le cnam

Traitement du Signal

Leçon 05

Transformation de Fourier rapide

- Extrapolations d'un signal fini
- Transformée de Fourier discrète
- Calcul récursif de la transformée de Fourier discrète

François Dubois

Paris, 1997

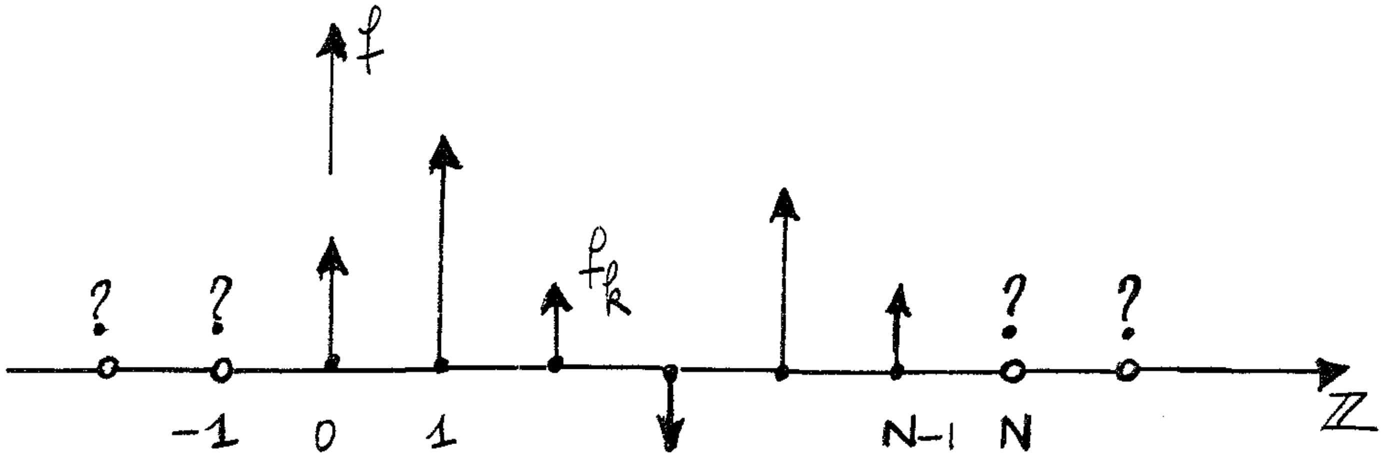
Cours (5)

Transformation de Fourier rapide

Nous avons vu qu'un signal analogique est bien modélisé par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ où le continuum $\mathbb{R}$ est un bon modèle pour le temps. Avec l'échantillonnage, ce sont des fonctions à valeurs complexes définies pour une variable discrète qui modélise le temps, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ qui constituent le bon modèle mathématique pour un signal. Dans la pratique, on ne dispose jamais d'une infinité de valeurs non-nulles et les signaux sont des fonctions de $\mathbb{N}_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ à valeurs complexes, ie des signaux finis.

1) Extrapolations d'un signal fini

Il est naturel de vouloir utiliser les outils développés pour le traitement de signaux discrets $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$



Extrapolation d'un signal fini

dans le cadre de l'étude des signaux discrets puisque $\mathbb{N}_N$ est une partie de l'anneau des entiers. Il convient donc, partant d'un signal fini f

$$(1) \qquad \mathbb{N}_N \ni k \mapsto f_k \in \mathbb{C} ,$$

de chercher un nouveau signal $\tilde{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ qui prolonge le signal fini f, c'est à dire tel que

$$(2) \qquad \tilde{f}_k = f_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}_N$$

