

Traitement du Signal

Leçon 02

Traitement du signal analogique (ii)

- Complément sur les filtres linéaires homogènes
- Filtrage des circuits électroniques
- Transformée de Laplace
- Synthèse du filtre passe-bas

François Dubois

Paris, 1997

Traitement du signal analogique

(ii)

1) Complément sur les filtres linéaires homogènes.

Un filtre linéaire homogène est une fonctionnelle linéaire L qui à toute fonction du temps $f(\cdot)$ associe une nouvelle fonction du temps $(Lf)(\cdot)$, de façon à opérer linéairement sur f et à être invariant par rapport aux translations dans le temps, c'est à dire vérifier la relation de commutation:

$$(1) \quad LT_z = T_z L \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

où T_z est le filtre de translation de l'intervalle de temps z :

$$(2) \quad (T_z f)(t) = f(t - z).$$

Dans ces conditions, Lf est une fonction qui est le produit de convolution de f par une fonction $h(\cdot)$, réponse impulsionnelle du filtre:

$$(3) \quad (Lf)(t) = (h * f)(t)$$

et on voit facilement que h est la réponse LS donnée à la masse de Dirac, d'où son nom.

Un autre point de vue consiste à écrire $f(\cdot)$ comme transformée de Fourier réciproque de sa transformée de Fourier $\hat{f}(\cdot)$.

$$(4) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

c'est à dire "décomposer" la fonction $f(\cdot)$ sur la "base" (continue) des exponentielles complexes. on peut écrire une relation analogue pour l'image $(Lf)(\cdot)$ de $f(\cdot)$ par le filtre, et la transformée de Fourier de Lf s'exprime simplement compte tenu de la relation (3):

$$(5) \quad \widehat{Lf}(\omega) = \hat{h}(\omega) \hat{f}(\omega).$$

La relation (5) doit être comparée en relation avec la relation (4); on a:

$$(6) \quad (Lf)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega) \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

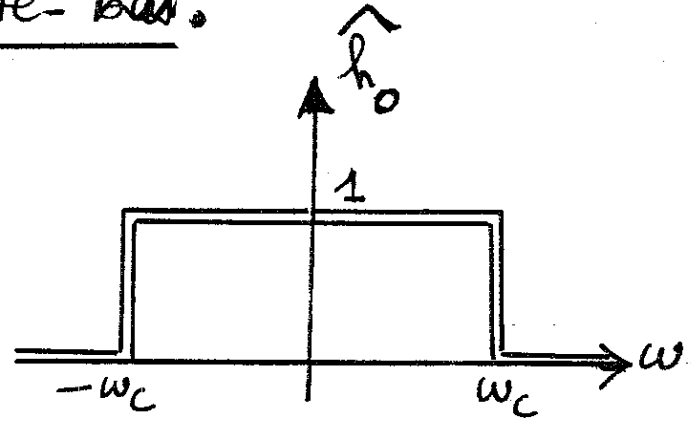
et le filtre L consiste à multiplier la "composante" de Fourier $\hat{f}(\omega)$ sur la fonction de base $\exp(i\omega \cdot)$ par la fonction de transf. fert $\hat{h}(\cdot)$ du filtre.

Les exemples de filtres qui suivent sont donc moins élémentaires que ceux vus dans le premier cours (translation dans le temps T_τ , moyenne M_T sur un intervalle de temps fixé) mais sont définis de façon élémentaire à

l'aide de la représentation du filtre par la relation (6), c'est à dire par la transformée de Fourier.

- L'exemple fondamental pour les applications est celui du filtre passe-bas.

L'idée très simple consiste à isoler les "basses" fréquences des "hautes" fréquences. on fixe pour cela une fréquence "de coupure" ω_c qui détermine la limite



Fonction de transfert du filtre passe-bas.

entre haute et basse fréquence et on définit le filtre passe bas (de réponse impulsionnelle $h_0(\cdot)$) par la représentation suivante :

