Cours d'Analyse Vectorielle

Saint Denis, automne 2014

Cours 09

Calcul des intégrales triples

François Dubois

Analyse Vectorielle (STN-2)

13 Calcul des intégrales triples.

- Les propriétés des intégrales triples sont pour l'essentiel analogues à celles des intégrales doubles. On désigne par Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur Ω :

(1) $\exists M \geqslant 0, \ \forall x \in \Omega, \ |f(x)| \leqslant M$.

On admet qu'alors l'intégrale (triple) de f sur le domaine Ω peut être définie.

(2) $$\int_\Omega f(x)\,dx = \iiint_\Omega f(x_1, x_2, x_3)\,dx_1\,dx_2\,dx_3 .$$

- Dans le cas particulier où $f(x) = 1$ pour tout $x \in \Omega$, l'intégrale triple est égale au <u>volume</u> $|\Omega|$ du domaine :

(3) $$\int_\Omega dx = |\Omega|, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3 .$$

* Ainsi si $a < \alpha$, $b < \beta$, $c < \gamma$ et $\Omega =]a,\alpha[\times]b,\beta[\times]c,\gamma[$ on a

(4) $$|\,]a,\alpha[\times]b,\beta[\times]c,\gamma[\,| = (\alpha - a)(\beta - b)(\gamma - c).$$

- L'intégrale triple possède la propriété d'additivité par rapport au domaine : si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi$, on a

$$(5) \quad \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x)\, dx = \int_{\Omega_1} f\, dx + \int_{\Omega_2} f\, dx, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi.$$

On peut couper une intégrale en plusieurs morceaux dont on peut choisir la taille à volonté !

- L'intégrale triple est linéaire comme fonctionnelle agissant sur $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Si g est une autre fonction $\Omega \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(6) \quad \int_\Omega (f+g)\, dx = \int_\Omega f\, dx + \int_\Omega g\, dx$$

$$(7) \quad \int_\Omega (\lambda f(x))\, dx = \lambda \left(\int_\Omega f(x)\, dx \right).$$

- L'intégrale triple est une fonctionnelle positive : si f est positive, c'est à dire $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$, l'intégrale triple est positive.

$$(8) \quad f \geq 0 \implies \int_\Omega f\, dx \geq 0$$

- Une conséquence de cette propriété et de la linéarité est que la valeur absolue de l'intégrale est toujours majorée par l'intégrale de la valeur absolue :

$$(9) \qquad \left| \int_\Omega f\,dx \right| \leqslant \int_\Omega |f(x)|\,dx \,.$$

- On peut faire le calcul approché d'une intégrale triple en coupant Ω en morceaux puis en remplaçant f par une constante dans chacun des morceaux. Par exemple, si Ω est le parallélipipède rectangle de la relation (4), et $N \geqslant 1$ un entier, on coupe chacun des intervalles $]a, \alpha[$, $]b, \beta[$, $]c, \gamma[$ en N morceaux (pour fixer les idées) et on obtient de cette façon N^3 morceaux Ω_j pour $1 \leqslant j \leqslant N^3$. On suppose $f(x) \simeq f_j$ $(f_j \in \mathbb{R})$ pour $x \in \Omega_j$. On a alors

$$\int_\Omega f\,dx = \sum_{j=1}^{N^3} \left(\int_{\Omega} f\,dx \right) \qquad [\text{additivité \% domaine}]$$

$$\simeq \sum_{j=1}^{N^3} \left(\int_{\Omega} f_j\,dx \right) \qquad [\text{approximation}]$$

$$= \sum_{j=1}^{N^3} f_j \left(\int_{\Omega_j} dx \right) \qquad [\text{linéarité}]$$

$$= \sum_{j=1}^{N^3} f_j\, |\Omega_j| \qquad [\text{calcul pour } f \equiv 1]$$

$$= \sum_{j=1}^{N^3} f_j\, \frac{|\Omega|}{N^3} \qquad [\text{les morceaux de } \Omega \text{ sont de volumes égaux}]$$

$$(10)\quad \int_\Omega f\,dx \simeq \frac{|\Omega|}{N^3}\sum_{j=1}^{N^3} f_j .$$

On a une formule approchée pour le calcul de l'intégrale triple utile en pratique et qui peut aussi être améliorée. Mais ces questions purement numériques dépassent le cadre de ce cours.

- On peut calculer de façon exacte une intégrale triple grâce au théorème de Fubini. Une intégrale triple est l'intégrale simple d'une famille d'intégrales doubles.

