le cnam

Traitement du Signal

Leçon 01

Traitement du signal analogique (i)

- Etude d'un exemple, le circuit RLC
- Intégrale de convolution
- Masse de Dirac
- Notion de filtre
- Rappels sur la transformation de Fourier
- Retour sur le circuit RLC

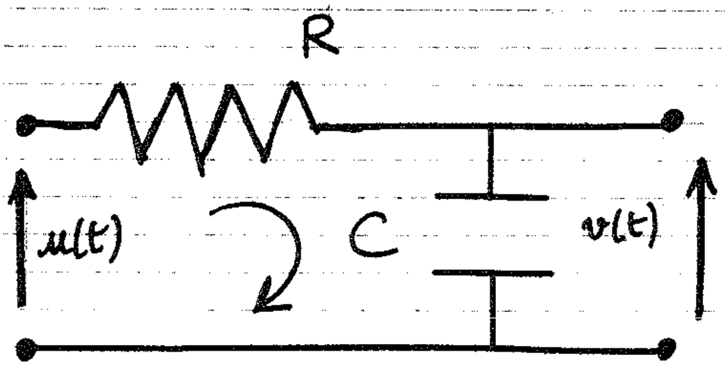
François Dubois

Paris, 1997

Traitement du signal analogique (i)

Un signal analogique est une grandeur physique qui dépend du temps. Le temps est considéré comme un continuum, bien modélisé mathématiquement par l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Un signal analogique est donc une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes.

1) Etude d'un exemple ; le circuit RC.



Circuit RC

- On étudie le comportement dynamique du circuit "RC" représenté à la figure ci-contre. A l'instant $t=0$, on applique une différence de potentiel (a priori) variable au cours du temps et notée $u(t)$. On cherche à déterminer la tension $v(t)$ aux bornes de la capacité.

On écrit les lois classiques de l'électricité. On a d'une part, par sommation des différences de potentiel et compte-tenu de la loi d'Ohm dans la résistance R :

(1) $$u = Ri + v\ .$$

D'autre part, notons q la charge électrique aux bornes du condensateur de capacité C. On a :

(2) $$q = C\, v\ .$$

Comme le courant électrique $i(t)$ dans le circuit est la dérivée par rapport au temps de la charge électrique

(3) $$i = \frac{dq}{dt}\ ,$$

le rapprochement des relations (2) et (3) dans l'équation (1) permet d'écrire l'équation différentielle vérifiée par la tension $v(t)$:

(4) $$RC\,\frac{dv}{dt} + v(t) = u(t)\ .$$

Comme on branche le circuit à l'instant initial $t=0$, on garde cette condition en mémoire en écrivant par exemple

(5) $$u(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \leqslant 0\ .$$

Cette condition est transcrite de façon "faible" en exprimant simplement

(6) $v(t)$ reste bornée pour $t \to -\infty$,

car la nullité de la tension $u(t)$ (relation (5)) n'entraîne pas nécessairement que $v(t)$ est nulle pour $t \leqslant 0$.

- La résolution analytique de l'équation différentielle (4) jointe aux conditions (5) et (6) est élémentaire. On commence par étudier la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation linéaire (4). Pour $u \equiv 0$, on a donc

(7) $$v(t) = w \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

On fait ensuite "varier la constante" $w = v(0)$ pour calculer explicitement une solution particulière de l'équation (4). Lorsque $w(t)$ est une fonction du temps à déterminer, on a par dérivation de la relation (7) :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dw}{dt}\, e^{-t/RC} + w\left(-\frac{1}{RC}\right) e^{-t/RC}$$

relation dont on tire

(8) $$RC\,\frac{dv}{dt} + v(t) = RC\,\frac{dw}{dt}\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

La relation (8) jointe à l'équation (4), permet d'expliciter la fonction w. Il vient

(9) $$w(t) = w(0) + \int_0^t \frac{1}{RC}\, u(\theta)\, e^{\frac{\theta}{RC}}\, d\theta .$$

Jointe à la relation (7), cette représentation de la fonction $w(\cdot)$ permet d'expliciter la solution générale de l'équation différentielle (4) :

(10) $$v(t) = w(0)\, e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{RC}\int_0^t u(\theta)\, e^{-\frac{t-\theta}{RC}}\, d\theta .$$