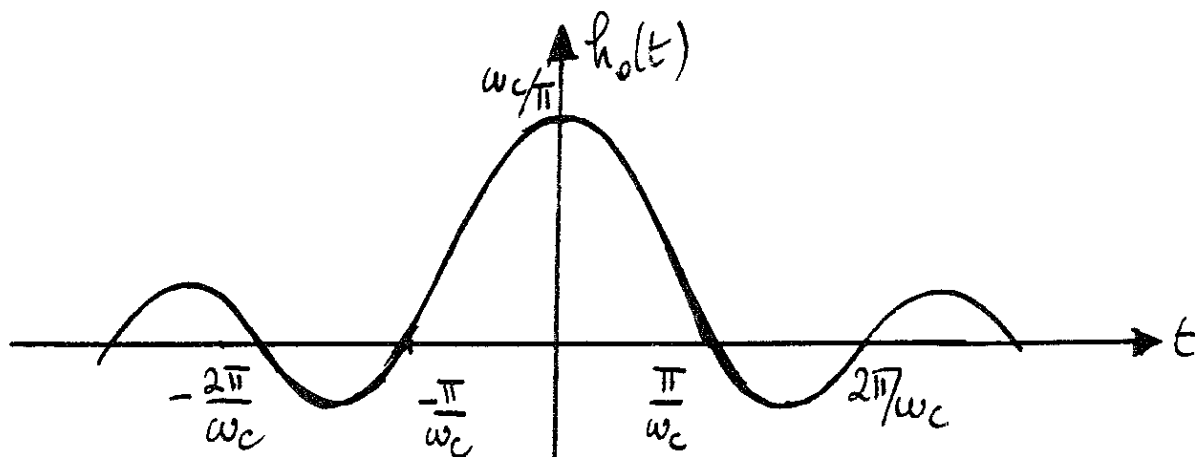
$$(7) \quad (h_0 * f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

En rapprochant les relations (6) et (7), on déduit que la fonction de transfert du filtre passe-bas est la constante identiquement égale à 1 pour ω de module inférieur ou égal à ω_c et est nulle pour ω de module strictement supérieur à ω_c . on a donc par définition :

$$(8) \quad \hat{h}_0(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Le calcul de la réponse impulsionnelle de ce filtre est simple puisqu'il suffit d'écrire la relation (7) pour f égale à la masse de Dirac, c'est à dire pour $f(\omega) \equiv 1$. on a donc

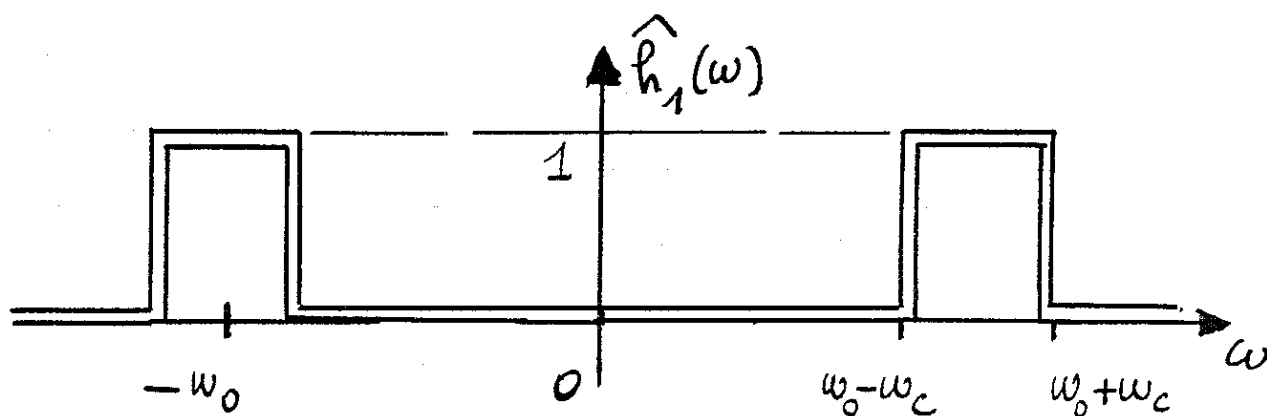
$$(9) \quad h_0(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}(\omega_c t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega_c t}{t}$$