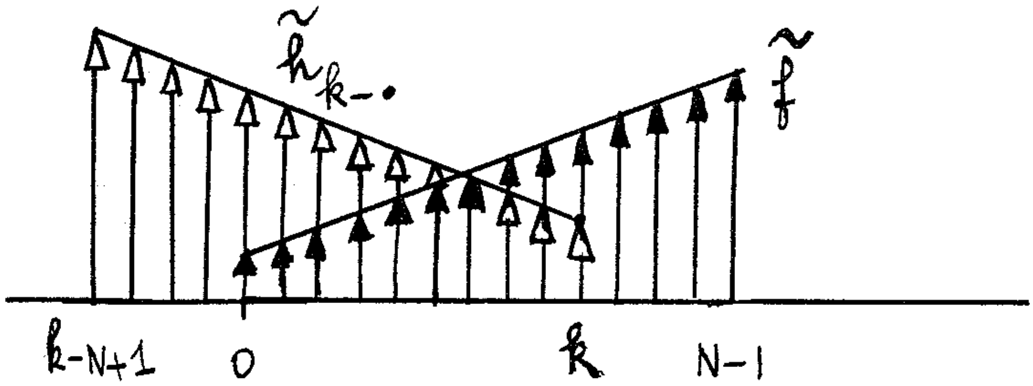
Une première possibilité est le prolongement par zéro de f, hors des entiers $0, 1, \ldots, N-1$:

$$(3) \qquad \tilde{f}^0_k = \begin{cases} f_k & \text{si } k \in \mathbb{N}_N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on obtient de cette façon un signal discret $\tilde{f}^0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ qui extrapole f à tout nombre entier k.

Lorsqu'on traite $\tilde{f}^0$ par un filtre linéaire homogène, associé à un signal fini h, on observe la propriété suivante

<u>proposition</u> Si f et h sont deux signaux finis définis sur $\mathbb{N}_N$, alors le filtre $\tilde{h}^0 * \tilde{f}^0$ définit un signal fini, non nul sur $\mathbb{N}_{2N-1}$.



Produit de convolution de deux signaux finis

- La preuve de cette proposition est simple. On a :

$$(4) \qquad (\tilde{h}^o * \tilde{f}^o)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \tilde{h}^o_{k-m} \tilde{f}^o_m$$

Il s'agit de déterminer pour quelles valeurs la somme ci-dessus est nulle a priori. ~~Le~~ terme $\tilde{h}^o_{k-m}$ est nul si $k-m<0$ ou $k-m \geqslant N$ et de même, le terme $\tilde{f}^o_m$ est nul pour $m<0$ ou $m \geqslant N$

- Si $k<0$, alors $k-m$ est strictement négatif pour tout m entre 0 et $N-1$, donc le produit par $\tilde{f}$ correspondant est nul également. Si $k \geqslant 2N-1$, alors $k-(N-1)$ est supérieur ou égal à N et il en est donc de même pour $k-(N-2), \dots, k-1$, k et les produits de la somme (4) pour cet indice k sont tous nuls. Si $0 \leqslant k \leqslant 2N-2$, il y a des termes non nuls dans la somme (4) qui se réduit à

$$(5) \qquad (\tilde{h}^o * \tilde{f}^o)_k = \sum_{m=0}^{k} h_{k-m} f_m \ . \qquad \blacksquare$$

• On note que dans la relation (5), seules $(k+1)$ valeurs sont a priori utilisées, et si $k \geq N-1$, cette somme débute en fait à l'indice $m = k+1-N$, donc comporte au plus N termes non nuls. Une autre façon d'étendre le signal fini f à $\mathbb{Z}$ tout entier est de faire une hypothèse de périodicité. On pose

$$(6) \qquad \tilde f_k = f_q \qquad k = Np+q,\ 0 \leq q \leq N-1$$

et il est clair que le signal obtenu est périodique de période N :

$$(7) \qquad \tilde f_{k+N} = \tilde f_k \qquad \forall k \in \mathbb{Z},$$

donc par récurrence

$$(8) \qquad \tilde f_{k+mN} = \tilde f_k \qquad \forall k, m \in \mathbb{Z}$$

Pour k entier fixé, le produit $\tilde f_p \, \tilde h_{k-p}$ est une fonction périodique de p de période N donc une somme sur tous les entiers $p \in \mathbb{Z}$ est en général non définie. On fait donc simplement une somme partielle et on introduit de ce fait la convolution $\underbrace{\text{circulaire des}}_{\tilde f \circledast \tilde h}$ signaux périodiques $\tilde f$ et $\tilde h$. On pose :

$$(9) \qquad (\tilde f \circledast \tilde h)(k) = \sum_{p=0}^{N-1} \tilde f_p \, \tilde h_{k-p}$$

