

# Traitement du Signal

## Leçon 03

### Echantillonnage

- Introduction
- Conversion analogique - digital
- Transformée de Fourier du peigne de Dirac
- Preuve du théorème de Shannon - Nyquist
- Aliasing

François Dubois

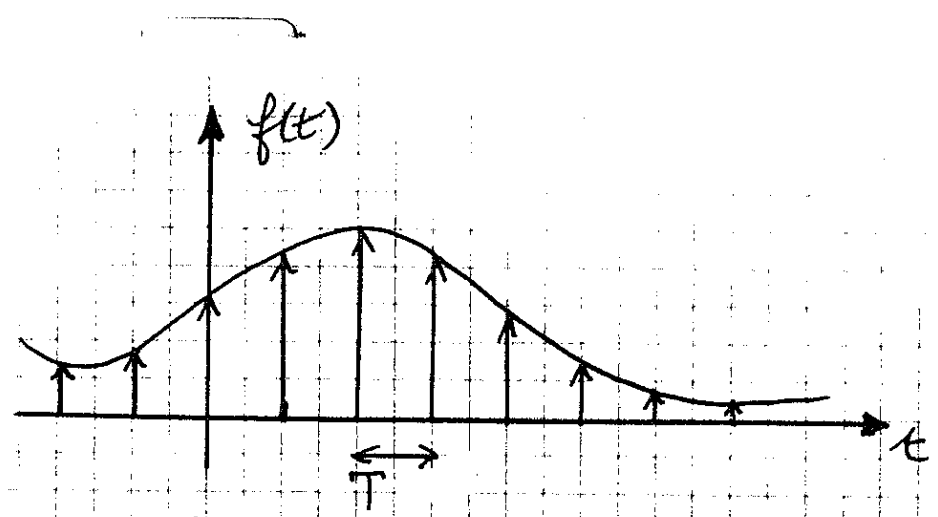
Paris, 1997

## Echantillonnage

### 1) Introduction

Le traitement numérique du signal consiste à effectuer diverses opérations algébriques et arithmétiques sur des données discrètes en général stockées dans la mémoire d'un ordinateur. Il est donc nécessaire de passer d'un traitement qui modifie une fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  à un traitement qui modifie une fonction discrète  $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{G}$ . Le changement d'espace d'arrivée (passage d'un continuum numérique  $\mathbb{C}$  à un ensemble fini ou discret  $\mathbb{G}$ ) est l'opération de quantification. Elle n'est pas abordée dans ce chapitre. Le changement d'espace de départ est également le passage d'un continuum  $\mathbb{R}$  à un ensemble discret  $\mathbb{Z}$ , puis fini  $\{0, \dots, N-1\}$  dans une seconde étape. Cette modification est l'échantillonnage.

Qu'il soit analogique ou numérique, le traitement du signal doit remplir un certain nombre de fonctions prédéfinies comme l'élimination de hautes fréquences ou l'extraction d'une bande particulière par exemple. La nature mathématique du signal (fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{G}$ ) est secondaire pour les applications ! Il est donc essentiel de mesurer les limites de l'étape de d'échantillonnage.



Echantillonnage de  $f(\cdot)$

2) Conversion analogique - digital

On considère une fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  continue et un pas d'échantillonnage  $T > 0$  fixé. Il est naturel de définir la valeur échantillonnée de  $f$  relativement à ce pas  $T$  grâce aux valeurs  $f(nT)$ , pour toutes les valeurs entières de  $n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). On a défini ainsi une nouvelle fonction  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

(1)  $\mathbb{Z} \ni n \mapsto f(nT) \in \mathbb{C}$ .

On modélise mathématiquement cette fonction échantillonnée à l'aide de masses de Dirac placées aux points multiples entiers de  $T$ :

(2)  $f_T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \delta(t - nT)$ ,

ce qui permet d'introduire le "peigne de Dirac"  $S_T(t)$ :

(3)  $S_T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT)$ .