Réponse impulsionnelle du filtre passe-bas

- Le filtre passe-bande est la variante "utile" du filtre précédent. Au lieu de "couper" le signal $f(\cdot)$ à la fréquence ω_c , on recherche dans ce signal la fréquence ω_0 , avec une incertitude de précision égale à ω_c . La fonction de transfert se définit donc selon la relation :

$$(10) \quad \hat{h}_1(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \in [\omega_0 - \omega_c, \omega_0 + \omega_c] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Fonction de transfert du filtre passe-large

et le calcul de la réponse impulsionnelle est une conséquence immédiate de la comparaison des graphes des fonctions de transfert

$$(1) \quad \hat{h}_1(\omega) = \hat{h}_0(\omega - \omega_0) + \hat{h}_0(\omega + \omega_0)$$

et de la linéarité de la transformée de Fourier :

$$(2) \quad h_1(t) = 2\cos(\omega_0 t) h_0(t) = \frac{2}{\pi t} \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_c t)$$

- Une propriété importante des filtres est d'être physiquement réalisables à l'aide de circuits électriques ou mécaniques, ou autres ! Ainsi, si la variable t désigne explicitement le temps, il est conforme à "la saine physique" [Sadi Carnot, Réflexions sur la puissance motrice du feu, Bachelier, Paris, 1824, page 21] que le signal filtré $(Lf)(t)$ ne dépende à l'instant t , que des valeurs passées $f(u), u \leq t$ du signal $f(\cdot)$. Dans ce cas, le filtre est dit causal.

Un filtre causal n'est fonction, à l'instant t que des valeurs $f(u)$ pour $u \leq t$. Sa réponse impulsionnelle vérifie

$$(13) \quad h(u) = 0 \quad \text{pour } u < 0 \quad (\text{filtre causal})$$

La preuve de la propriété (13) utilise la représentation du filtre via l'intégrale de convolution (3), qu'on peut réécrire :

$$(14) \quad (Lf)(t) = \int_0^{+\infty} h(u) f(t-u) du + \int_0^{+\infty} h(-v) f(t+v) dv$$

La première intégrale du second membre de la relation (14) contient les valeurs $f(t)$ pour $0 \leq t$ alors que la seconde considère les instants $f(t+v)$ ($v > 0$) dans le "futur" de l'instant t . Cette contribution est nulle, quelle que soit la fonction f . Le coefficient associé est donc nul, ce qui exprime la relation (13).

- La notion de filtre stable a été introduite (implicitement) lors de l'étude de l'oscillateur RC. En effet, on a cherché une solution v de l'équation différentielle $RC \frac{dv}{dt} + v = f(t)$ qui reste bornée lorsque $t \rightarrow -\infty$ pour une donnée $f(\cdot)$ non nulle seulement pour $t > 0$. Par définition, un filtre stable associe à toute fonction bornée $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ une fonction bornée $Lf \in L^\infty(\mathbb{R})$.

7
 Un filtre stable opère de $L^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$.
 Si $|f(\cdot)|$ est majorée par une constante c , alors
 il existe une constante c'
 qui majore $Lf(\cdot)$ en valeur absolue.

(15) $(|f(t)| \leq c \ \forall t \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\exists c' > 0, |(Lf)(t)| \leq c', \forall t \in \mathbb{R})$
 on a la filtre stable

Proposition

Le filtre L défini par l'intégrale de convo-
 lution (3) est stable si et seulement si la ré-
 ponse impulsionnelle $h(\cdot)$ appartient à
 $L^1(\mathbb{R})$, c'est à dire si et seulement si

$$(16) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(u)| \, du < \infty.$$

Montrer que (16) entraîne (15) est très élémentaire.
 Soit $f(\cdot)$ une fonction telle que $|f(t)| \leq c$
 pour $t \in \mathbb{R}$ arbitraire. on a alors

$$\begin{aligned} |(Lf)(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(u) f(t-u) \, du \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(u)| |f(t-u)| \, du \leq c \int_{-\infty}^{\infty} |h(u)| \, du \end{aligned}$$

et la valeur $c' = c \int_{-\infty}^{\infty} |h(u)| \, du$ permet de
 majorer la norme L^∞ de $Lf(\cdot)$.

La réciproque dépasse le cadre de ce cours.
 démonstration de la

• On remarque que le filtre passe bas n'est ni causal (clair sur la relation (9) qui ne satisfait pas (13)) ni stable. Cette dernière propriété est une conséquence de la divergence de l'intégrale sur \mathbb{R} de la valeur absolue du sinus cardinal:

$$(17) \int_0^{\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = +\infty.$$

2) Filtrage par des circuits électroniques.

