Compléments d'Algèbre et d'Analyse

Saint Denis, automne 2012-2013

Cours 01

Equations Différentielles Ordinaires

François Dubois

CA2 Compléments d'Algèbre et d'Analyse

2012 - 2013

Cours I Equations Différentielles Linéaires

Résumé du cours

26 nov 2012

- On note I un intervalle (non vide) de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique de variable réelle ; pour tout x nombre réel de I, il existe un et un seul nombre réel y tel que $y = f(x)$. On écrit parfois

(1) $\quad I \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$

pour désigner qu'une telle fonction est une application de I dans $\mathbb{R}$.

- Pour $x_0 \in I$, la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en x_0 si et seulement si la limite pour $x \to x_0$ de $f(x)$ est égale à $f(x_0)$:

(2) $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Dans les mêmes conditions, la fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si la limite du taux d'accroissement $\frac{1}{h}[f(x_0+h) - f(x_0)]$ tend vers une limite réelle pour h tendant vers zéro. Cette limite est le nombre dérivé $f'(x_0)$

de f au point x_0 :

(3) $$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[f(x_0+h) - f(x_0)] = f'(x_0).$$

La fonction f est continue sur I (respectivement dérivable) si et seulement si elle est continue (resp. dérivable) en tout point x_0 de l'intervalle I.

Prop ① Si f est dérivable au point $x_0 \in I$, alors elle est continue en ce point.

Th ② <u>Lemme de Rolle.</u>

Soient $a < b$ deux nombres réels, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ qu'on suppose <u>continue</u> sur $[a,b]$ et <u>dérivable</u> sur $]a,b[$. On suppose

(4) $$f(a) = f(b).$$

Alors il existe $c \in]a,b[$ (donc f est dérivable au point c) où la dérivée de f est nulle :

(5) $$\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = 0.$$

- Un point c qui convient est celui où f est maximale (ou celui où f est minimale) sur l'intervalle $[a,b]$.

Th 3 des accroissements finis.

Le cadre est celui du lemme de Rolle mais on n'a plus l'hypothèse (4). Les nombres réels a et b sont tels que $a<b$, f est une application $[a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ dont la dérivée est égale au taux d'accroissement de f sur l'intervalle $[a,b]$:

$$(6) \qquad \exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

- Il suffit d'appliquer le lemme de Rolle à la fonction g défini par

$$(7) \qquad g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Th 4 Equation différentielle triviale.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle (non vide) I de $\mathbb{R}$. Si la dérivée $f'(t)$ de f est nulle pour tout $t \in I$, alors f est constante

$$(8) \quad (f'(t) = 0 \ \forall t \in I) \Rightarrow (\exists C \in \mathbb{R}, \ \forall t \in I, f(t) = C)$$

- on raisonne par l'absurde et le théorème des accroissements finis montre qu'alors on aboutit à une contradiction avec l'hypothèse.

Prop 5 <u>Equation différentielle fondamentale</u>.

On se donne deux réels a et u_0. On cherche $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution du système dynamique

$$(9) \qquad \frac{du}{dt} + a\,u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(10) \qquad u(0) = u_0 \qquad \text{à } t = 0.$$

formé de l'équation d'évolution (8) et de la condition initiale (10). Le système (9)(10) a une solution unique

$$(11) \qquad u(t) = e^{-at}\,u_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- On montre que la fonction $v(t) \equiv u(t)\,e^{at}$ a une dérivée identiquement nulle et on applique le théorème 4.

Th 6 <u>Théorème fondamental de l'Analyse</u>.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f <u>continue</u> $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par

$$(12) \quad \varphi(t) = \int_{\alpha}^{t} f(\theta)\,d\theta$$

est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$(13) \qquad \varphi'(t) = f(t), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Prop 7 <u>Utilisation de primitives</u>.

Soit φ <u>continûment dérivable</u> $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

et $a<b$ deux réels. On a

$$(14) \quad \int_a^b \frac{d\varphi}{dt}\, dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

- ce résultat est d'utilisation courante pour le calcul d'intégrales à l'aide de primitives.

Th 8 Formule de Duhamel.

C'est l'extension au cas "avec second membre" de la proposition 5. On se donne a et u_0 dans $\mathbb{R}$ ainsi qu'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Il existe une et une seule fonction dérivable $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$(15) \quad \frac{du}{dt} + a u(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

avec la condition initiale (10). Elle est donnée par la formule de Duhamel

$$(16) \quad u(t) = e^{-at} u_0 + \int_0^t e^{-(t-\theta)} f(\theta)\, d\theta .$$

- on "fait varier la constante" en cherchant une solution particulière de (15) sous la forme

$$(17) \quad u(t) = e^{-at}\, \psi(t).$$

Exercices.

ex 1 Trouver une solution particulière de l'équation

$$(18) \quad \frac{du}{dt} + au(t) = \sin t.$$

ex 2 Calculer la solution du système dynamique formé des équations d'évolution

$$(19) \quad \frac{dx}{dt} = y(t) \;,\quad \frac{dy}{dt} = x(t) \;,\quad t \in \mathbb{R}$$

jointes aux conditions initiales

$$(20) \quad x(0) = x_0 \,,\quad y(0) = y_0 \,,\quad t = 0 .$$

ex 3 Analogue à l'exercice 2, le système (19) d'évolution étant remplacé par

$$(21) \quad \frac{dx}{dt} = -y(t) \,,\quad \frac{dy}{dt} = x(t) \,,\quad t \in \mathbb{R}.$$

ex 4 Analogue à l'exercice 2, avec (19) remplacé par

$$(22) \quad \frac{dx}{dt} = x(t) + y(t) \,;\quad \frac{dy}{dt} = x(t) - y(t) \,,\quad t \in \mathbb{R}.$$

Dubois

28 nov 2012.