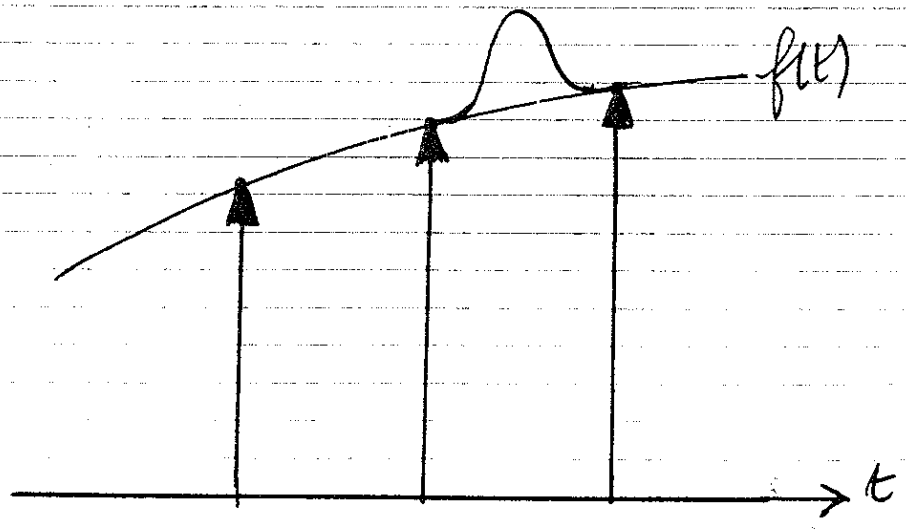
La relation (2) prend donc la forme

$$(4) \quad f_T(t) = f(t) S_T(t)$$

ce qui constitue une forme particulière de filtrage.

- La question naturelle qui se pose est la suivante: peut-on reconstruire  $f$  à partir de  $f_T$ , c'est à dire: peut-on interpoler "entre" les valeurs discrètes  $\{f(nT), n \in \mathbb{Z}\}$  pour reconstruire une fonction dépendant de la variable continue  $t$ ?

Nous allons voir que si " $f$  n'a pas de composante de haute fréquence, c'est possible", mais il est clair que si on autorise  $f$  "à varier aussi vite qu'on le désire" la réponse est négative, comme le montre le dessin ci-dessous.



Interpolations entre valeurs discrètes

Le théorème suivant précise mathématiquement cette situation.

### Th) d'échantillonnage de Shannon - Nyquist.

on suppose que la fonction  $f$  est un signal "à bande limitée", c'est à dire qu'il existe  $\Omega > 0$  de sorte que  $\hat{f}(\omega) = 0$  si  $\omega$  est de valeur absolue supérieure ou égale à  $\Omega$ :

$$(5) \quad \hat{f}(\omega) = 0 \quad \forall \omega \text{ tel que } |\omega| \geq \Omega$$

Si on choisit un pas d'échantillonnage  $T > 0$  de sorte que

$$(6) \quad \Omega T \leq \pi \quad (\text{critère de Nyquist})$$

alors on peut reconstruire exactement la fonction  $f$  à partir de la fonction échantillonnée  $f_T$  donnée à la relation (2)

La preuve du théorème est assez longue et utilise la transformation de Fourier (cf chapitre 1). on part de la relation générale

$$(7) \quad \hat{f} * \hat{g} = 2\pi \widehat{fg}$$

pour calculer la transformée de Fourier de la fonction échantillonnée :

$$(8) \quad \hat{f}_T = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{S}_T$$

et il est d'abord nécessaire de calculer, de façon aussi rigoureuse et élémentaire que possible, la transformée de Fourier du peigne de Dirac.

