

le cnam

Traitement du Signal

Leçon 04

Traitement du signal discret

- Introduction
- Filtrage discret homogène
- Transformée en z
- Filtres récursifs

François Dubois

Paris, 1997

Traitement du signal discret

1) Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent qu'un signal continu (ou analogique), peut être représenté par un signal échantillonné (ou discret) à la période T sans distorsion si le support de sa transformée de Fourier est inclus dans un intervalle $[-\Omega, \Omega]$ et sous la condition de Nyquist $\Omega T \leq \pi$.

Le traitement du signal discret opère sur les nombres $f(kT)$ ($k \in \mathbb{Z}$) et son développement rapide depuis les années 1970 est dû d'une part au développement des microprocesseurs et par conséquent d'une informatique de plus en plus puissante et d'autre part à l'emploi d'algorithmes rapides (transformée de Fourier rapide) très précis et entièrement maîtrisés par l'ingénieur. En effet, même si le traitement analogique du signal reste beaucoup plus rapide car il est directement effectué par un processus physique, le traitement du signal discret, plus fiable car moins soumis aux bruits induits par l'environnement et aux erreurs de qualification, se répand dans de nombreuses applications comme l'enregistrement digital,

la télévision, le traitement de la parole ou le traitement des images.

2) Filtrage discret homogène

- Nous reprenons dans le cas du temps discret, ce qui a été vu pour le temps continu. Les intégrales sont remplacées par des sommes discrètes infinies (ce sont des séries convergentes) et la transformée en z joue pour les séries de Fourier un rôle identique à celui de la transformée de Laplace relativement à l'intégrale de Fourier.
- Un signal discret est une application de \mathbb{Z} à valeurs numériques réelles ou complexes :

$$(1) \quad f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}; \quad f = \{f_k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Nous avons choisi un pas d'échantillonnage $T=1$, mais les outils introduits dans ce qui suit sont bien entendu généraux.

On peut décomposer f sur la "base" des masses de Dirac discrètes. On introduit d'abord la masse de Dirac discrète en 0, notée δ

$$(2) \quad \delta: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}; \quad \delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

et sa translatée d'un entier $p \in \mathbb{Z}$, notée δ_p :

$$(3) \quad \delta_p(k) = \delta(k-p) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=p \\ 0 & \text{si } k \neq p \end{cases}$$

Le signal f s'écrit donc simplement comme combinaison linéaire infinie des δ_p :

$$(4) \quad f = \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_p \delta_p$$

En effet, si on regarde la valeur du membre de droite de (4) pour un entier $k \in \mathbb{Z}$ fixé, on trouve, compte tenu de (3), f_k alors que le membre de gauche donne $f(k)$, qui sont bien évidemment égaux, f_k ou $f(k)$ étant deux notations pour la valeur du signal f prise pour l'entier k .

- Un filtre est un opérateur linéaire qui à une fonction discrète $f = \{f(k), k \in \mathbb{Z}\}$, associe une nouvelle fonction discrète $Lf = \{(Lf)(k), k \in \mathbb{Z}\}$ on dit que le filtre L est homogène dans le temps si il commute avec l'opérateur T de translation dans le temps :

$$(5) \quad LT = TL$$

L'opérateur T est défini par son action sur f :

$$(6) \quad (Tf)(k) = f_{k-1}$$

Ainsi $T S_p = S_{p+1}$ et la relation (4) peut aussi s'écrire :

$$(7) \quad f = \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_p T^{-p} S$$

Par ailleurs, la relation (5) entraîne simplement, par itération et écriture des inverses :

$$(8) \quad L T^m = T^m L \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

Quand on applique L à la représentation (7), il vient, compte tenu de la relation (8).

$$(9) \quad L f = \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_p T^{-p} (L S)$$

- Il est donc naturelle d'introduire la réponse impulsionnelle d'un filtre homogène. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose

$$(10) \quad h(k) = (L S)(k)$$

et la relation (9) écrite pour l'entier $k \in \mathbb{Z}$, prend la forme

$$(11) \quad (L f)(k) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_p h(k-p) = (f * h)(k)$$

La réponse d'un filtre homogène est une convolution discrète par la réponse impulsionnelle h .