C'est la généralisation naturelle du circuit RC vu au premier cours. Le signal $f(\cdot)$ est la différence de potentiel u appliqué à l'entrée d'un circuit électrique comprenant des résistances, des selfs, des capacités, etc. Dans le cas où le traitement reste linéaire, la différence de potentiel v en sortie de circuit est donnée par une relation de convolution de type (3): $v = h * u$ et de façon générale, $v(\cdot)$ est solution d'une équation différentielle à coefficients constants dont le second membre est une combinaison linéaire de dérivées de l'entrée. on a:

$$(18) \sum_{j=0}^N a_j \frac{d^j v}{dt^j}(t) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k u}{dt^k}.$$

La solution $v(t)$ de l'équation différentielle (18) dépend de $(N+1)$ paramètres arbitraires qui sont par exemples les dérivées successives de $v(\cdot)$ à l'instant initial: $(\frac{d^j}{dt^j} v(0))_{0 \leq j \leq N-1}$. Dans le

cas où le signal d'entrée $u(\cdot)$ est identiquement nul pour $t < 0$ (on branche le circuit à l'instant initial $t=0$), on peut supposer le circuit initialement au repos, ce qui signifie qu'on a les conditions initiales

$$(19) \quad \frac{d^j v}{dt^j}(0) = 0 \quad \forall j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Le calcul de la fonction de transfert $\hat{h}(w)$ est alors très simple. En effet, les transformées de Fourier des N premières dérivées de v sont alors bien définies et en itérant j fois la relation

$$(20) \quad \widehat{\frac{dv}{dt}} = iw \hat{v}$$

on tire immédiatement de la relation (18)

$$(21) \quad \left(\sum_{j=0}^N a_j (iw)^j \right) \hat{v}(w) = \left(\sum_{k=0}^M b_k (iw)^k \right) \hat{u}(w)$$

et la fonction de transfert $\hat{h}(w) = \hat{v}(w) / \hat{u}(w)$ s'appelle aussi impédance du circuit. on a

$$(22) \quad \hat{h}(i\omega) = \frac{b_0 + b_1(i\omega) + \dots + b_k(i\omega)^k + \dots + b_M(i\omega)^M}{a_0 + a_1(i\omega) + \dots + a_j(i\omega)^j + \dots + a_N(i\omega)^N} \quad 10$$

et cette fonction de transfert ne peut pas tendre vers l'infini à haute fréquence. Il en résulte qu'en a nécessairement pour un circuit électronique

$$(23) \quad N \geq M$$

ce qui était déjà le cas du circuit RC ($N=1, M=0$)

Ce qui n'apparaît pas directement dans la relation (22) est la causalité du filtre ainsi obtenu. C'est une conséquence des conditions initiales choisies à la relation (19); on a

$$(24) \quad v(t) = \int_0^{\infty} h(u) \delta(t-u) du$$

relation qui généralise la représentation introduite à la relation (14) du cas précédent.

Nous retenons que les fonctions de transfert des circuits électroniques à composants linéaires sont des fractions rationnelles. Afin d'utiliser les composants électroniques pour effectuer la synthèse de filtres dont la fonction de transfert est donnée ou approchée, il est utile de lire sur la fraction rationnelle les propriétés physiques de stabilité. Il est pour cela indispensable d'introduire un nouvel outil: la transformation de Laplace.

3) Transformée de Laplace

- La transformée de Laplace d'une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est la fonction $\mathcal{L}f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$(25) \quad \mathcal{L}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

on remarque d'abord que si s appartient à l'axe imaginaire pur, ie $s = i\omega$, on a

$$(26) \quad \mathcal{L}f(i\omega) = \hat{f}(\omega)$$

donc la transformée de Fourier n'est qu'un cas particulier de transformée de Laplace.

- Il se pose le problème de la convergence de l'intégrale au second membre de la relation (25). La proposition suivante montre que c'est toujours une bande verticale du plan complexe de la forme $I \times \mathbb{R}$, où I est un intervalle de \mathbb{R} .

Proposition Bande de convergence

L'ensemble des nombres complexes qui rendent convergente l'intégrale (25), c'est à dire tels que la fonction $t \mapsto |f(t) \exp(-st)|$ est intégrable est une bande verticale du plan complexe. Il existe σ_1, σ_2 réels tels que $\mathcal{L}f(s)$ converge ($s \in R(\mathcal{L}f)$) pour $\sigma_1 < \operatorname{Re}(s) < \sigma_2$ et diverge pour $\operatorname{Re}(s) < \sigma_1$ et $\operatorname{Re}(s) > \sigma_2$.