Lorsque le temps t tend vers moins l'infini, le second terme de la relation (10) est nul à cause de la condition "de branchement" (5). Si $w(0)$ est non nul, alors le premier terme $w(0)\exp(-t/RC)$ du membre de droite de la relation (10) tend vers l'infini (car t tend vers $-\infty$), ce qui contredit la condition physique (6) qui exprime que $v(\bullet)$ doit rester bornée. Le nombre $w(0)$ est donc nécessairement nul et la solution du problème (4)(5)(6) s'écrit

(11) $$v(t) = \frac{1}{RC}\int_0^t u(\theta)\, e^{-\frac{t-\theta}{RC}}\, d\theta .$$

- Si la condition de branchement n'est pas réalisée (la différence de potentiel est non contrôlée pour les instants négatifs), on peut au moins supposer la tension d'entrée $u(\bullet)$ bornée

(12) $$\exists\, U > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad |u(t)| \leq U .$$

Alors la représentation (10) de la solution $v(\bullet)$ de l'équation différentielle (4) peut s'écrire :

(13) $$v(t) = \left(w(0) - \int_0^{\infty} u(-\theta)\, e^{-\theta/RC}\, d\theta\right) e^{-t/RC} + \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} u(\theta)\, e^{-\frac{t-\theta}{RC}}\, d\theta$$

car l'intégrale introduite converge, compte tenu de l'hypothèse (12). Le raisonnement fait au dessus montre que le premier terme du membre de droite de la relation (13) est nécessairement nul sinon $v(\cdot)$ explose pour t tendant vers $-\infty$, ce qui contredit l'hypothèse (6).

La solution du problème (4)(6) avec l'hypothèse (12) s'écrit donc

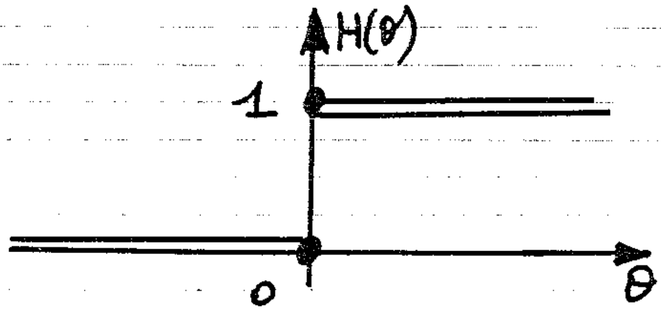
$$(14) \qquad v(t) = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} u(\theta)\, e^{-\frac{t-\theta}{RC}}\, d\theta .$$

On peut remarquer qu'elle est identique à la relation (11) si on fait également l'hypothèse (5)

2) Intégrale de convolution.

On peut encore transformer la relation (14), en introduisant la fonction créneau de Heaviside :

$$(15) \qquad H(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta > 0 \\ 0 & \theta < 0 \end{cases}$$



Fonction de Heaviside

et en remarquant que $H(t-\theta)$ est nul si $\theta > t$. La relation (14) peut alors s'écrire

$$(16) \qquad v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\theta)\, h(t-\theta)\, d\theta \equiv (u * h)(t)$$

$$(17) \qquad h(\theta) = \frac{1}{RC}\, e^{-\theta/RC}\, H(\theta) .$$

La relation (16) est une intégrale de convolution ; on peut vérifier par un simple changement de variable que

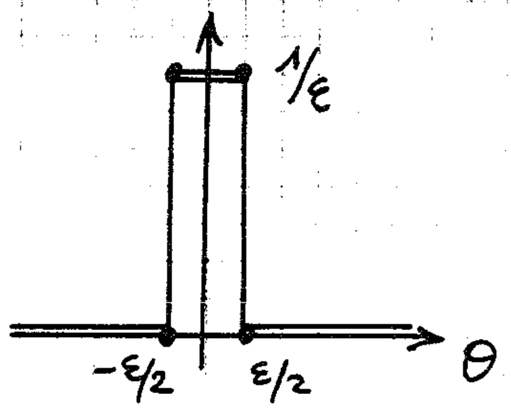
(18) $$u * h = h * u$$

et si u et h appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, c'est à dire $\int_{\mathbb{R}} |u(\theta)|\, d\theta < \infty$ et $\int_{\mathbb{R}} |h(\theta)|\, d\theta < \infty$, alors $h * u$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ (utiliser le théorème de Fubini sur l'existence et le calcul des intégrales doubles) ie $\int_{\mathbb{R}} |(h*u)(\theta)|\, d\theta < \infty$.