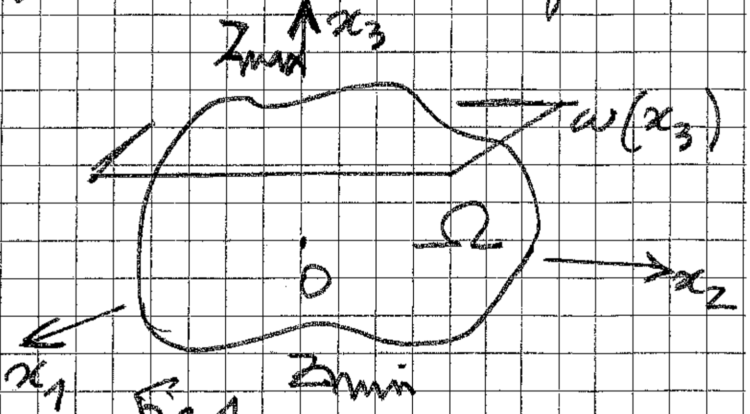


Fig 1.

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, on pose $\omega(x_3)$ la surface obtenue en coupant Ω par un plan $x_3 =$ constante (Fig. 1). Alors

$$(11)\quad \int_\Omega f\,dx = \int_{Z_{min}}^{Z_{max}} dx_3 \left[\iint_{\omega(x_3)} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\right],$$

où Ω est contenu dans la bande entre les plans $x_3 = Z_{min}$ et $x_3 = Z_{max}$ [Fig. 1].

- On teste la relation (11) pour calculer le <u>volume de la sphère</u> Ω de centre O et rayon R :

(12) $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$.

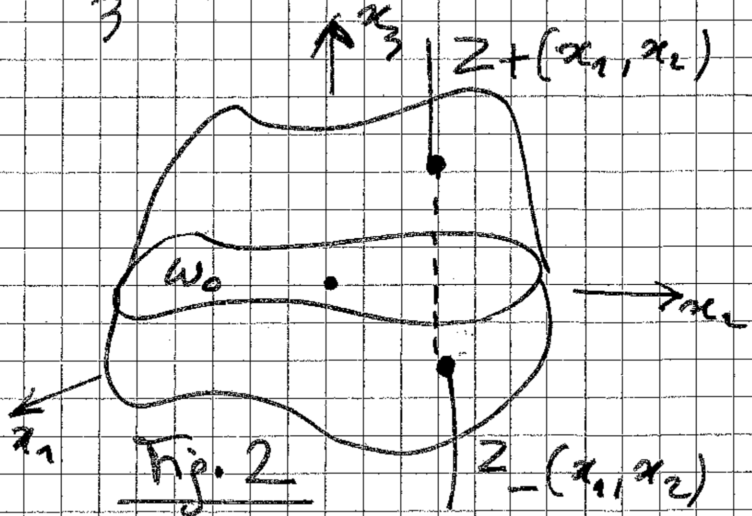
Alors $\omega(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leqslant R^2 - z^2\}$

$z_{min} = -R$ et $z_{max} = +R$. De plus

$\iint_{\omega(z)} 1\, dx_1\, dx_2 = |\omega(z)| = \pi(R^2 - z^2)$ car c'est la surface d'un disque de rayon $\sqrt{R^2-z^2}$. On en déduit

$$|\Omega| = \int_{-R}^{R} \pi(R^2-z^2)\,dz = 2\pi\int_0^R (R^2-z^2)\,dz$$
$$= 2\pi\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

(13) $|\text{sphère de rayon } R| = \frac{4}{3}\pi R^3$.



<u>Fig. 2</u>

- On peut exprimer aussi que l'intégrale triple est l'intégrale double sur $\omega_0 = \omega(0)$ de l'intégrale simple obtenue en intégrant la fonction f de $x_3 = Z_-(x_1,x_2)$ à $x_3 = Z_+(x_1,x_2)$ où

(14) $\begin{cases} \Omega = \{(x_1,x_2,x_3),\ Z_-(x_1,x_2) \leqslant x_3 \leqslant Z_+(x_1,x_2), \\ \qquad (x_1,x_2) \in \omega_0\}. \end{cases}$

On a

$$(15) \quad \int_\Omega f\,dx = \iint_{\omega_0} dx_1\,dx_2 \left[\int_{Z_-(x_1,x_2)}^{Z_+(x_1,x_2)} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\right]$$

• On teste la relation précédente pour la sphère Ω de rayon R. Alors ω_0 est le disque du plan de centre O et rayon R, et $Z_+(x_1,x_2) = \sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2} = -Z_-(x_1,x_2)$. On a alors

$$\int_\Omega dx = \int_{\omega_0} dx_1\,dx_2 \left[\int_{-\sqrt{R^2-(x_1^2+x_2^2)}}^{\sqrt{R^2-(x_1^2+x_2^2)}} dx_3\right]$$

$$= 2\int_{x_1^2+x_2^2\le R^2} dx_1\,dx_2\,\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2}$$

$$= 2\int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta\,\sqrt{R^2-r^2} \quad \text{(en polaires planes)}$$

$$= 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\; r\,dr$$

$$= 4\pi \left[(R^2-r^2)^{3/2}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right]_0^R$$

$$= \frac{4\pi}{3}(R^2)^{3/2} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

ce qui confirme bien la relation (13).