- On remarque d'abord que la convergence de $\mathcal{L}f(s)$ ne dépend que de la partie réelle σ de $s = \sigma + i\omega$. En effet, le module de $\exp(-st)$ vaut $\exp(-\sigma t)$ donc ne dépend pas de ω .

L'ensemble $\mathcal{R}(\mathcal{L}f)$, ensemble de convergence de la transformée de Laplace de la fonction f est invariant par translation parallèle à l'axe imaginaire pur du plan complexe.

- Soit σ_1 et σ_2 deux réels pour lesquels e'ité. gale $I(\sigma)$ définie par

$$(27) \quad I(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt$$

converge ; on a donc $I(\sigma_1) < \infty$ et $I(\sigma_2) < \infty$. Mon-
trons qu'il en est de même pour tout σ
appartenant à l'intervalle $[\sigma_1, \sigma_2]$. on a
d'une part

$$\int_{-\infty}^0 |f(t)| e^{-\sigma t} dt \leq \int_{-\infty}^0 |f(t)| e^{-\sigma_2 t} dt < \infty$$

et d'autre part

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt \leq \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < \infty$$

ce qui montre la propriété.

- L'ensemble $\mathcal{R}(\mathcal{L}f)$ est donc un convexe de \mathbb{R} :
 $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{R}(\mathcal{L}f)$ entraîne $[\sigma_1, \sigma_2] \subset \mathcal{R}(\mathcal{L}f)$. Il
est classique que c'est donc un intervalle, de
la forme (σ_1, σ_2) , intervalle ouvert ou fermé

à chaque extrémité, avec $\sigma_1 \in \mathbb{R}$ ou $\sigma_1 = -\infty$ ou $\sigma_2 = +\infty$. La proposition est donc établie. ■

- Le calcul de quelques exemples de transformées de Laplace sert de guide pour des constructions plus élaborées proposées plus loin.

$$* (28) f(t) = \mathbb{1}_{[-T, T]}(t); \quad \mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s}(e^{Ts} - e^{-Ts}); \quad \mathcal{R}(\mathcal{L}f) = \mathbb{C}$$

$$* (29) f(t) = e^{-\alpha|t|}; \quad \mathcal{L}f(s) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - s^2}; \quad \mathcal{R}(\mathcal{L}f) =]-\alpha, \alpha[\times \mathbb{R}$$

La bande de convergence est bien limitée à l'intervalle $] -\alpha, \alpha[$. On a en effet, pour $s = \sigma + i\omega$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\alpha|t|} e^{-st}| dt \leq \int_{-\infty}^0 e^{-(\alpha+\sigma)t} dt + \int_0^{\infty} e^{(\sigma-\alpha)t} dt,$$

la première intégrale converge pour $\sigma + \alpha > 0$ et la seconde pour $\sigma - \alpha < 0$. On peut vérifier immédiatement que s'il n'en est pas ainsi, la fonction $t \mapsto |\exp(-st + \alpha|t|)|$ n'est pas intégrable et la transformée de Laplace n'est pas définie.

Par contre, la relation (29) montre que $\mathcal{L}f(s)$ a finalement un sens pour tout s complexe différent des deux pôles $-\alpha$ et α . La fonction $\mathcal{L}f(s)$ est une fonction analytique de la variable complexe s qui peut être prolongée à tout le plan complexe, excepté deux points!

$$* (30) \quad f(t) = e^{-\alpha t} H(t); \quad \mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s+\alpha}; \quad \mathcal{R}(\mathcal{L}f) =]-\alpha, \infty[\times \mathbb{R}^{14}$$

$$* (31) \quad f(t) = t^n e^{-\alpha t} H(t); \quad \mathcal{L}f(s) = \frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}; \quad \mathcal{R}(\mathcal{L}f) =]-\alpha, \infty[\times \mathbb{R}$$

La relation (30) s'établit facilement :

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{s+\alpha} \text{ si } \operatorname{Re} s > -\alpha;$$

elle sert de point de départ à la démonstration par récurrence de la relation (31) :

$$\int_0^{\infty} t^{n+1} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \left[\frac{-1}{s+\alpha} t^{n+1} e^{-(s+\alpha)t} \right]_0^{\infty} + \frac{n+1}{s+\alpha} \int_0^{\infty} t^n e^{-(s+\alpha)t} dt$$

- on a bien entendu des propriétés analogues à la transformation de Fourier pour la dérivation et la convolution.

