}_2)\times\vec{e}_2)\times\vec{e}_1 = (\vec{e}_1\times\vec{e}_2)\times\vec{e}_1$$
$$= \vec{e}_3\times\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \qquad \text{et}$$

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{e}_1+\vec{e}_2)\times(\vec{e}_2\times\vec{e}_1) = (\vec{e}_1+\vec{e}_2)\times(-\vec{e}_3)$$
$$= \vec{e}_2 - \vec{e}_1$$

et les deux vecteurs sont différents pour cet exemple tout à fait élémentaire.

Dubois
14 novembre 2013.

Analyse Vectorielle (STN-2) 1

(II) Intégrales de surface.

• Paramétrage d'une surface.

Une surface Σ est paramétrée de façon usuelle en transformant un morceau de plan $(u,v) \in \Sigma_0$ par un ensemble de fonctions $X(u,v)$, $Y(u,v)$, $Z(u,v)$ qui donnent les coordonnées de $M(u,v)$ sur la surface [Figure 1] :

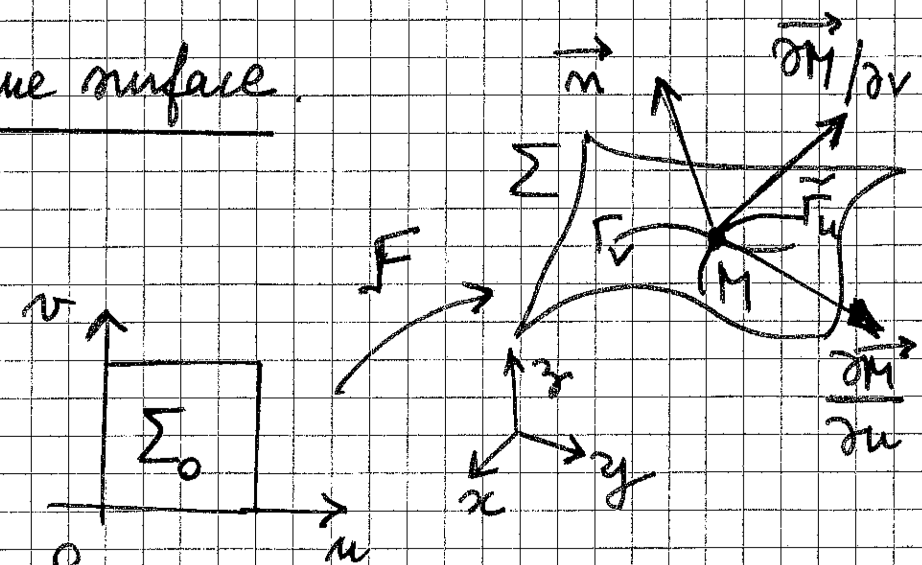


Fig. 1

$$(1)\quad \Sigma_0 \ni (u,v) \mapsto M(u,v) = (X(u,v),\, Y(u,v),\, Z(u,v)) \in \mathbb{R}^3 .$$

Ce paramétrage permet naturellement de définir deux familles de courbes Γ_v et $\tilde{\Gamma}_u$ tracées sur la surface; il suffit de fixer v [respectivement u] dans les deux paramètres (u,v) de la relation (1) :

$$\Gamma_v : \mathbb{R} \ni u \mapsto M(u,v) \in \mathbb{R}^3 \qquad \tilde{\Gamma}_u : \mathbb{R} \ni v \mapsto M(u,v) \in \mathbb{R}^3 .$$

* Le vecteur tangent à Γ_v est la dérivée par rapport à u de M, c'est à dire le vecteur $\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}$

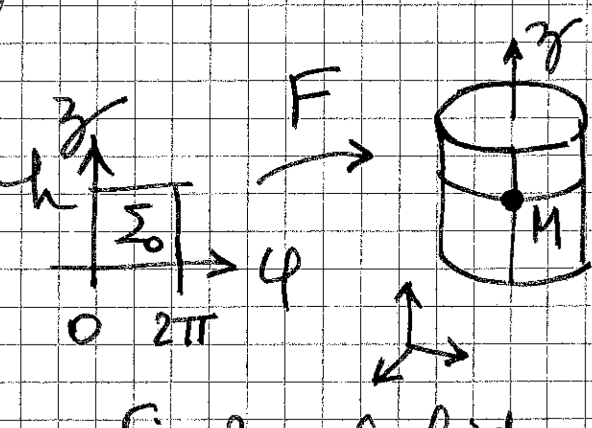
De même le vecteur tangent à $\tilde{\Gamma}_u$ est la dérivée partielle de $M(u,v)$ par rapport à v, c'est à dire le vecteur $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$. Ils sont illustrés figure 1.