• La formule de changement de variables est une généralisation naturelle du cas tridimensionnel. On suppose $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ paramétré par une application F bijective et régulière :

(16) $\hat{\Omega} \ni (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = \hat{x} \longmapsto F(\hat{x}) = x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$

On introduit la matrice jacobienne $dF(\hat{x})$ de la transformation (16). On a

(17) $dF(\hat{x})_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_j} \quad , \quad 1 \leq i, j \leq 3.$

relation qu'on peut développer en

$$dF(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \hat{x}} & \dfrac{\partial x}{\partial \hat{y}} & \dfrac{\partial x}{\partial \hat{z}} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial \hat{x}} & \dfrac{\partial y}{\partial \hat{y}} & \dfrac{\partial y}{\partial \hat{z}} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial \hat{x}} & \dfrac{\partial z}{\partial \hat{y}} & \dfrac{\partial z}{\partial \hat{z}} \end{pmatrix}$$

On introduit le jacobien $J(\hat{x})$ de cette transformation, c'est à dire le volume élémentaire obtenu dans une variation dx :

(18) $J(\hat{x}) = |\ \det\ dF(\hat{x})\ |.$

on a alors

$$(19) \quad \int_{\Omega} f(x)\,dx = \int_{\widehat{\Omega}} f(F(\hat{x}))\, J(\hat{x})\, d\hat{x}$$

- Dans le cas des coordonnées polaires, on a

$$(20) \quad \begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi .$$

Alors $\hat{x} = (r, \theta, \varphi)$ et le déterminant jacobien peut se calculer sans difficulté :

$$(21) \quad J(r,\theta,\varphi) = r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi .$$

[exercice laissé au lecteur !]

On peut utiliser ce changement de variables pour calculer une nouvelle fois le volume de la sphère de rayon R :

$$|\Omega| = \int_0^R dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \;\; r^2 \sin\theta \, d\theta\, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^R r^2\, dr \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= 2\pi \frac{R^3}{3} \left(-(-1) - (-1)\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

ouf !

Exercices

- Démontrer la relation (21)

- Calculer le volume de la pyramide de base carrée (de côté $a>0$) et de hauteur $h>0$ (Fig 3).

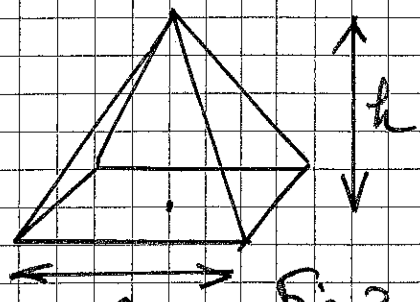


Fig 3.

- Soit $a>0, b>0, c>0$ trois réels et E l'ellipsoïde de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}.$$

Calculer le volume $|E|$ de cet ellipsoïde

- Soit T le tore de grand rayon R et de petit rayon r obtenu en faisant tourner un petit disque de rayon r le long d'un grand cercle de rayon R (Fig 4).

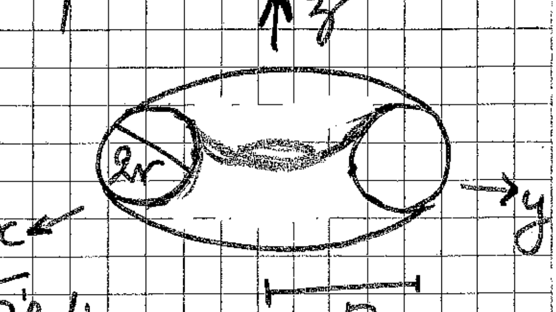


Fig 4.

Montrer qu'on peut le paramétrer par
$x = (R + ur\cos\theta)\cos\varphi$, $y = (R + ur\cos\theta)\sin\varphi$, $z = ur\sin\theta$
avec $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq \theta, \varphi \leq 2\pi$. Calculer ensuite le volume $|T|$ de ce tore.

Orsay, 13 mars 2014

Dubois.