2) Transformée de Fourier discrète

- Comme pour les fonctions définies sur le continuum $\mathbb{R}$ ou l'ensemble discret $\mathbb{Z}$, les exponentielles complexes forment un ensemble de vecteurs propres pour l'opérateur de convolution et la valeur propre correspondante définit la transformation de Fourier, qualifiée ici de discrète. On pose

(10) $$e_k = \left(\exp\left(2i\frac{k\pi}{N}m\right)\right)_{0 \leq m \leq N-1}$$

qui est aussi un signal périodique sur $\mathbb{Z}$ de période de N et définit une nouvelle base des signaux périodiques. On a, avec $Lf = \tilde{f} \circledast \tilde{h}$

$$(Le_k)(m) = \sum_{p=0}^{N-1} \tilde{h}_p \, e_k(m-p)$$

$$= \sum_{p=0}^{N-1} h_p \, e^{-\frac{2ikp\pi}{N}} \, e^{\frac{2ikm\pi}{N}}$$

(11) $$(Le_k)(m) = \left(\sum_{p=0}^{N-1} h_p \, e^{-\frac{2ikp\pi}{N}}\right) e_k(m)$$

et par définition, la valeur propre de la relation (11) définit la transformée de Fourier discrète :

(12) $$\hat{f}_k = \sum_{p=0}^{N-1} f_p \cdot \exp\left(-\frac{2ikp\pi}{N}\right)$$

- On peut aussi raisonner autrement et essayer de calculer la transformée de Fourier de $\tilde{f}$ définie en (6), à l'aide de la série de Fourier vue au chapitre précédent :

$$(13) \qquad \hat{\tilde{f}}(e^{i\omega}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{f}_k \, e^{-i\omega k} .$$

Comme les $\tilde{f}_k$ sont périodiques de période N, il est naturel d'utiliser cette remarque pour évaluer le membre de droite de la relation (13). Il vient

$$(14) \qquad \hat{\tilde{f}}(e^{i\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \sum_{p\in\mathbb{Z}} e^{-i\omega(k+pN)} .$$

La somme sur $p\in\mathbb{Z}$ diverge pour ωN multiple entier de 2π et est nulle sinon. Précisons ce résultat :

<u>Proposition</u> Formule sommatoire de Poisson

$$(15) \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-inT\omega} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right)$$

- Nous avons vu lors de l'étude du critère de Nyquist que la transformée de Fourier du peigne de Dirac de période T : $S_T(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\theta - nT)$ est égale à $\frac{2\pi}{T}$ multiplié par le peigne de Dirac de période $\frac{2\pi}{T}$: $\frac{2\pi}{T} S_{\frac{2\pi}{T}}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right)$
- Explicitons la "valeur" de la transformée de Fourier de S_T :

$$\hat{S}_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \; S_T(\theta) \; e^{-i\omega\theta}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\theta - nT)\, e^{-i\omega\theta}$$

$$\hat{S}_T(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-i\omega nT}$$

et nous retrouvons le membre de gauche de la relation (15). La proposition découle donc de la remarque précédente. ■

Nous déduisons donc de la relation (15), en prenant $T = N$,

$$\hat{\tilde{f}}(e^{i\omega}) = \frac{2\pi}{N}\Big(\sum_{k=0}^{N-1} f_k\, e^{-i\omega k}\Big) \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta\big(\omega - \frac{2j\pi}{N}\big)$$

c'est à dire avec $j = k + mN$,

$$(16) \quad \hat{\tilde{f}}(e^{i\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta\big(\omega - \frac{2k\pi}{N} - 2m\pi\big).$$

- La transformée de Fourier de la suite périodique $\tilde{f}$ est composée d'une somme de N peignes de Dirac espacés de $2\pi/N$; le coefficient du peigne placé en $2k\pi/N$ est $\frac{2\pi}{N}\hat{f}_k$ et seuls les coefficients $\hat{f}_k$ de la transformée de Fourier discrète sont utiles.

- Dans l'espace des signaux finis, il est naturel de définir le produit scalaire hermitien par la relation

$$(17) \qquad (f, g) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \overline{g_k} .$$

<u>Proposition</u> Suite orthogonale des exponentielles.