(19) $$u, h \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow u * h \in L^1(\mathbb{R}).$$

3) Masse de Dirac.

Une définition rigoureuse de la masse de Dirac passe par la théorie des distributions. On fixe $\varepsilon > 0$ très petit et on introduit la fonction δ_ε suivante



Approximation δ_ε de la masse de Dirac en $\theta = 0$.

(20) $$\delta_\varepsilon(\theta) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{si } |\theta| < \varepsilon/2 \\ 0 & \text{si } |\theta| > \varepsilon/2 \end{cases}.$$

On a alors clairement

(21) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(\theta)\, d\theta = 1 \qquad \forall \varepsilon > 0$$

et de façon générale

(22) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\, \delta_\varepsilon(t-\theta)\, d\theta \to f(t), \text{ si } \varepsilon \to 0$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, on passe à la limite formellement dans les relations (21) et (22). Il vient

(23) $$\delta_\varepsilon \to \delta \text{ , "fonction" telle que } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\theta)\, d\theta = 1$$

(24) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\, \delta(t-\theta)\, d\theta = f(t) .$$

On peut interpréter la relation (24) en disant que la fonction $f(\cdot)$ est décomposée sur la base des fonctions δ_θ, avec

(25) $$\delta_\tau(t) = \delta(t-\tau) ;$$

le coefficient de cette décomposition dans la base est simplement $f(\theta)$:

(26) $$f = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\, \delta_\theta \, d\theta$$

Lorsqu'on prend $u = \delta$ dans la relation (16), on a, compte tenu de la relation (24):

(27) $$h * \delta = h$$

et la fonction $(\cdot)$ est le résultat de la convolution lorsqu'on prend pour donnée d'entrée l'impulsion $u = \delta$. Pour cette raison, la fonction $h(\cdot)$ est appelée <u>réponse impulsionnelle</u> du filtre (16

4) Notion de filtre.

- Le cas du circuit RC a permis de mettre en évidence une relation générale (relation (16)) sous la forme d'une intégrale de convolution. A tout signal continu $f(\cdot)$, ie toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on associe une nouvelle fonction $Lf : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui est encore un signal continu, à l'aide de la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui est la réponse impulsionnelle du filtre, et la relation

(28) $$Lf(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\theta)\, f(\theta)\, d\theta .$$

- La relation (28) est définit un opérateur linéaire L sur l'espace des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et à valeurs dans ce même espace

(29) $$L : \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \} \mapsto \{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \}$$

(30) $$L(f+g) = Lf + Lg \qquad \forall f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

(31) $$L(\lambda f) = \lambda\, Lf \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} .$$

De plus la fonction $h(\cdot)$ est l'image par le filtre L de la "fonction" δ de Dirac

(32) $$(L\delta)(t) = h(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

compte tenu de la relation (24).

- Un premier exemple de filtre est la __translation dans le temps__ T_τ ($\tau \in \mathbb{R}$ fixé) :

(33) $$(T_\tau f)(t) = f(t-\tau)$$

dont la réponse impulsionnelle vaut $h_\tau(t) = \delta(t-\tau)$

- Nous remarquons que le filtre (28) est __homogène dans le temps__ et commute avec les translations dans le temps :

(34) $$T_\tau L = L T_\tau \qquad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} T_\tau Lf(t) = Lf(t-\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau-\theta)\, f(\theta)\, d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\xi)\, f(\xi-\tau)\, d\xi \quad ; \quad \xi = \theta+\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\xi)\, (T_\tau f)(\xi)\, d\xi \\ &= (L T_\tau f)(t), \end{aligned}$$

ce qui montre la propriété (28). Réciproquement si L est un opérateur linéaire quelconque (satisfaisant (29)(30)(31)), et homogène dans le temps, il est nécessairement de la forme (28). La réponse impulsionnelle $h(\cdot)$ étant défini par la relation (32), on tire de (34) (et (25)) :

$$L\,\delta_\theta(t) = \left[(L\,T_\theta)(\delta)\right](t) = \left[T_\theta\,(L\delta)\right](t)$$

(35) $$L\delta_\theta(t) = (T_\theta\, h)(t) = h(t-\theta)$$

et partant de la représentation (26) d'une fonction du temps, on a grâce à la linéarité de L

(36) $$(Lf)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\,(L\delta_\theta)(t)\,d\theta$$

ce qui, compte tenu de (35), montre immédiatement la relation (28).