On a bien entendu défini le produit de convolution discret par la relation

$$(12) \quad (f * h)(k) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} f(p) h(k-p)$$

- Un filtre linéaire homogène est causal lorsque $(L_f)(k)$ ne dépend que des valeurs $f(m)$ pour m entier inférieur ou égal à k . Les valeurs de p de la forme $p = k + j$ (j entier > 0) sont donc à exclure de la représentation (11). Ceci n'est possible que si $h(-j)$ est nul.

$$(13) \quad \text{filtre } L \text{ causal} \Leftrightarrow h(k) = 0 \quad \forall k < 0$$

- Un filtre linéaire homogène est stable lorsque $(L_f)(k)$ est borné dès que les $f(j)$ forment une suite bornée. d'inégalité

$$(14) \quad |(L_f)(k)| \leq \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} |h(p)| \right) \sup_{j \in \mathbb{Z}} |f(j)|$$

montre que la condition

$$(15) \quad \sum_{p \in \mathbb{Z}} |h(p)| < \infty$$

est suffisante pour assurer que le filtre L est borné. Elle est aussi nécessaire. En effet, si la relation (15) en est défaut, soit f^J le signal défini par

$$(16) \quad f^J(k) = \begin{cases} \text{signe}(h(-k)) & \text{si } |k| \leq J \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout entier $J \geq 0$, f^J est un signal borné par 1, alors que l'on a:

$$\begin{aligned}
 (f^J * h)(0) &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_{-p}^J h_p \\
 &= \sum_{|p| \leq J} \text{sgn}(h_p) h_p
 \end{aligned}$$

$$(17) \quad (f^J * h)(0) = \sum_{|p| \leq J} |h_p|$$

Quand J tend vers $+\infty$, la somme dans le membre de droite de (17) tend vers $+\infty$, ce qui montre que la famille $(f^J * h)(k)$ ne peut être bornée indépendamment de J et de k , ce qui est le cas pour les $f^J(k)$ et par conséquent le filtre L n'est pas stable.

$$(18) \quad \text{filtre } L \text{ stable} \iff \sum_{p \in \mathbb{Z}} |h(p)| < \infty$$

• on introduit la famille e_ω des exponentielles complexes de pulsation ω :

$$(19) \quad e_\omega(k) = e^{i\omega k}$$

Ce sont des vecteurs propres de l'opérateur L :

$$\begin{aligned}
 (L e_\omega)(k) &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{i\omega(k-p)} h_p \\
 &= \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{-i\omega p} h_p \right) e^{i\omega k}
 \end{aligned}$$

$$(20) \quad (L e_\omega)(k) = \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{-i\omega p} h_p \right) (e_\omega(k))$$

et la valeur propre associée $\hat{h}(e^{i\omega})$ se lit sur la relation (20) :

$$(21) \quad \hat{h}(e^{i\omega}) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{-i\omega p} h_p.$$

• La relation (21) est une série de Fourier qui définit une fonction (périodique) sur le cercle unité du plan complexe

$$(22) \quad \hat{h}(z) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} z^{-p} h_p \quad z = e^{i\omega}$$

ou bien une fonction périodique de ω sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$

$$(23) \quad [-\pi, \pi] \ni \omega \mapsto \sum_{p \in \mathbb{Z}} h_p e^{-i\omega p} \in \mathbb{C},$$

Cette fonction est appelée fonction de transfert du filtre L .

• On introduit habituellement les coefficients de Fourier d'une fonction périodique $f(e^{i\omega})$ comme le produit scalaire de cette fonction par l'inverse de la puissance appropriée de l'exponentiel le on pose

$$(24) \quad e^k(\omega) = \exp(i\omega k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi.$$

Le produit scalaire (hermitien) de deux fonctions périodiques de période 2π est défini par

$$(25) \quad (f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(w) \overline{g(w)} dw$$

on a alors pour \hat{f} définie par $f = \hat{f}(e^{i\omega})$,

$$(26) \quad (\hat{f}(e^{i\cdot}), e^{-k(\cdot)}) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_p(e^{-p}, e^{-k}) = f_k$$

car la famille $e^{k\cdot}$ est orthogonale pour le produit scalaire (25):

$$(27) \quad (e^{k\cdot}, e^{l\cdot}) = \delta_{k,l} \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