### 3) Transformée de Fourier du peigne de Dirac

Proposition on a la relation suivante

$$(9) \quad \widehat{S_T} = \frac{2\pi}{T} S_{\frac{2\pi}{T}}$$

La transformée de Fourier de  $t \mapsto \delta(t - nT)$  se calcule facilement :

$$(10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-i\omega t} dt = e^{-in\omega T}$$

mais alors la transformée de Fourier de  $S_T$  prend la forme

$$(11) \quad \widehat{S_T}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\omega T}$$

qui fait apparaître une série divergente que nous allons résumer dans le calcul qui suit ou pose d'abord

$$(12) \quad S_T^J(t) = \sum_{|j| \leq J} \delta(t - nT)$$

et on va définir  $\widehat{S_T}(\omega)$  comme la limite pour  $J$  tendant vers  $+\infty$ , de la transformée de Fourier

de la distribution  $S_T^J$

$$(13) \quad \widehat{S}_T^J(\omega) = \lim_{J \rightarrow \infty} \widehat{S}_T^J(\omega)$$

Or on a:

$$\begin{aligned} \widehat{S}_T^J(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \sum_{|j| \leq J} \delta(t - jT) \\ &= \sum_{|j| \leq J} e^{-i\omega jT} = \sum_{|j| \leq J} \left( e^{-i\omega T} \right)^j \end{aligned}$$

Cette dernière somme se calcule en factorisant le dernier terme obtenu pour  $j = J$  et en sommant les  $(2J+1)$  premiers termes d'une suite géométrique qui commence à 1 et de raison  $e^{-i\omega T}$

Il vient

$$\begin{aligned} \widehat{S}_T^J(\omega) &= e^{-i\omega T J} \left( 1 + e^{-i\omega T} + \left( e^{-i\omega T} \right)^2 + \dots + \left( e^{-i\omega T} \right)^{2J} \right) \\ &= e^{-i\omega T J} \frac{\left( e^{-i\omega T} \right)^{2J+1} - 1}{e^{-i\omega T} - 1} \\ &= e^{-i\omega T J} \frac{\cos((2J+1)\omega T) - 1 + i \sin((2J+1)\omega T)}{\cos \omega T - 1 + i \sin \omega T} \\ &= e^{-i\omega T J} \frac{\sin(J+1/2)\omega T}{\sin \frac{1}{2}\omega T} \frac{-\sin(J+1/2)\omega T + i \cos(J+1/2)\omega T}{-\sin \frac{1}{2}\omega T + i \cos \frac{1}{2}\omega T} \\ &= \frac{\sin(J+1/2)\omega T}{\sin \frac{1}{2}\omega T} e^{-i\omega T J} \frac{e^{i(J+1/2)\omega T}}{e^{i\omega T/2}} \end{aligned}$$

$$(14) \quad \widehat{S}_T^J(\omega) = \frac{\sin((J+1/2)\omega T)}{\sin \left( \frac{1}{2}\omega T \right)}$$

La fonction  $\widehat{S}_T^J(\omega)$  est paire, périodique et

de période  $\frac{2\pi}{T}$ .

$$\widehat{S}_T^J\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right) = \frac{\sin\left(J + \frac{1}{2}\right)\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)T}{\sin\left(\frac{1}{2}\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)T\right)} = \frac{-\sin\left(J + \frac{1}{2}\right)\omega T}{-\sin\left(\frac{1}{2}\omega T\right)} = \widehat{S}_T^J(\omega)$$