La suite $(e_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ définie à la relation (10) forme une base orthogonale de l'espace des signaux finis de longueur N (applications $\mathbb{N}_N \to \mathbb{C}$)

- D'une part, l'espace des applications $\mathbb{N}_N \to \mathbb{C}$ est clairement de dimension N, car engendré par la famille des δ_k avec $0 \leq k \leq N-1$.
- D'autre part, on vérifie que la famille des e_k est formée de vecteurs deux à deux orthogonaux :

$$(18) \qquad (e_k, e_l) = N \ \delta_{k,l} \qquad 0 \leq k, l \leq N-1$$

donc elle engendre un sous espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_N}$ de dimension N, ce qui finit d'établir le résultat. ∎

• Compte tenu de (10), (12) et (17), on a

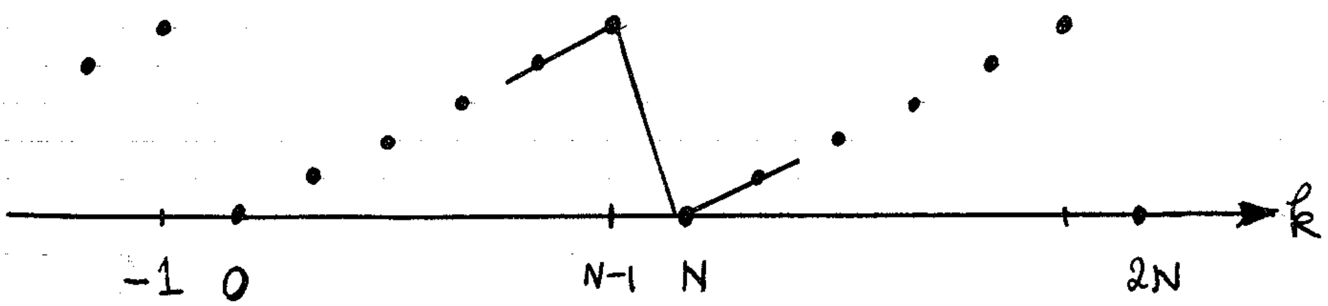
(19) $\hat{f}_k = (f, e_k) \qquad 0 \le k \le N-1$

dont on tire :

$$f = \sum_{k=0}^{N-1} (f, e_k) \frac{e_k}{\|e_k\|^2} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k e_k$$

(20) $$f_p = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k \, e^{\frac{2ikp\pi}{N}}$$

• On retiendra que la périodicisation de f_k en $\tilde{f}_k$, si elle a de nombreux avantages, fait succéder f_0 à f_{N-1} qui n'ont aucune raison d'être voisins, même si f_k est la restriction aux nombres entiers d'une fonction qui varie "peu" à chaque incrément. La transition "brutale" de f_{N-1} à f_N s'effectue sur un point de discrétisation, c'est à dire à "haute fréquence" et la transformée de Fourier $\hat{f}$ en porte la trace (phénomène de Gibbs).



Effet de bord lors de la construction d'une extrapolation périodique des données.

- Notons enfin l'identité de Parseval pour la transformation de Fourier discrète

$$(21) \qquad \sum_{k=0}^{N-1} f_k \, \overline{g_k} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}_j \, \overline{\hat{g}_j}$$

qui exprime qu'à un facteur multiplicatif près, la transformation de Fourier discrète conserve le produit scalaire.

La relation (21) est conséquence directe de la représentation (20) et de l'orthogonalité (18) des exponentielles complexes.

3) Calcul récursif de la transformée de Fourier discrète

- On se place dans le cas particulier où N est une puissance de deux:

$$(22) \qquad N = 2^{\ell}$$

Si l'on n'y prend pas garde, le calcul de la transformée de Fourier (12) demande $(N-1)$ multiplications et N additions pour chaque valeur de l'entier k, soit un total de $N(N-1)$ multiplications et N^2 additions, ce qui est un calcul coûteux.