• on a aussi une identité de Plancherel-Parseval qui fait le lien entre la norme $\ell^2(\mathbb{Z})$ de $f = \{f_k, k \in \mathbb{Z}\}$ et la norme $L^2(-\pi, \pi)$ de $\hat{f}(e^{i\cdot})$

$$(28) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}(e^{i\omega})|^2 d\omega$$

La preuve de la relation (28) est très simple; on part de la représentation de $\hat{f}(e^{i\cdot})$:

$$(29) \quad \hat{f}(e^{i\omega}) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_p e^{-i\omega p}$$

qui peut s'écrire aussi

$$(30) \quad \hat{f}(e^{i\cdot}) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_p e^{-p\cdot}$$

Quand on fait le produit scalaire de (30) par

elle-même, le membre de gauche redonne le membre de droite de (28), alors que les produits scalaires extradiagonaux (e^{-p}, e^{-k}) sont nuls donc le membre de droite fournit le membre de gauche de la relation (28).

• La relation

$$(31) \quad f(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(e^{i\omega}) e^{i\omega k} d\omega$$

est fondamentale pour voir l'effet du filtre ou a eu effet le résultat classique sur la convolution

Proposition Convolution discrète

soient f et h deux signaux discrets $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . La série de Fourier de $g = f * h$ est le produit des séries de Fourier de f et de h :

$$(32) \quad \widehat{(f * h)}(e^{i\omega}) = \hat{f}(e^{i\omega}) \hat{h}(e^{i\omega})$$

La preuve est analogue au cas continu. on a :

$$\begin{aligned} \widehat{f * h}(e^{i\omega}) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-ik\omega} \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_p h_{k-p} \\ &= \sum_{k, p \in \mathbb{Z}} f_p e^{-ip\omega} h_{k-p} e^{-i(k-p)\omega} \\ &= \sum_{p, l \in \mathbb{Z}} f_p e^{-ip\omega} h_l e^{-il\omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\sum_p \hat{f}_p e^{-ip\omega} \right) \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_\ell e^{-i\ell\omega} \right) \\
 &= \hat{f}(e^{i\omega}) \hat{h}(e^{i\omega})
 \end{aligned}$$

ce qui montre la propriété. ■

- Le filtrage de $f(k)$ revient donc à multiplier la transformée de Fourier par la fonction de transfert \hat{h} . Après application de l'opérateur L , la relation (31) devient

$$(33) \quad (Lf)(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{h}(e^{i\omega}) \hat{f}(e^{i\omega}) d\omega$$

- Nous donnons trois exemples de filtres linéaires homogènes. Tout d'abord la translation rétrograde dans le temps

$$(34) \quad T^{-1} f(k) = f(k-1)$$

qui est causale alors que la translation T définie à la relation (6) ne l'est pas.

Ensuite la moyenne sur $(2N+1)$ points :

$$(35) \quad (M_N f)(k) = \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^N f(k+j)$$

La réponse impulsionnelle de ce filtre vaut

$$(36) \quad h_N(k) = \begin{cases} \frac{1}{2N+1} & \text{si } |k| \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

11

et le calcul de la fonction de transfert est immédiat :

$$\widehat{h}_N(e^{i\omega}) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N e^{-ik\omega}$$

$$(37) \quad \widehat{h}_N(e^{i\omega}) = \frac{1}{2N+1} \frac{\sin(N+1/2)\omega}{\sin\omega/2}$$

- Le dernier exemple est celui du filtre passe-bas discret idéal, défini grâce à sa fonction de transfert \widehat{h}_0 :

$$(38) \quad \widehat{h}_0(e^{i\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

pour $\omega \in [-\pi, \pi]$. on a bien sûr

$$(39) \quad (L_{\omega_c} f)(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \widehat{f}(e^{i\omega}) d\omega$$

et la réponse impulsionnelle se calcule à l'aide de la relation (31). on a

$$(40) \quad h_0(k) = \frac{1}{k\pi} \sin(\omega_c k) \quad k \in \mathbb{Z}$$

et la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas discret est simplement (comparer avec la relation (9) du chapitre 2) la valeur échantillonnée aux valeurs entières de la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas continu.

Comme dans le cas continu, le filtre passe-bas n'est ni causal, ni stable.