ou aussi

$$(15) \quad \widehat{S}_T^J(0) = (2J+1)$$

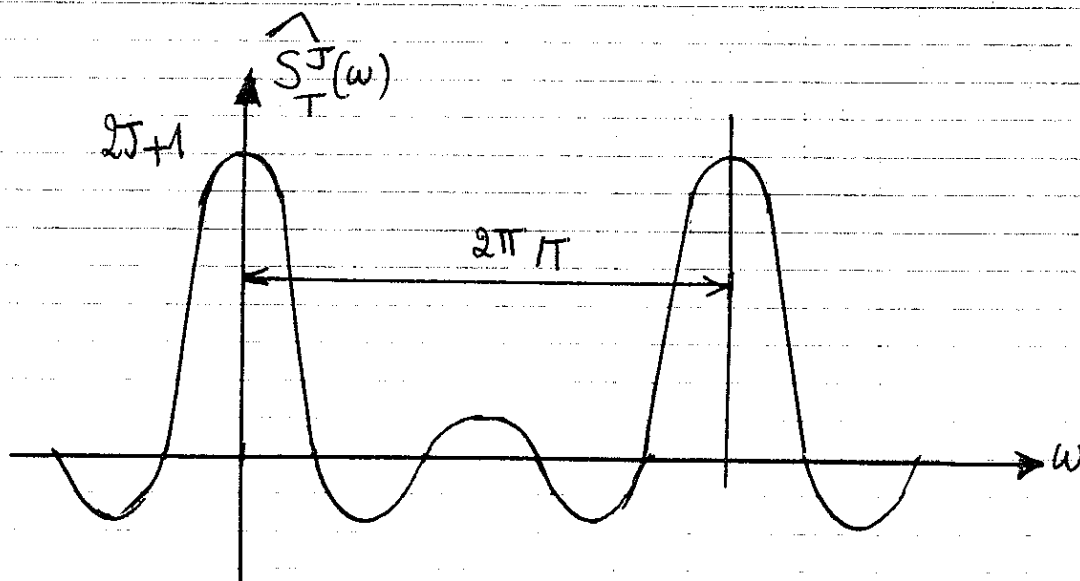
qui ne dépend pas de  $T$  (figure ci-dessous).

Calculons également l'intégrale de  $\widehat{S}_T^J$  sur une période, mais sans utiliser la relation (14) on a

$$\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \widehat{S}_T^J(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} dt \sum_{|j| \leq J} \delta(t - jT) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{-i\omega t} d\omega$$

et comme

$$(16) \quad \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{2}{t} \sin \frac{\pi t}{T} \equiv \frac{2\pi}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$



Transformée de Fourier du  
peigne de Dirac tronqué  $\sum_{|j| \leq J} \delta(t - nT)$



on en déduit.

$$\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \widehat{S_T^J}(\omega) d\omega = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right) \delta(t - jT)$$

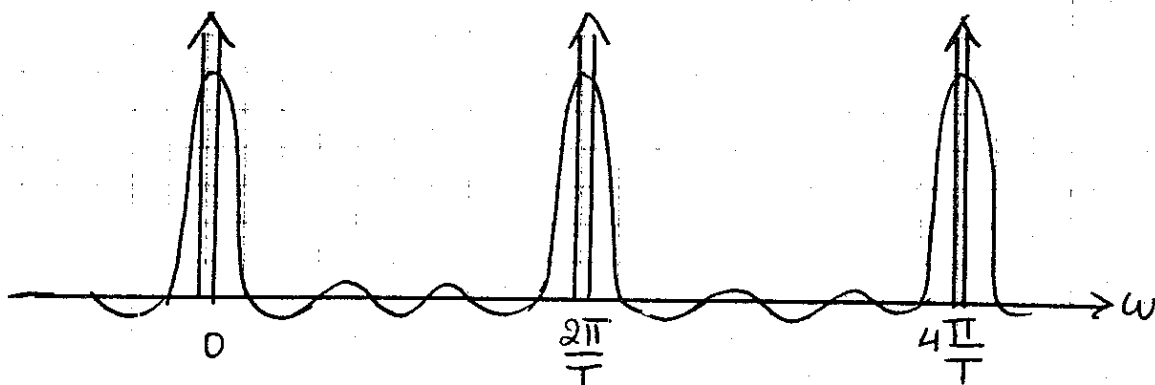
et le seul terme qui contribue est celui qui correspond à  $j=0$  ... on a donc

$$(17) \quad \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \widehat{S_T^J}(\omega) d\omega = \frac{2\pi}{T}$$

qui ne dépend pas de  $T$  lui non plus.