Proposition Dérivation.

La transformée de Laplace de $\frac{df}{dt}$ est $s \mathcal{L}f(s)$:

$$(32) \quad \mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right)(s) = s \mathcal{L}f(s).$$

La preuve est une triple intégration par parties:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt &= \left[f(t) e^{-st} \right]_{-\infty}^{\infty} - (-s) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= s \mathcal{L}f(s). \end{aligned}$$



Si $f(\cdot)$ et $h(\cdot)$ sont deux signaux dont la transformée de Laplace est définie sur $\mathcal{R}(\mathcal{L}f)$ et $\mathcal{R}(\mathcal{L}h)$ respectivement, alors la transformée de Laplace de la convolée $g = f * h$ est définie sur l'intersection $\mathcal{R}(\mathcal{L}f) \cap \mathcal{R}(\mathcal{L}h)$ et sa valeur est le produit des transformées de Laplace :

$$(33) \quad \mathcal{R}(\mathcal{L}f) \cap \mathcal{R}(\mathcal{L}h) \subset \mathcal{R}(\mathcal{L}(f * h))$$

$$(34) \quad \mathcal{L}(f * h)(s) = \mathcal{L}f(s) \mathcal{L}h(s) \quad \forall s \in \mathcal{R}(\mathcal{L}f) \cap \mathcal{R}(\mathcal{L}h).$$

- La transformée de Laplace est bijective; la connaissance de $\mathcal{R}(\mathcal{L}f) \ni s \mapsto \mathcal{L}f(s) \in \mathbb{C}$ définit sans ambiguïté $\mathcal{R} \ni t \mapsto f(t) \in \mathbb{C}$, comme le montre le théorème d'inversion de la transformée de Laplace, qui étend la transformée de Fourier réciproque.

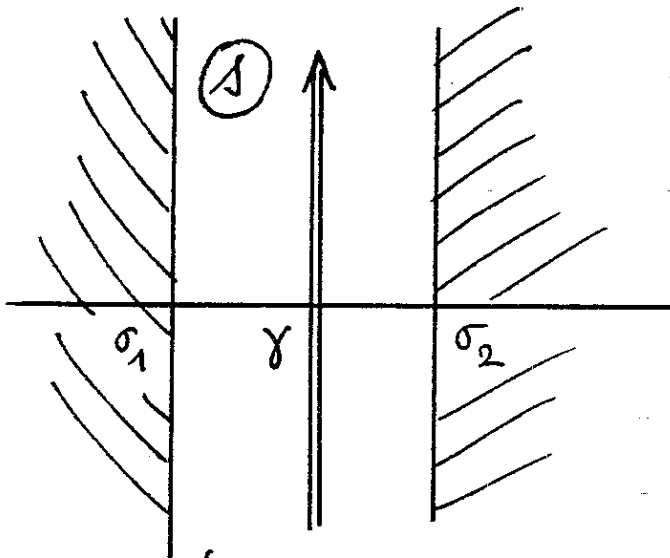
Théorème Inversion de la transformée de Laplace.

Soient σ_1, σ_2 deux réels de sorte que $]\sigma_1, \sigma_2[\times \mathbb{R}$ soit niché dans $\mathcal{R}(\mathcal{L}f)$. Soit $\delta \in \mathbb{R}$ choisi de sorte que

$$(35) \quad \sigma_1 < \delta < \sigma_2$$

on a :

$$(36) \quad f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} e^{st} \mathcal{L}f(s) ds$$



Ligne d'intégration pour l'inversion de la transformée de Laplace.

- on peut voir facilement que la relation (36) étend la formule d'inversion de Fourier (relation (44) du chapitre 1). Pour $s = \gamma + i\omega$ décrivant la droite $\gamma + i\mathbb{R}$ et avec le choix particulier $\gamma = 0$, on a :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}f(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

ce qui montre le résultat, compte tenu de la relation (26).