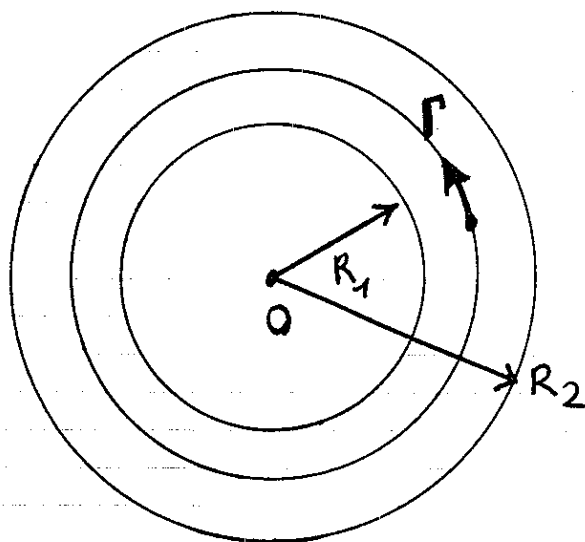
3) Transformée en z

- La série de Fourier associée à un signal discret $\{f_k, k \in \mathbb{Z}\}$ est défini à la relation (29) et la formule réciproque qui permet de recalculer les valeurs discrètes f_k à partir de la représentation de Fourier $\hat{f}(e^{i\omega})$ a été donnée à la relation (31). La transformée en z, déjà introduite en (22), consiste à remarquer que le second membre de la relation (29) a un sens pour z appartenant au plan complexe. On pose donc

$$(41) \quad \hat{f}(z) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_p z^{-p} \quad z \in \mathbb{C}$$

qui pour z sur le cercle unité ($z = e^{i\omega}, \omega \in \mathbb{R}$), redonne la définition (29).

- Le second membre de la relation (41) est une série de Laurent, qui contient des termes polynomiaux de type "série entière" de la forme z^k pour $p = -k \in -\mathbb{N}$ et des termes "polynomiaux en $\frac{1}{z}$ " de la forme $(\frac{1}{z})^k$ pour $p = k \in \mathbb{N}$. Le problème crucial est celui de la détermination de la convergence de la série (41).



Anneau de convergence d'une série de Laurent.

La convergence des séries entières $a(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ s'effectue sur des disques $D(0, R)$ avec éventuellement $R = +\infty$ (pour la fonction exponentielle par exemple, où $a_k = \frac{1}{k!}$), ou $R = 1$ (pour $a(z) = (1-z)^{-1}$ où $a_k = 1 \forall k \geq 0$) ou même $R = 0$ (dans le cas $a_k = k!$ pour $k \geq 0$, la série $\sum_k a_k z^k$ doit être vue formellement et ne définit pas a priori une fonction de la variable complexe z). De façon analogue, une série entière en $\frac{1}{z}$ peut être convergente sur un disque $D(0, \frac{1}{R_1})$, c'est à dire pour $|z| > R_1$, ce qui permet d'éviter l'origine où $\frac{1}{z}$ est singulière. Le résultat important concerne le cas où l'on dispose d'une convergence pour $\sum_{k \geq 0} f_{-k} z^k$ ($|z| \leq R_2$) et pour $\sum_{k \geq 0} f_k z^{-k}$ ($|z| \geq R_1$) puisque l'intégrale de Cauchy

permet de calculer le terme f_1 dans la série de Laurent (41).

Théorème Intégrale de Cauchy

Soit $0 < R_1 < R_2$ et $\hat{f}(z)$ donnée par la série de Laurent (41) et convergente pour $R_1 < |z| < R_2$.

Soit Γ un lacet contenu dans ce disque de convergence et "tournant une fois autour de l'origine" (Γ est par exemple le cercle d'é-

quation $z = R \exp i\theta$, $R_1 < R < R_2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$).

on a:

$$(42) \quad f_1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \hat{f}(z) dz.$$

- L'intégrale de contour met en évidence le coefficient de $1/z$ dans la série de Laurent. La preuve du théorème précédent se conduit ainsi: pour $k \neq -1$, la fonction

$$(43) \quad F(z) = \sum_{k \neq -1} \frac{1}{k+1} f_{-k} z^{k+1}$$

a même domaine de convergence que \hat{f} et on a:

$$(44) \quad dF(z) = \hat{f}(z) dz - b_1 \frac{dz}{z}.$$

Donc quand on intègre $\hat{f}(z) dz$ sur le contour Γ , tous les termes en z^k s'intègrent exactement pour $k \neq -1$ et redonnent zéro car Γ est un contour fermé ($\int_{\Gamma} dF(z) = 0$).