Le <u>plan tangent</u> à la surface Σ au point M est engendré par le couple de vecteurs $\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}\right)$. On fait l'hypothèse suivante

$$(2) \qquad \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \neq 0, \quad \forall (u,v) \in \Sigma_0 .$$

Les vecteurs $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$ sont non nuls (les courbes Γ_v et $\tilde{\Gamma}_u$ sont correctement paramétrées) et de plus, ces deux vecteurs sont <u>linéairement indépendants</u>.

- Pour un cylindre de rayon R et hauteur h, la courbe Γ_z est un <u>cercle</u> de rayon R et de cote z (Fig. 2) et la courbe $\tilde{\Gamma}_\varphi$ une <u>droite verticale</u> parallèle à l'axe Oz. Le plan des paramètres est composé de l'angle polaire φ et de la cote z : $(\varphi, z) \in [0, 2\pi] \times [0, h]$. On a simplement



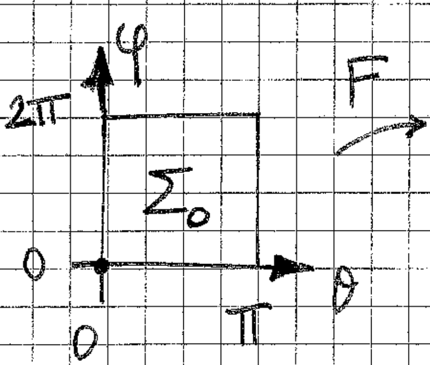
<u>Fig. 2</u>. Cylindre

$$(3) \qquad x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = z$$

donc $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} = -R\sin\varphi\,\vec{e_1} + R\cos\varphi\,\vec{e_2}$, $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial z} = \vec{e_3}$ et

(4) $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} \times \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial z} = R(\cos\varphi\,\vec{e_1} + \sin\varphi\,\vec{e_2})$; cylindre.

- Pour une sphère de rayon R, le plan des paramètres est composé de l'angle polaire θ et de l'angle longitudinal φ : $(\theta,\varphi) \in [0,\pi]\times[0,2\pi]$. On a



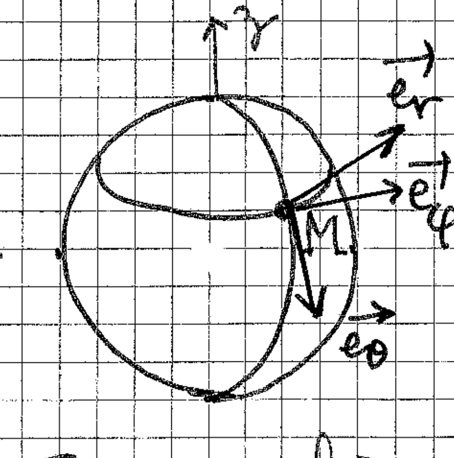


Fig. 3. Sphère.

(5) $x = R\sin\theta\cos\varphi$, $y = R\sin\theta\sin\varphi$, $z = R\cos\theta$.

La courbe $\tilde{\Gamma}_\theta$ est un parallèle et la courbe Γ_φ un méridien (grand cercle passant par les deux pôles). On a vu à la leçon précédente que

(6) $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = R\,\vec{e_\theta}$, $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} = R\sin\theta\,\vec{e_\varphi}$,

avec $\vec{e_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{e_1} + \cos\varphi\,\vec{e_2}$. On a $\vec{e_r} = \vec{e_\theta}\times\vec{e_\varphi}$ (voir la figure 3) et

(7) $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \times \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} = R^2 \sin\theta\,\vec{e_r}$.

- Le <u>vecteur normal</u> est le vecteur unitaire dirigé par le produit vectoriel $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial v}$:

(8) $$\vec{n} = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right\|} \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$$

- Pour calculer l'aire $|\Sigma|$ du morceau de surface issu du paramétrage (1), on commence par traiter le cas où Σ est <u>plane</u>. Alors $Z(u,v) \equiv 0$ dans la relation (1), et on a le calcul suivant :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = \begin{bmatrix} \partial_u X \\ \partial_u Y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \partial_v X \\ \partial_v Y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u} \end{bmatrix}.$$

Par ailleurs, la matrice jacobienne du changement de coordonnées $\Sigma_0 \ni (u,v) \mapsto (x = X(u,v),\ y = Y(u,v)) \in \Sigma$ vaut

$$J = \begin{pmatrix} \partial_u X & \partial_v X \\ \partial_u Y & \partial_v Y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det J = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}.$$

Prop (1) <u>Cas d'une surface plane.</u>

Si la surface Σ définie par (1) est plane (ie $Z(u,v)=0$), la transformation (1) est aussi un changement de variables dans le plan ; on a

(9) $$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}\right)\vec{e_3} = (\det J)\, e_3.$$

