le cnam

Compléments d'Algèbre et d'Analyse

Saint Denis, automne 2012-2013

Cours 09

Méthode de la puissance

François Dubois

CA2 Cours IX **Méthode de la puissance**

• Résumé du cours.

• Si A et B sont deux matrices carrées inversibles toutes deux, alors leur produit AB est inversible et

(1) $(AB)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$.

Il suffit d'écrire $(AB)^{-1} AB = I$, de multiplier cette identité à droite par B^{-1}, puis une nouvelle fois à droite par A^{-1}.

• Si A et B sont deux matrices carrées, alors

(2) $(AB)^t = B^t A^t$.

Il suffit d'écrire la définition de la transposée A^t de la matrice A à l'aide du produit scalaire :

(3) $(Ax, y) = (x, A^t y)$, $\forall x, y \in E_n$.

Quand on a réussi à "faire passer" la matrice A "de l'autre côté" du produit scalaire, elle est devenue la matrice transposée.

On a donc $(ABx, y) = (Bx, A^t y)$ [utiliser (3) avec x remplacé par Bx]

$(ABx, y) = (x, B^t A^t y)$ [identité (3) avec A remplacé par B et y par $A^t y$]
et cette dernière égalité est vraie pour tout couple de vecteurs (x, y). D'où l'égalité (2).

- En prenant $B = A^t$ dans (2), compte tenu de l'identité

(4) $$(A^t)^t = A,$$

la relation (2) entraîne

(5) $$(AA^t)^t = AA^t$$

et la matrice AA^t est toujours symétrique.

- Si on multiplie une matrice P à gauche par une matrice diagonale Δ, alors chaque ligne de P est multipliée par l'élément correspondant de la matrice Δ. Dans le cas où on considère le produit $P\Delta$, c'est à dire que P est multipliée par Δ à droite, alors chaque colonne de P est multipliée par l'élément correspondant de la matrice diagonale

• On se donne une matrice A symétrique réelle d'ordre n. Elle est diagonalisable dans une base $(r_1, \ldots, r_n)$ qu'on suppose orthonormée

$$(6) \qquad (r_i, r_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

et on note λ_j les valeurs propres correspondantes :

$$(7) \qquad A \cdot r_j = \lambda_j \, r_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

• La méthode de la puissance est un algorithme qui permet d'approcher r_1 et la valeur propre correspondante λ_1. Il est particulièrement utile si n est grand. On suppose la valeur propre λ_1 dominante :

$$(8) \qquad \lambda_1 > |\lambda_j|, \quad \forall j \geq 2.$$

On se donne un vecteur $x_0 \in E_n$ de sorte que

$$(9) \qquad \xi_1 = (x_0, r_1) \neq 0.$$

• L'algorithme de la puissance permet de construire une suite de vecteurs (x_k) pour $k \in \mathbb{N}$ par des multiplications successives par la matrice A :

$x_1 = A x_0$, $x_2 = A x_1 = A^2 x_0$, et de façon générale

(10) $\quad x_k = A x_{k-1} = A^k x_0, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

puis on norme les vecteurs x_k :

(11) $$y_k = \frac{1}{\| x_k \|} \, x_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Prop Convergence de l'algorithme de la puissance

Avec les notations précédentes, sous les hypothèses (8)(9), l'algorithme (10)(11) construit une suite de vecteurs y_k qui converge vers r_1 ou $-r_1$:

(12) $\quad (y_k \to r_1)$ ou $(y_k \to -r_1)$ si $k \to \infty$.

De plus, la suite numérique de produits scalaires $(y_k, A y_k)$ converge vers λ_1 :

(13) $\quad (y_k, A y_k) \to \lambda_1$ si $k \to \infty$.

- La preuve consiste à remarquer que si on décompose le vecteur initial x_0 dans la base des vecteurs propres selon

(14) $$x_0 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \, r_j ,$$

alors la notation est compatible avec (9) puisque $(x_0, r_1) = \xi_1$, qu'on suppose <u>non nul</u>. De plus, les itérés x_k se calculent facilement grâce à la relation (7):

$$(15) \qquad x_k = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \lambda_j^k r_j \;, \; k \in \mathbb{N}$$

- Le vecteur x_k est non nul car sa première composante (x_k, r_1) est le produit de ξ_1 (qui est non nul) par la puissance k^o de λ_1 qui est non nulle car $\lambda_1 > |\lambda_j| \geq 0$. Donc le vecteur y_k est toujours bien défini grâce à la relation (11). On calcule la norme de x_k grâce au théorème de Pythagore et on met en exergue le premier terme :

$$\|x_k\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \lambda_j^{2k} \qquad \text{car on a (6)}$$

$$= \xi_1^2 \lambda_1^{2k} \left(1 + \sum_{j \geq 2} \left(\frac{\xi_j}{\xi_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{2k}\right)$$

et

$$(16) \quad \|x_k\| = |\xi_1| \lambda_1^k \left[1 + \sum_{j \geq 2} \left(\frac{\xi_j}{\xi_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{2k}\right]^{1/2}.$$

Compte tenu de l'hypothèse (8), la suite numérique $(\lambda_j / \lambda_1)^k$ est géométrique et tend vers zéro car sa raison est de module strictement inférieur à l'unité. On peut donc écrire

(17) $\|x_k\| = |\xi_1| \lambda_1^k (1+\varepsilon_k)$, $\varepsilon_k \to 0$ si $k \to \infty$.

- Pour estimer le comportement de x_k pour k tendant vers l'infini, on procède de même :

(18) $x_k = \xi_1 \lambda_1^k \left[r_1 + \sum_{j \geq 2} \frac{\xi_j}{\xi_1} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k r_j \right]$.

La suite $\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k$ tend vers zéro si $k \to \infty$. Donc la suite dans le crochet au membre de droite de (18) tend vers r_1 si $k \to \infty$. On peut écrire

(19) $x_k = \xi_1 \lambda_1^k (r_1 + \rho_k)$, $\rho_k \in E_n$, $\rho_k \to 0$

Les vecteurs ρ_k tendent vers le vecteur nul de l'espace E_n. On forme alors y_k grâce à (11), (19) et (17) :

(20) $y_k = \frac{\xi_1}{|\xi_1|} \frac{1}{1+\varepsilon_k} [r_1 + \rho_k]$, $k \in \mathbb{N}$

- Comme ε_k et ρ_k tendent vers zéro, et que $\xi_1/|\xi_1|$ vaut + ou − 1 car $\xi_1 \neq 0$, la conclusion (12) est établie. La relation (13) est alors claire car $(r_1, A r_1) = \lambda_1$. $\square$

Exercices

1) L'inverse P^{-1} de la matrice $P = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$ est particulièrement facile à expliciter. Pourquoi ?

2) Calculer les inverses P^{-1} des matrices P suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pourra remarquer que les colonnes de P sont orthogonales et se ramener à une matrice Q orthogonale (ses colonnes sont orthogonales et de norme unité)

Dubois 18 janvier 2013.