• L'intégrale complémentaire $\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^n}$ ne dépend pas du choix du contour Γ qui tourne une "fois" autour de l'origine. Dans le cas où Γ est le cercle de centre 0 et de rayon R, paramétré par

$$(45) \quad z = R e^{i\theta} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

on a $\frac{dz}{z} = i d\theta$ et par conséquent.

$$(46) \quad \int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 2i\pi.$$

La relation (42) résulte alors de (44) et (46). ■

• Le théorème précédent se généralise sans difficulté au calcul de tous les coefficients b_k . Il suffit de multiplier la série (41) par le monôme en z convenable (z^{k-1}) pour faire apparaître b_k multiplié par $1/z$.

Proposition Inversion de la transformée en z

on suppose que la série de Laurent (41) est convergente pour $R_1 < |z| < R_2$ et que Γ est un lacet tournant une fois autour de l'origine dans l'anneau de convergence précédent.
 on a :

$$(47) \quad b_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \hat{f}(z) z^{k-1} dz.$$

- Il est important de lier stabilité, causalité et domaine de convergence. On a la

Proposition Transformée en z d'un filtre stable et causal
 d'un anneau de convergence de la transformée
 en z d'un filtre stable et causal et de la
 forme $R_1 < |z|$ avec $R_1 \leq 1$ et $R_2 = \infty$.
 En particulier, les pôles sont strictement
inclus dans le cercle unité.

- Un filtre causal $f \mapsto h * f$ vérifie $h_k = 0$
 si $k \leq -1$, donc la transformée en z est
 une série entière en $1/z$:

$$(48) \quad \hat{h}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

on étudie ensuite, pour connaître l'anneau de
 convergence, la série de terme général
 $a_k = |h_k| \left(\frac{1}{R}\right)^k$. Comme le filtre est stable,
 on a

$$(49) \quad \sum_{k \geq 0} |h_k| < \infty$$

donc $\sum_{k \geq 0} a_k < \infty$ dès que $R \geq 1$, ce qui affirme
 le premier point de la proposition.

- La série de Laurent (48) définit donc un nombre réel (elle est absolument convergente) pour $|z| \geq 1$. Donc ses pôles (où elle est singulière) vérifient nécessairement $|z| < 1$, ce qui montre la seconde assertion de la proposition. ■
- Nous retenons que l'anneau de convergence d'un filtre causal et stable contient le cercle unité, lieu de définition de la série de Fourier, et s'étend jusqu'à l'infini du module de la variable complexe z . Par contre une même fonction de z peut donner naissance à plusieurs séries de Laurent, elles-mêmes associées à plusieurs filtres, comme le montre l'exemple qui suit.
- Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. on pose

$$(50) \quad \hat{h}(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}}$$
 Lorsque $|z| > a$, alors $a/|z| < 1$ et on a clairement

$$(51) \quad \hat{h}(z) = \sum_{k \geq 0} a^k z^{-k}.$$
 on y reconnaît la fonction de transfert du filtre de réponse impulsionnelle

$$(52) \quad h_k = a^k H(k)$$
 ($H(\cdot)$ fonction de Heaviside), filtre causal,

stable pour $a < 1$. Mais à partir de la même fonction de transfert (50), on peut fabriquer une série convergente pour $|z| < a$. on a aussi

$$(53) \quad \hat{h}(z) = - \frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = - \sum_{m \leq -1} a^m z^{-m}$$

qui est la fonction de transfert d'un filtre anti-causal qui de plus, n'est pas stable.

- Le filtre $h_k = \delta(k-p)$ est causal pour $p \geq 0$, stable car il ne comporte qu'un seul terme. La fonction de transfert associée,

$$(54) \quad \hat{h}(z) = z^{-p} \quad p \text{ entier } \geq 0$$

a pour domaine de convergence l'anneau $0 < |z| < \infty$. on retrouve bien sur cet exemple la propriété générale: les pôles d'un filtre causal et stable sont de module strictement inférieur à un.