- Dans le cas bidimensionnel, on a $|\Sigma| = \iint_{\Sigma_0} |\det J| \, du\, dv$, relation qui s'étend au cas tridimensionnel ou

(10) $$|\Sigma| = \iint_{\Sigma_0} \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right\| du\, dv$$

En d'autres termes, l'élément d'aire $d\sigma$ pour la surface Σ se calcule par

(11) $$d\sigma = \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right\| du\, dv .$$

* En particulier, pour le cylindre (relations (3)), on a

(12) $$d\sigma = R\, d\varphi\, dz \quad \text{(cylindre)}$$

et pour la sphère (relations (5)(6)(7)) :

(13) $$d\sigma = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \quad \text{(sphère)}.$$

- Pour intégrer une fonction f définie sur le morceau Σ de surface, c'est à dire

(14) $$\mathbb{R}^3 \supset \Sigma \ni M \mapsto f(M) \in \mathbb{R},$$

on compose avec le paramétrage (1), ce qui définit $\hat{f}(u,v)$ par :

(15) $$\Sigma_0 \ni (u,v) \longmapsto \hat{f}(u,v) = f(M(u,v)) \in \mathbb{R} .$$

Dans le cas plan (où (1) est un simple changement de variables), on a vu (leçon 7) que

(16) $$\iint_{\Sigma} f(M)\, d\sigma = \iint_{\Sigma_0} \hat{f}(u,v)\, |\det J|\, du\, dv.$$

Pour une surface quelconque, on peut démontrer que le cas particulier où $|\det J| = \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right\|$ (voir (9)) s'étend au cas général :

$$(17) \quad \iint_{\Sigma} f(M)\, d\sigma = \iint_{\Sigma_0} \hat{f}(M) \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right\| du\, dv.$$

<u>L'intégrale de surface</u> (17) s'évalue avec une intégrale double (membre de droite de (17)). La relation précédente redonne (10) si $f(M) = 1$ [cas particulier d'un calcul d'aires].

- Dans le cas d'un cylindre (relations (3)), la relation (17) devient, compte tenu de (4) :

$$(18) \quad \iint_{\Sigma} f(M)\, d\sigma = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} R\, d\varphi\ \hat{f}(\varphi, z) \quad [\text{cylindre}]$$

prenant garde que $d\sigma$ est donné par la relation (12).
Dans le cas de la sphère (relations (5) à (7)), compte tenu de (13), on a

$$(19) \quad \iint_{\Sigma} f(M)\, d\sigma = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\ (R^2 \sin\theta)\ \hat{f}(\theta, \varphi) \quad [\text{sphère}].$$

- Il est utile d'introduire les opérateurs gradient (ou ∇) pour un champ scalaire $\mathbb{R}^3 \ni M \mapsto U(M) \in \mathbb{R}^3$, divergence, rotationnel pour un champ de vecteurs $\mathbb{R}^3 \ni M \mapsto \vec{\varphi}(M) \in \mathbb{R}^3$:

(20) $\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{e_1} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e_2} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e_3} \in \mathbb{R}^3$

(21) $\operatorname{div}\vec{\varphi} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \in \mathbb{R}$

si $\varphi(M) = \varphi_x(M)\vec{e_1} + \varphi_y(M)\vec{e_2} + \varphi_z(M)\vec{e_3}$.

Le <u>rotationnel</u> $\vec{\text{rot}}\,\vec{\varphi}$ est un champ de vecteurs qui se calcule symboliquement en développant le déterminant suivant :

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{\varphi} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \varphi_x & \vec{e_1} \\ \partial/\partial y & \varphi_y & \vec{e_2} \\ \partial/\partial z & \varphi_z & \vec{e_3} \end{vmatrix},$$

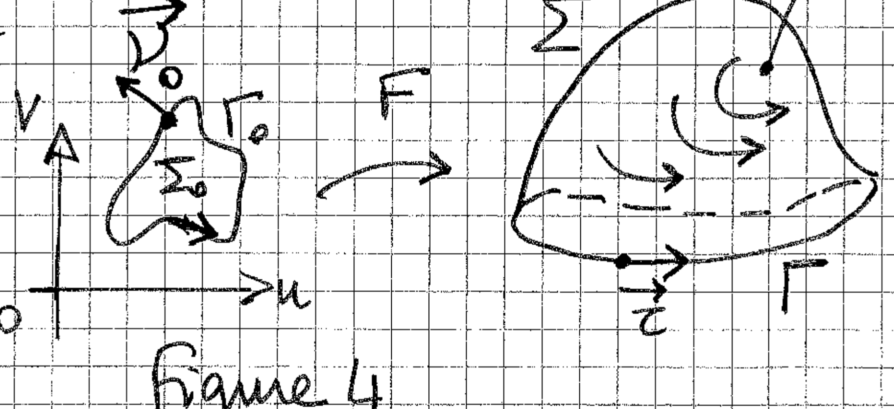
relation qui s'écrit sous forme plus rigoureuse

(22) $\vec{\text{rot}}\,\vec{\varphi} = (\partial_y\varphi_z - \partial_z\varphi_y)\vec{e_1} + (\partial_z\varphi_x - \partial_x\varphi_z)\vec{e_2} + (\partial_x\varphi_y - \partial_y\varphi_x)\vec{e_3}$.