- ce résultat, qui assure en particulier la propriété d'injectivité de la transformée de Laplace $\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}g(s) \quad \forall s \in \mathcal{R}(\mathcal{L}f) \cap \mathcal{R}(\mathcal{L}g)$ entraîne $f = g$, permet d'étudier le lien entre la stabilité d'un filtre et les pôles de la fonction de transfert.

Théorème Stabilité des fonctions de transfert rationnelles ¹⁷

Soit $Lh(s)$ la fonction de transfert d'un circuit électronique défini par une équation différentielle linéaire à coefficients constants (18), qu'on suppose donnée par sa décomposition en éléments simples :

$$(37) \quad Lh(s) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{r_{ij}}{(s-p_i)^{j+1}}$$

où le $i^{\text{ème}}$ pôle p_i a pour multiplicité k_i .
Le filtre linéaire $f \mapsto f * h$ de réponse impulsionnelle $h(t)$ est stable si et seulement si

$$(38) \quad \operatorname{Re}(p_i) < 0 \quad \forall i = 1, \dots, p.$$

- Le fait d'étendre le nom de "fonction de transfert" à la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle est bien naturelle, compte tenu du lien (26) entre ces deux notions. De plus, si $v = h * u$ est la réponse d'un filtre solution d'une équation différentielle (18), la relation (22) prend une forme encore plus simple pour la transformée de Laplace :

$$(39) \quad Lh(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{j=0}^N a_j s^j}$$

et la condition (23) ($N \geq M$) assure que dans la décomposition en éléments simples de la fraction (39), le terme polynomial est au plus constant, ce qui justifie l'introduction de la représentation (37) lorsque celui-ci est nul, en particulier pour $N > M$.

- La preuve du théorème repose sur le résultat d'injection de la transformée de Laplace et sur l'exemple (31) de transformée de Laplace d'une fonction du type $t^n \exp(\alpha t) H(t)$. On reconnaît en effet $\frac{1}{(s-p_i)^{j+1}}$ comme la transformée de Laplace de la fonction $\frac{t^{j+1}}{(j+1)!} e^{p_i t} H(t)$, ce qui montre que

$$(40) \quad h(t) = \sum_{i=1}^P \left(\sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{\alpha_{ij}}{(j+1)!} t^{j+1} \right) e^{p_i t} H(t).$$

Le filtre est stable si et seulement si $h \in L^1(\mathbb{R})$, i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt$ converge, donc ici si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |\exp(p_i t)| dt$ converge pour tout i , ce qui exprime que la partie réelle du pôle p_i est strictement négative. La relation (38) est donc établie.

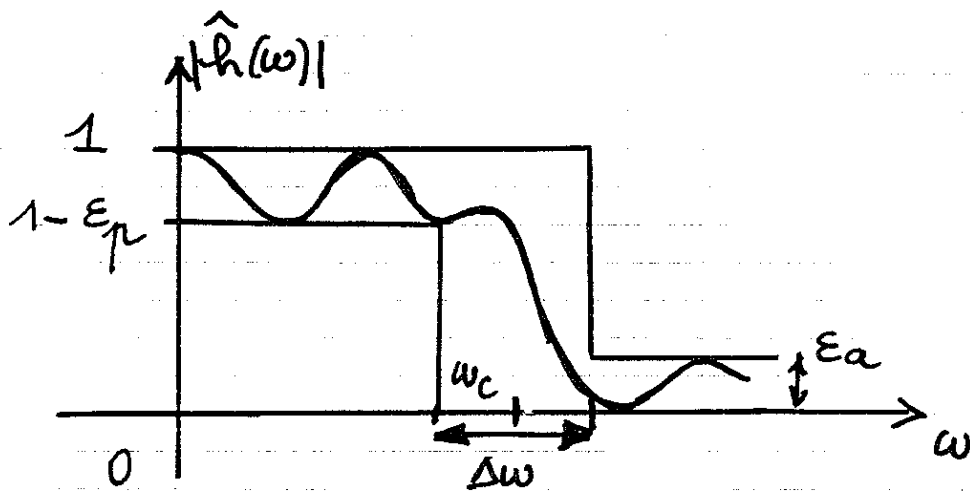
4) Synthèse du filtre passe-bas.