- En pratique, un filtre discret $f * h$ est implémentable si le nombre d'opérations nécessaires pour le calculer est fini. C'est le cas en particulier pour le filtre (54) ou l'opérateur de moyenne (35) (filtre de réponse impulsionnelle finie) mais également pour des filtres de réponse impulsionnelle infinie dont la sommation de la série (48) peut être effectuée exactement.

4) Filtres récursifs.

- Un filtre récursif est défini par une relation de récurrence linéaire entre les données d'entrée $\{f_j, j \in \mathbb{Z}\}$ et les données de sortie $g = Lf$ $\{g_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Il existe deux entiers M et N , des coefficients a_k ($0 \leq k \leq N$) réels avec $a_0 \neq 0$, $a_N \neq 0$, et des b_j ($0 \leq j \leq M$) de sorte que

$$(55) \quad \sum_{k=0}^N a_k g(m-k) = \sum_{j=0}^M b_j f(m-j)$$

- La relation précédente peut être lue "vers l'avant", c'est à dire dans le sens croissant de variation des indices :

$$(56) \quad g(m) = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{j=0}^M b_j f(m-j) - \sum_{k=1}^N a_k g(m-k) \right]$$

ou "vers l'arrière", dans le sens des indices décroissants :

$$(57) \quad g(m) = \frac{1}{a_N} \left[\sum_{j=0}^M b_j f(m+N-j) - \sum_{k=1}^N a_{N-k} g(m+k) \right]$$

- Pour un filtre à réponse impulsionnelle finie, $N=0$ et pour un filtre purement récursif, ou autorégressif, $M=0$. La relation de récurrence (56) pose le problème des conditions initiales.
Le plus simple consiste à supposer que le signal

d'entrée $(f_k, k \in \mathbb{Z})$ est causal ($f_k = 0$ si $k \leq -1$)
 et que g_k est lui aussi un signal causal,
 c'est à dire en particulier

$$(58) \quad g(-1) = g(-2) = \dots = g(-N) = 0$$

La relation (56) définit alors la sortie $g(n)$ pour tout
 n entier ≥ 0 . On peut regarder l'effet de ce filtre,
 homogène, causal et linéaire et s'appliquant
 sur les signaux causaux à l'aide de la trans-
formée en z unilatérale de f

$$(59) \quad \hat{f}^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}$$

• Pour $p \geq 0$, si on note $f_p(k) = f_{k-p}$, on a alors

$$(60) \quad \hat{f}_p^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k-p} z^{-k} = \sum_{l=0}^{\infty} f_l z^{-(l+p)} = z^{-p} \hat{f}^+(z)$$

La relation (55) peut ensuite se réécrire sous la
 forme :

$$(61) \quad \sum_{k=0}^N a_k g_k(n) = \sum_{j=0}^M b_j f_j(n) \quad \forall n \geq 0$$

et en appliquant la relation (60) aux deux
 membres de (61) on trouve

$$(62) \quad \hat{g}^+(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \hat{f}^+(z)$$

ce qui montre que le filtre obtenu a pour fonc.
 tion de transfert une fraction rationnelle.

$$(63) \quad \hat{h}(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

• On peut décomposer $\hat{h}(z)$ en éléments simples pour calculer la réponse impulsionnelle h_k . Nous effectuons ici le calcul dans l'hypothèse où la fraction (63) n'a que des pôles simples. On a :

$$(64) \quad \hat{h}(z) = \sum_{r=0}^{M-N} b_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{1 - d_k z^{-1}}$$

et comme dans le contexte considéré, h est un filtre causal, les relations (51) et (54) montrent que

$$(65) \quad h(k) = \sum_{r=0}^{M-N} b_r \delta(k-r) + \sum_{k=1}^N a_k (d_k)^n H(n)$$

On constate donc qu'un filtre récursif (qui ne demande qu'un nombre fini de multiplications et d'additions pour calculer la sortie $g(\cdot)$ en fonction de l'entrée $f(\cdot)$, voir (56)) est à réponse impulsionnelle infinie.

• Le filtre (63)(64) est causal compte tenu de (65) (on l'avait cherché sous cette forme a priori!) et est stable si ses pôles sont strictement dans l'intérieur du cercle unité dans le plan complexe,

$$(66) \quad h(\cdot) \text{ stable} \iff \forall k = 1, \dots, N, |d_k| < 1.$$