le cnam

Compléments d'Algèbre et d'Analyse

Saint Denis, automne 2012-2013

Cours 07

Systèmes différentiels symétriques

François Dubois

CA2 Cours VII **Systèmes différentiels symétriques**

Résumé du cours

- On cherche à exprimer la solution du système différentiel

(1) $\frac{dX}{dt} = A . X(t)$, $X(t) \in \mathbb{R}^n$,

où $X(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des inconnues et A une matrice symétrique réelle carrée d'ordre n. On se donne une condition initiale

(2) $X(0) = X_0$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$,

où X_0 est un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$.

- L'idée est de changer d'inconnue X afin de se ramener au cas où la matrice A est diagonale... On sait qu'il existe une base orthogonale de vecteurs propres. Donc il existe une matrice diagonale Δ composée par les n valeurs-propres réelles de A

(3) $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$

et une matrice de passage P inversible ($\det P \neq 0$) qu'on peut choisir orthogonale c'est à dire

(4) $$P^{-1} = P^t$$

de sorte que

(5) $$P^{-1} A P = \Delta$$

- On introduit un nouveau vecteur $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ relié à $X(t)$ via la relation de changement de base :

(6) $$\xi = P^{-1} X .$$

La matrice P^{-1} est fixe dans le temps ; donc on a le calcul suivant :

$$\frac{d\xi}{dt} = P^{-1} \frac{dX}{dt} = P^{-1} (A\, X(t)) \quad (\text{cf } (1))$$

$$= P^{-1} A (P\ P^{-1}) X(t)$$

$$= (P^{-1} A P)(P^{-1} X(t))$$

$$= \Delta\ \xi(t) \qquad (\text{cf } (5) \text{ et } (6))$$

(7) $$\frac{d\xi}{dt} = \Delta\ \xi(t), \quad \xi(t) \in \mathbb{R}^n .$$

- Comme la matrice Δ est diagonale (cf (3)),

les n équations scalaires de (7) sont mainte-
nant découplées. Si $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^t$, le système
(7) se réécrit

(8) $$\frac{d\xi_j}{dt} = \lambda_j \, \xi_j(t), \quad \xi_j(t) \in \mathbb{R}$$

On introduit la condition ξ_0 directement issue
de (2) et (6)

(9) $$\xi(0) = \xi_0 \equiv P^{-1} X_0, \quad \xi_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Alors la solution de (8)(9) est immédiate :

(10) $$\xi_j(t) = e^{\lambda_j t} \, \xi_j(0)$$

Si on note $\exp(\Delta t)$ la matrice diagonale
des exponentielles en temps, c'est à dire

(11) $$\exp(\Delta t) = \mathrm{diag}\,(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}),$$

la relation (10) peut s'écrire

(12) $$\xi(t) = \exp(\Delta t) \cdot \xi_0 .$$

- Il suffit de changer de base à l'aide de

(13) $$X(t) = P \cdot \xi(t)$$

inverse de (6) :

$$X(t) = P \cdot \xi(t) = P \cdot (\exp \Delta t) \cdot \xi(t)$$

$$(14) \quad X(t) = P\,(\exp \Delta t)\; P^{-1}\, X_0$$

pour avoir une formule de calcul utilisable en pratique.

- on rappelle les grandes étapes pour arriver à (14) :

  (i) passage de X_0 à ξ_0 grâce à (6)

  (ii) calcul de $\xi(t)$ pour $t \geq 0$ à l'aide de (10) (ou (11)).

  (iii) passage de $\xi(t)$ à $X(t)$ grâce à (13).

Une propagation en temps grâce à des équations découplées, précédée d'un changement de base $X_0 \to \xi_0$ et suivie d'un changement de base $\xi \to X(t)$.

- on peut aussi raisonner avec des vecteurs, donc de façon géométrique. Dans ce cas, on suppose qu'une base orthonormée a été donnée dans un espace euclidien E_n et que la matrice A est associée à un opérateur linéaire $\mathcal{A}$ de E_n dans E_n :

$$(15) \quad \mathcal{A} \cdot e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i \quad , \quad 1 \leq j \leq n \,.$$

Comme A est symétrique, l'opérateur $\mathcal{A}$ est auto-adjoint

(16) $\quad (\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}v) \;,\; \forall u, v \in E_n.$

on sait qu'alors $\mathcal{A}$ dispose d'une base orthogonale de vecteurs propres :

(17) $\quad \mathcal{A}.r_j = \lambda_j r_j \;,\; r_j \neq 0 \;,\; 1 \leq j \leq n.$

Relativement à la base $(r_1, \dots, r_n)$ des vecteurs propres la matrice de l'opérateur $\mathcal{A}$ est précisément la matrice Δ introduite plus haut.

- On développe u dans la base $(r_1, \dots, r_n)$

(18) $\quad u = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \, r_j \;,\; u \in E_n.$

L'équation matricielle (1) s'écrit alors

(19) $\quad \dfrac{du}{dt} = \mathcal{A}.u \;,\; u(t) \in E_n.$

Compte tenu de (17)(18)(19), on a

$$\frac{du}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{d\xi_j}{dt} r_j$$

$$= \mathcal{A}.u = \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j . r_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \xi_j \, \mathcal{A}.r_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j . \xi_j \quad r_j$$

d'où

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \lambda_j \xi_j \;,\; 1 \leq j \leq n \;,.$$

relation différentielle identique à (8).

- La fin du calcul est immédiate : avec

$$(20) \qquad u_0 \equiv \sum_{j=1}^{n} \xi_j^0 \, r_j = u(0)$$

et (8), on a

$$(21) \qquad u(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j t} \, \xi_j^0 \, r_j \,, \quad t \geqslant 0 .$$

Dans la base des vecteurs propres, la résolution de (19)(20) est très facile, car les variables $\xi_j(t)$ sont solutions d'équations différentielles <u>découplées</u>.

<u>Exercices</u>

1) Résoudre complètement le système différentiel de deux équations

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

avec la condition initiale $x(0) = p$, $y(0) = q$ pour

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

2) Même question pour le système dans $\mathbb{R}^3$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad t>0$$

avec $x(0)=p$, $y(0)=q$, $z(0)=s$

et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

On pourra suivre le plan suivant

* Calculer $\det(A-\lambda I)$
* Calculer les valeurs propres de A
* Calculer les vecteurs propres de A
* Exprimer la condition initiale dans la base des vecteurs propres.
* Exprimer le vecteur inconnu pour un temps arbitraire dans la base des vecteurs propres.
* Répondre à la question posée.

Paris, 15 janvier 2013

Dubois.