Lorsque  $T$  tend vers l'infini,  $\widehat{S_T^J}(\omega)$  est une fonction continue d'intégrale  $\frac{2\pi}{T}$  sur une période, qui tend vers l'infini en  $\omega = \frac{2\pi}{T} j$  et vers 0 partout ailleurs on a donc, illustré sur la figure ci-dessous :

$$(18) \quad \widehat{S_T^J}(\omega) \rightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T} k\right).$$



La limite pour  $T$  tendant vers l'infini de  $\widehat{S_T^J}(\omega)$  est un peigne de Dirac

ce qui établit la relation (3)

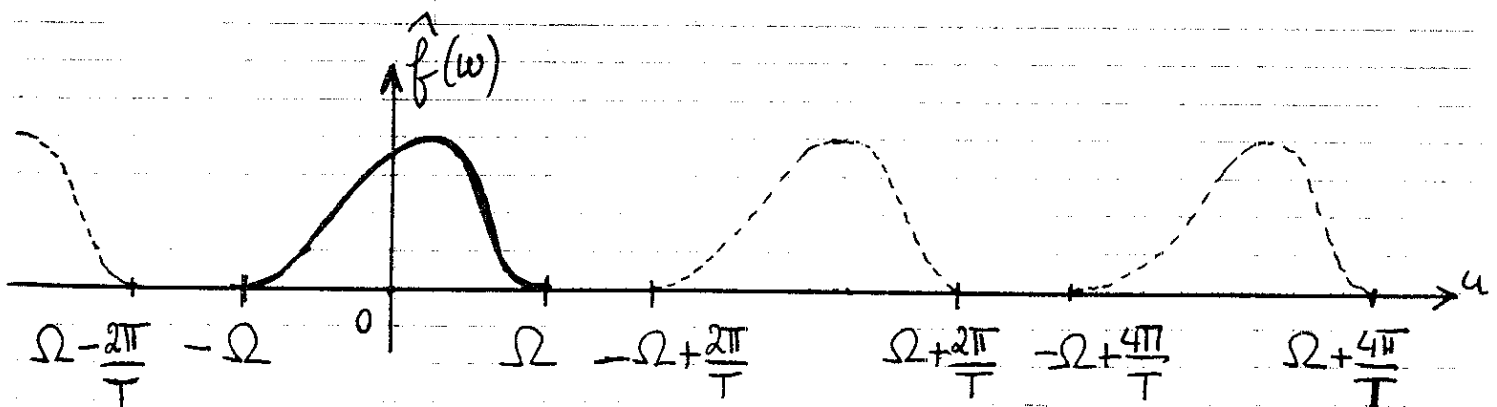
#### 4) Preuve du théorème de Shannon - Nyquist

On calcule dans un premier temps la transformée de Fourier de  $f_T$ . Compte tenu de (8), on a

$$\begin{aligned}\hat{f}_T(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - \xi) \hat{S}_T(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - \xi) \sum_{l \in \mathbb{Z}} \delta\left(\xi - \frac{2l\pi}{T}\right) d\xi\end{aligned}$$

$$(19) \quad \hat{f}_T(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\omega - \frac{2l\pi}{T}\right)$$

Le membre de droite de la relation (19) est une fonction périodique de période  $\frac{2\pi}{T}$  (quand on change  $\omega$  en  $\omega + \frac{2\pi}{T}$ , il suffit de changer le numéro de l'indice  $l$  et comme on fait une somme infinie sur  $\mathbb{Z}$ , cette dernière ne change pas). Pour  $l=0$ , on a la transformée de Fourier de  $f$ . On a



Périodisation de la transformée de Fourier de  $f$  ( $\Omega T \leq \pi$ )

donc rendu périodique la transformée de Fourier de  $f$ , qui était par hypothèse à support dans l'intervalle  $[-\Omega, \Omega]$ . Sous l'hypothèse (6) du critère de Nyquist, les supports de chaque fonction translatée

$$\omega \mapsto \hat{f}\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right)$$

sont disjoints. C'est clair par exemple pour le support de  $\hat{f}(\cdot)$  et celui de  $\hat{f}\left(\cdot - \frac{2\pi}{T}\right)$  qui valent respectivement  $[-\Omega, \Omega]$  et  $[-\Omega + \frac{2\pi}{T}, \Omega + \frac{2\pi}{T}]$ : la condition  $\Omega \leq -\Omega + \frac{2\pi}{T}$  est une simple réécriture du critère de Nyquist (6). La preuve suit par récurrence.