- Nous avons vu que le filtre passe-bas h_0 , défini par sa transformée de Fourier à la relation (8), n'est pas causal ($h_0(t) \neq 0$ même si $t < 0$) et n'est pas stable (l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |h_0(\omega)| d\omega$ diverge, voir la relation (9)). Toutefois c'est un outil fondamental du traitement du signal que de pouvoir l'approcher, de façon à isoler dans un signal donné un intervalle de fréquence $[\omega_0 - \omega_c, \omega_0 + \omega_c]$ arbitraire.

L'approximation d'un filtre passe-bas comporte deux étapes : on remplace d'abord la transformée de Fourier h_0 par une fraction rationnelle dont le dénominateur a un degré plus élevé que celui du numérateur, ce qui garantit au filtre obtenu d'être causal (la fonction de Heaviside est toujours en facteur dans l'expression de la réponse impulsionnelle). On fait également attention de respecter la condition trouvée au théorème précédent : les pôles de la fraction rationnelle doivent être situés dans le demi-plan "gauche" du plan complexe, de façon à garantir la stabilité du filtre, toujours réalisée dans les composants électroniques passifs.

Une fois la fraction rationnelle approchant le brie définie selon les contraintes précédentes, l'art de l'électronicien consiste à concevoir un circuit électrique dont la réponse $v = h_x u$ est solution de l'équation différentielle (18). Nous n'abordons dans ce qui suit qu'une illustration du premier point, mais il est clair qu'une conception de "bon" filtre passe-bas suppose à la fois une connaissance approfondie des fractions rationnelles qui approchent un réseau et du comportement des composants électroniques de base qui permettent de réaliser pratiquement cette approximation.

- on cherche ici à approcher le carré du module $|\hat{h}_0(\omega)|^2$ à l'aide d'une fraction rationnelle. Pour l'approximation de la phase, nous renvoyons aux ouvrages plus spécialisés donnés dans la bibliographie. on définit un gabarit pour l'approximation de $|\hat{h}_0(\omega)|^2$ à l'aide de trois paramètres ϵ_p , ϵ_a et $\Delta\omega$. Les nombres positifs ϵ_p et ϵ_a sont les amplitudes maximales des oscillations dans les bandes de passage ($|\omega| \leq \omega_c$) et d'atténuation ($|\omega| \geq \omega_c$) respectivement. L'intervalle $\Delta\omega$ est la largeur de la bande de transmission.



Gabarit $(\epsilon_p, \epsilon_a, \Delta\omega)$ pour l'approximation du filtre passe-bas.

- Le premier exemple de synthèse approchée du filtre passe-bas est le filtre de Butterworth, paramétré par l'entier n . on pose

$$(41) \quad |\hat{h}_n^b(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

Les $(2n-1)$ premières dérivées de $|\hat{h}_n^b(\omega)|^2$ sont nulles en $\omega=0$ donc si n croît, le filtre est de plus en plus plat au voisinage de zéro. on remarque aussi qu'à la fréquence de coupure ($\omega=\omega_c$), on a $|\hat{h}_n^b(\omega_c)|^2 = \frac{1}{2}$ et que pour $\omega \neq \omega_c$, la fonction (41) tend vers la fonction caractéristique de l'intervalle $[-\omega_c, \omega_c]$, ce qui établit la convergence vers le filtre passe-bas.

- Le deuxième exemple est le filtre de Tchebycheff, ²²
paramétré par l'entier n (degré du polynôme de Tchebycheff utilisé) et un petit paramètre réel $\varepsilon > 0$. Le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebycheff est défini pour $|w| \leq 1$ via la relation

$$(42) \quad T_n(w) = \cos(n \arccos w) \quad , \quad |w| \leq 1 .$$

Cette relation définit en fait T_n pour tout w puisque (42) est en fait polynomial, comme le montre la relation de récurrence :

$$(43) \quad T_0(w) = 1, T_1(w) = w, T_{n+1}(w) = 2wT_n(w) - T_{n-1}(w)$$

Pour $|w| < 1$, $|T_n(w)|^2$ oscille régulièrement entre 0 et 1 alors que pour $|w| > 1$, on a une croissance monotone. On pose donc

$$(44) \quad |\hat{h}_n^t(w)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(T_n\left(\frac{w}{w_c}\right) \right)^2}$$

Le filtre approché $|\hat{h}_n^t(w)|^2$ oscille entre 1 et $\frac{1}{1+\varepsilon^2}$ lorsque $0 \leq |w| \leq w_c$ et pour $|w| > w_c$ on a une décroissance monotone vers zéro.