- Un autre exemple de filtre est la <u>moyenne M_T sur un intervalle de temps</u> de longueur T:

(37) $$(M_T f)(t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(u)\,du\,,$$

la réponse impulsionnelle h_T vaut $\frac{1}{T}$ si t appartient à l'intervalle $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ et 0 sinon (exercice!)

- Un problème naturel quand on étudie un opérateur linéaire est de rechercher des valeurs propres μ et des vecteurs propres φ de sorte que

(38) $$L\varphi = \mu\varphi$$

c'est à dire des "directions" où L agit comme une homothétie. Nous avons la

Proposition Spectre

Les fonctions exponentielles

(39) $\varphi_\omega(t) = e^{i\omega t}$ $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$

sont vecteurs propres du filtre (28) avec une valeur propre associée notée $\hat{h}(\omega)$ et définie par :

(40) $$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

(41) $$L\varphi_\omega = \hat{h}(\omega)\, \varphi_\omega$$

La fonction $\omega \mapsto \hat{h}(\omega)$, transformée de Fourier de la fonction $h(\cdot)$ est appelée fonction de transfert du filtre L.

La preuve est élémentaire :

$$\begin{aligned}(L\varphi_\omega)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, e^{i\omega(t-\theta)}\, d\theta \\ &= e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, e^{-i\omega\theta}\, d\theta \\ &= \hat{h}(\omega)\, \varphi_\omega(t). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

5) Rappels sur la transformation de Fourier

- La transformation de Fourier est un filtre linéaire non homogène défini par la relation

(42) $$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

qui est une intégrale convergente lorsque $f \in L^1(\mathbb{R})$ mais qui est en fait définie (par approximation et continuité) pour $f \in L^2(\mathbb{R})$. L'outil complémentaire de $f \mapsto \hat{f}$ est la transformation de Fourier réciproque

$$(43) \qquad \tilde{\mathcal{F}} f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\, e^{i\theta\xi}\, d\theta$$

qui justifie son nom par la <u>formule d'inversion de Fourier</u>

$$(44) \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\, e^{iwt}\, dw$$

ie (45) $\quad \tilde{\mathcal{F}} \hat{f} = \widehat{\tilde{\mathcal{F}} f} = f.$

est valable en toute rigueur pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

- La transformation de Fourier est intéressante sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$ car elle y définit une <u>isométrie</u>. On a en effet la formule de Plancherel :

$$(46) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2\, dw = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt.$$

- Il est utile de calculer quelques exemples de transformées de Fourier.

* (47) $f(t) = e^{-t/\tau}\, H(t) \longrightarrow \hat{f}(\omega) = \dfrac{\tau}{1+i\omega\tau}$; $\tau > 0$

En effet, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} \exp\left[\left(-\frac{1}{\tau} - i\omega\right)t\right] dt$

$= \dfrac{1}{\frac{1}{\tau}+i\omega} = \dfrac{\tau}{1+i\omega\tau}$, d'où (47).

* (48) $f(t) \begin{cases} \frac{1}{T} \text{ si } |t| \leq \frac{T}{2} ; \\ 0 \quad \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \longrightarrow \hat{f}(\omega) = \operatorname{sinc}\left(\dfrac{\omega T}{2}\right)$

(49) $\operatorname{sinc} \xi \equiv \dfrac{\sin \xi}{\xi}$ $\quad \xi \in \mathbb{R}$.

En effet, $\displaystyle\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i\omega t}\, dt = \frac{1}{i\omega T}\left(e^{i\omega\frac{T}{2}} - e^{-i\omega\frac{T}{2}}\right.$

* (49) $f(t) = e^{-t^2/2} \longrightarrow \hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\; e^{-\omega^2/2}$

* (50) $\dfrac{df}{dt} \longrightarrow \widehat{\dfrac{df}{dt}}(\omega) = i\omega\, \hat{f}(\omega)$

on dérive par rapport à ω la relation (42)

* (51) $f(t) = \delta_\tau(t) \longrightarrow \hat{f}(\omega) = e^{-i\omega\tau}$

conséquence des relations (24) et (25).

* (52) $f(t) = e^{iat} \longrightarrow \hat{f}(\omega) = 2\pi\; \delta(\omega - a)$.