Si le critère de Nyquist est satisfait, il suffit de filtrer  $\hat{f}_T$  par un filtre "passe-bas" de paramètre  $\frac{\pi}{T}$  pour retrouver (à un coefficient  $T$  près) la transformée de Fourier  $\hat{f}$  initiale. On a donc

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \hat{f}_T(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{car } \Omega \leq \frac{\pi}{T}$$

$$(20) \quad f(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \hat{f}_T(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

car  $\hat{f}_T = \frac{1}{T} \hat{f}$  sur  $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$  si (6) est satisfait. On redéveloppe alors la relation (20) en écrivant la définition de la transformation de Fourier:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} dw \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_T(y) e^{-i\omega y} dy \right) e^{i\omega t} \\
 &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy f_T(y) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{i\omega(t-y)} dw \\
 &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy f_T(y) \frac{1}{i(t-y)} \left[ e^{i(t-y)\frac{\pi}{T}} - e^{-i(t-y)\frac{\pi}{T}} \right]
 \end{aligned}$$

$$(21) \quad f(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy f_T(y) \frac{2\pi}{T} \operatorname{sinc}\left((t-y)\frac{\pi}{T}\right).$$

on réinjecte l'expression (4) de la "fonction" échantillonnée  $f_T$  dans la relation (21). Il vient :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(jT) \delta(y - jT) \operatorname{sinc}\left((t-y)\frac{\pi}{T}\right)$$

$$(22) \quad f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(jT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - jT)\right)$$

et le résultat est démontré. La fonction sinus cardinal ( $\operatorname{sinc} \theta = \frac{\sin \theta}{\theta}$ ) permet d'interpoler entre les valeurs échantillonnées  $f(jT)$ . Pour  $t = nT$ , la somme du membre de droite de (22) ne comporte qu'un terme non nul pour  $j = n$  (car  $\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}nT - j\pi\right) = 0$  si  $j \neq n$ ) et on retrouve bien la relation "évidente"  $f(nT) = f(nT)$ . Pour  $t \neq nT$ , on remarque qu'aucun terme de la somme sur  $j \in \mathbb{Z}$  n'est nul a priori, ce qui indique que l'interpolation entre deux valeurs  $f(nT)$  et  $f((n+1)T)$  fait intervenir toutes les autres valeurs  $f(jT)$  pour  $j \in \mathbb{Z}$  !

## 5) aliasing

Dans le cas où le critère de Nyquist n'est pas vérifié la relation (19) qui périodise la transformée de Fourier de  $f$  ne permet plus de reconstruire  $f$  directement à partir de la donnée de  $\hat{f}_T$ . C'est l'erreur d'aliasing (voir la figure ci-dessous).

on peut faire complètement les calculs pour une fonction cosinus. Prenons

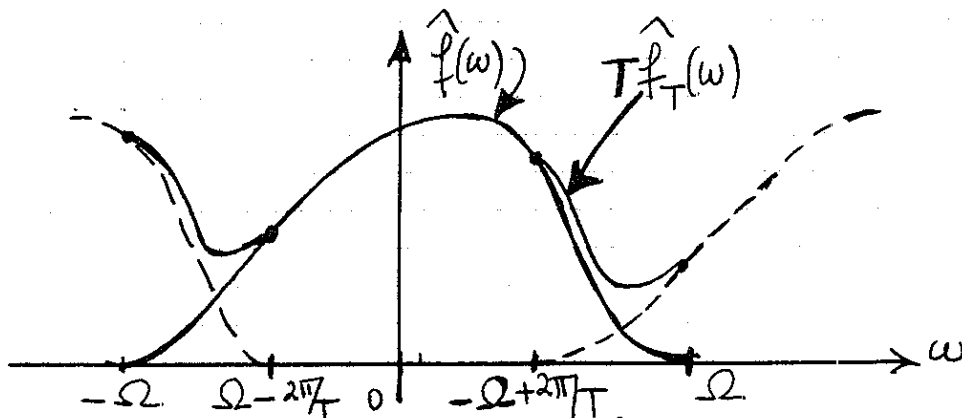
$$(23) \quad f(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$$

avec un échantillonnage  $T$  qui ne vérifie pas le critère de Nyquist, "mais pas trop":