- <u>Théorème de Stokes</u>.

Nous définissons d'abord le champ flux Φ d'un champ de vecteurs $\vec{\varphi}$ à travers une surface Σ qui s'appuie sur une courbe Γ.

Le paramétrage (u,v) court maintenant sur un morceau Σ_0 de surface (Fig 4) qui



<u>Figure 4</u>

était un simple rectangle dans ces exemples précédents. Si (u,v) appartient à la frontière Γ_0 du morceau de plan Σ_0 (Fig. 4), alors le point $M(u,v)$ décrit par (1) suit le bord Γ de la frontière du morceau de surface Σ (voir la figure 4). Cette courbe Γ est naturellement orientée par la donnée d'une normale $\vec{n}$ à la surface Σ (voir la figure 4) ; le vecteur tangent à Γ, noté $\vec{\tau}$ (de norme 1) a une orientation induite par la normale $\vec{n}$.

- Le <u>flux</u> Φ du champ $\vec{\varphi}(M) \in \mathbb{R}^3$ est défini par :

$$(23) \qquad \phi = \iint_{\Sigma} \vec{\varphi}(M) \cdot \vec{n}(M) \, d\sigma .$$

C'est un scalaire ($\phi \in \mathbb{R}$) qui dépend du produit scalaire $\vec{\varphi}(M) \cdot \vec{n}(M)$ qu'il faut intégrer sur toute la surface Σ.

Pr 2 <u>de Stokes</u> (<u>intégration par-parties sur Σ</u>)

Si $\vec{\varphi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs régulier, on définit son rotationnel $\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\varphi}$ à l'aide de (22). On a alors le résultat suivant :

$$(24) \qquad \iint_{\Sigma} \vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{\Gamma} \vec{\varphi} \cdot \vec{\tau} \, ds \; ;$$

le flux du rotationnel de $\vec{f}$ sur la surface Σ est égale à la circulation du champ $\vec{f}$ le long du bord Γ de la surface Σ. Dans le membre de droite de la relation (24), ds est l'abscisse curviligne le long de Γ et $\vec{\tau}$ (unitaire) le vecteur tangent le long de Γ.

- La preuve de ce résultat dépasse le cadre de ce cours. L'essentiel est de savoir que l'on se ramène à des relations d'intégration par parties du type

$$(25) \quad \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial f}{\partial u} \, du \, dv = \int_{\Gamma_0} f \, \nu_u^0 \, ds_0 \; ; \; \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial f}{\partial v} \, du \, dv = \int_{\Gamma_0} f \, \nu_v^0 \, ds_0$$

où Γ_0 est la frontière de Σ_0 (Partie gauche de la figure 4) et $\vec{\nu_0} = (\nu_u^0, \nu_v^0)$ la normale (unitaire) extérieure à la courbe Γ_0.

Paris, 27 novembre 2013.

Dubois.

Exercices

- Soit Σ la demi-sphère de centre O, rayon R, qui satisfait à $\{z \geq 0\}$. Calculer l'intégrale de surface $I = \int_\Sigma z \, d\sigma$.
- Soit $\tilde{\Sigma}$ la demi-sphère de centre O, rayon R, satisfaisant à $\{x \geq 0\}$. En utilisant les coordonnées polaires (5) préciser pour quelles valeurs du paramètre le point $M(\theta, \varphi)$ appartient à $\tilde{\Sigma}$. En déduire la valeur de l'intégrale de surface $J = \int_{\tilde{\Sigma}} x \, d\sigma$
- Soit $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ et un vecteur fixe, $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ un point de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{\varphi}(\vec{r}) = \vec{\alpha} \times \vec{r}$. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{\varphi}$ en fonction du vecteur $\vec{\alpha}$.
- Soit Σ la demi-sphère de centre O, rayon R, satisfaisant à $\{z \geq 0\}$. Montrer qu'elle s'appuie sur Γ, cercle de centre O et rayon R du plan xOy. On pose $\vec{\varphi}(\vec{r}) = -y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2$. Calculer d'une part le flux $\iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, d\sigma$ et d'autre part la circulation $\int_\Gamma \vec{\varphi} \cdot \vec{\tau} \, ds$. Constater que ces deux nombres sont égaux [c'est ce qu'exprime le théorème de Stokes (24) en toute généralité].