Cette dernière relation est plus difficile à établir car f est de module identiquement égal à 1 donc l'intégrale de définition (42) ne saurait converger ! On utilise une variante de la relation (51) en remarquant que

$$(53) \quad (\widetilde{\mathcal{F}}\, \delta_\tau)(\omega) = \frac{1}{2\pi}\, e^{i\omega\tau}$$

compte tenu de (25) et (43). Il suffit alors d'utiliser la relation (45) après avoir pris la transformée de Fourier des deux membres de la relation (53). La relation (52) en découle, aux notations près.

- La transformation de Fourier transforme un produit de convolution en un produit ordinaire. On a la

<u>Proposition</u> Convolution

Pour f et $g \in L^1(\mathbb{R})$,

$$(54) \quad \widehat{f * g} = \hat{f}\, \hat{g}$$

$$(55) \quad \widetilde{\mathcal{F}}(f*g) = 2\pi\, (\widetilde{\mathcal{F}} f)(\widetilde{\mathcal{F}} g)$$

La preuve est une conséquence du théorème de changement de variable dans une intégrale double. Soit $(t,u) \mapsto (\xi, \eta)$ une bijection dérivable $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de jacobien J défini par

$$(56) \quad J(t,u) = \begin{vmatrix} \partial\xi/\partial t & \partial\xi/\partial u \\ \partial\eta/\partial t & \partial\eta/\partial u \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(t,u)}$$

On a alors

$$(57)\qquad \iint f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \iint f\big(\xi(t,u),\eta(t,u)\big)\,|J(t,u)|\,dt\,du\,.$$

ou de façon équivalente

$$(58)\qquad \iint f(t,u)\,dt\,du = \iint f\big((t(\xi,\eta),u(\xi,\eta)\big)\left|\frac{\partial(t,u)}{\partial(\xi,\eta)}\right| d\xi\,d\eta\,.$$

on a ici :

$$\widehat{f*g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\,g(u)\,du\right)dt$$

on pose $\xi = u$, $\eta = t-u$. Le jacobien associé $\dfrac{\partial(t,u)}{\partial(\xi,\eta)}$ vaut donc $\begin{vmatrix} \partial t/\partial\xi & \partial t/\partial\eta \\ \partial u/\partial\xi & \partial u/\partial\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ car $t = \xi+\eta$.

Compte tenu de la relation (58), on tire

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(\omega) &= \iint d\xi\,d\eta\; e^{-i(\xi+\eta)\omega}\; f(\eta)\,g(\xi)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, g(\xi)\,e^{-i\xi\omega}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\, f(\eta)\,e^{-i\eta\omega}\\ &= \hat{f}(\omega)\;\hat{g}(\omega)\end{aligned}$$

ce qui montre la propriété (54).

La relation (55) est une conséquence de la propriété (54) précédente et de la définition (43) de la transformation de Fourier réciproque. On a en effet, par un calcul analogue à celui de cette page

$$2\pi\,\tilde{\mathcal{F}}_1(f*g) = \left(2\pi\,\tilde{\mathcal{F}}_1 f\right)\left(2\pi\,\tilde{\mathcal{F}}_1 g\right)$$

et la relation (55) en découle. ∎

6) Retour sur le circuit RC

Le calcul de la fonction de transfert est très simple si on connaît l'équation différentielle qui définit la réponse $v = Lu$ en fonction de la donnée $u(t)$. Dans le cas du circuit RC, la fonction $v(t)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire (4). La réponse impulsionnelle est donnée par l'intégrale de convolution (18) et la transformée de Fourier $\hat{h}(\omega)$ de cette réponse impulsionnelle (17) a été calculée (à des coefficients multiplicatifs près)

On peut aussi partir directement de l'équation différentielle (4) pour calculer directement la fonction de transfert. On applique d'abord la transformation de Fourier aux deux membres de la relation (4). Il vient alors

$$(59) \qquad RC \widehat{\frac{dv}{dt}} + \hat{v} = \hat{u}$$

et compte tenu de la relation (50), on en déduit

$$(60) \qquad \big(RC(i\omega) + 1\big)\, \hat{v}(\omega) = \hat{u}(\omega)$$

Par ailleurs, la relation (54) sur la transformée de Fourier d'un produit de convolution entraîne, compte tenu de (18):

$$(61) \qquad \hat{v}(\omega) = \hat{h}(\omega)\ \hat{u}(\omega)$$

et on déduit directement des relations (60) et (61) la réponse impulsionnelle du filtre

$$(62) \qquad \hat{h}(\omega) = \frac{1}{1 + i R C \omega}$$

Sans calcul, ou presque.