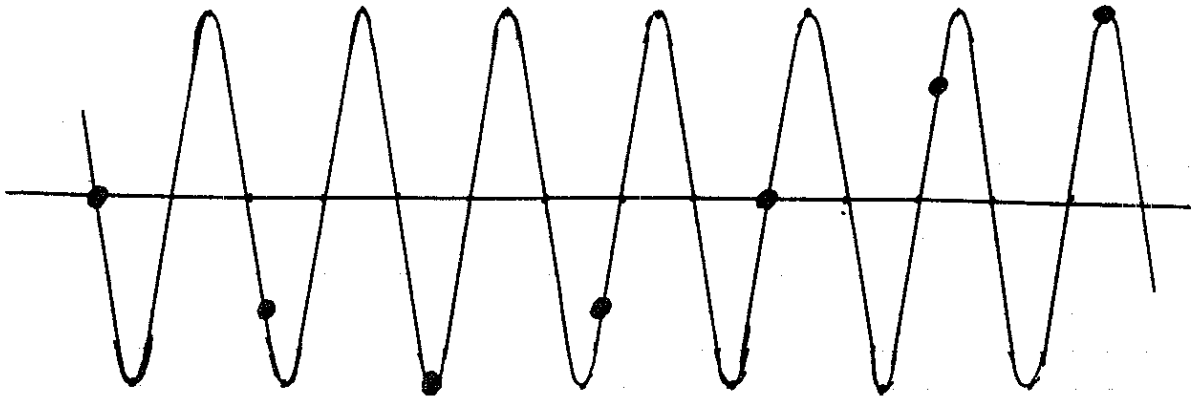
$$(24) \quad \frac{\pi}{T} < \omega_0 < \frac{2\pi}{T}$$

La transformée de Fourier de  $f$  s'écrit

$$(25) \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$



Périodisation de la transformée de Fourier de  $f$  dans le cas où le critère de Nyquist n'est pas vérifié ( $\Omega T > \pi$ )



Sous-échantillonnage d'une sinusoïde ( $\frac{\pi}{T} < \omega_0 < \frac{2\pi}{T}$ ).

et la transformée de Fourier de  $f_T$ , donnée par la relation (19), prend la forme :

$$(26) \quad \hat{f}_T(\omega) = \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \delta\left(\omega - \omega_0 - \frac{2n\pi}{T}\right) + \delta\left(\omega + \omega_0 - \frac{2n\pi}{T}\right) \right\}$$

Les contributions de  $\hat{f}_T(\omega)$  qui appartiennent à l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]$  sont donc  $\delta\left(\omega - \omega_0 + \frac{2\pi}{T}\right)$  et  $\delta\left(\omega + \omega_0 - \frac{2\pi}{T}\right)$ , quand on filtre  $f_T$  par un filtre passe-bas de fréquence  $\omega_c = \frac{\pi}{T}$ , on obtient donc

$$(27) \quad \hat{f}_T \hat{h}_{\frac{\pi}{T}} = \frac{1}{2T} \left[ \delta\left(\omega - \omega_0 + \frac{2\pi}{T}\right) + \delta\left(\omega + \omega_0 - \frac{2\pi}{T}\right) \right]$$

ce qui signifie que

$$(28) \quad f_T * h_{\frac{\pi}{T}} = \frac{1}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T} - \omega_0\right)t \neq f(t).$$

C'est l'exemple de la roue de voiture qui tourne à l'envers si on filme avec un nombre insuffisant d'images par seconde.