Avec l'approche récursive développée ci-dessous, le calcul de (12) demande de l'ordre de $\ell N = N \log_2 N$ opérations ; on parle alors de <u>transformée</u>

de Fourier rapide (Fast Fourier Transform ou FFT en anglais)

- On reprend le calcul (12) en séparant les valeurs paires ($p = 2m$) et impaires ($p = 2m+1$) de la variable d'intégration. Il vient

$$\hat{f}_k = \sum_{p=0}^{N-1} f_p \exp\left(-2i \frac{kp\pi}{N}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} \exp\left(-2ik\frac{2m\pi}{N}\right)$$

$$+ \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} \exp\left(-2ik\frac{(2m+1)\pi}{N}\right)$$

$$(23) \quad \hat{f}_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} \exp\left(-\frac{2ikm\pi}{N/2}\right) + \exp\left(-2i\frac{k\pi}{N}\right)\sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} \exp\left(-\frac{2ikm\pi}{N/2}\right)$$

Les deux sommes au membre de droite de (23) sont à nouveau des transformées de Fourier, mais pour un signal de longueur moitié, obtenu en prenant respectivement les valeurs paires et les valeurs impaires des indices. Si ces deux transformées de Fourier sont connues, une multiplication par le facteur de phase $\exp(-2ik\pi/N)$ suivie d'une addition permet d'évaluer $\hat{f}_k$. Mais le calcul qui suit montre qu'en fait on a beaucoup mieux. Prenons k entre 0 et $\frac{N}{2}-1$ et calculons $\hat{f}_{k+N/2}$ avec la méthode précédente.

$$\hat{f}_{k+\frac{N}{2}} = \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} \exp\left\{-\frac{2imπ}{N/2}\left(k+\frac{N}{2}\right)\right\}$$
$$+ \exp\left(-2i\frac{\pi}{N}\left(k+\frac{N}{2}\right)\right) \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} \exp\left\{-\frac{2im\pi}{N/2}\left(k+\frac{N}{2}\right)\right.$$

$$(24) \quad \hat{f}_{k+\frac{N}{2}} = \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} \exp\left(-\frac{2ikm\pi}{N/2}\right) - \exp\left(-\frac{2ik\pi}{N}\right) \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} \exp\left(-\frac{2ikm\pi}{N}\right.$$

La relation (24) est l'exacte analogue de la relation (23) à ceci près que l'addition finale a été remplacée par une soustraction. En particulier, le <u>même</u> facteur de forme est multiplié par la transformée de Fourier de longueur $N/2$ pour les indices impairs.

Pour le calcul des deux termes $\hat{f}_k$ et $\hat{f}_{k+N/2}$, seule une multiplication et deux additions sont nécessaires, une fois les transformée de Fourier d'indice moitié calculées.

- Dans le cas de deux éléments seulement ($\ell=0$), on a :

$$(25) \quad \begin{cases} \hat{f}_0 = f_0 + f_1 \\ \hat{f}_1 = f_0 - f_1 \end{cases}$$

calcul qui demande 0 multiplication et deux additions. Nous pouvons expliciter le décompte de multiplications et d'additions nécessaires pour calculer une transformée de Fourier discrète comportant $N=2^\ell$ éléments.

Proposition Décompte des opérations.

Soient $A(\ell)$ et $M(\ell)$ le nombre d'additions et de multiplications nécessaires pour calculer l'ensemble des coefficients de Fourier de la relation (12) lorsque N est une puissance de deux $N = 2^{\ell}$. On a

(26) $$A(\ell) = \ell\, 2^{\ell}$$

(27) $$M(\ell) = (\ell-1)\, 2^{\ell-1}$$

- Les relations (23) et (24) montrent qu'on a les relations de récurrence suivantes :

(28) $$A(j+1) = 2A(j) + 2^{j+1}$$

(29) $$M(j+1) = 2M(j) + 2^{j}.$$

On multiplie chacune de ces relations par 2 puissance $\ell-(j+1)$ et on somme pour toutes les valeurs de j allant de 1 à $(\ell-1)$. Il vient

$A(\ell) = 2^{\ell-1}A(1) + (\ell-1)2^{\ell}$ et $M(\ell) = 2^{\ell-1}M(1) + (\ell-1)2^{\ell-1}$

- Le résultat résulte du calcul précédent et de la relation (25) qui montre que $A(1) = 2$, $M(1) = 0$. ∎

- Nous pouvons calculer les transformées de Fourier de signaux de longueur 4, 8, … Notons d'abord

(30) $$f^{\ell} = f_p^{\ell-1} + f_i^{\ell-1}$$

la décomposition d'un signal de longueur 2^{ℓ} en deux signaux de longueur $2^{\ell-1}$ obtenus par regroupement des indices pairs et impairs respectivement. Notons également

(31) $$\omega_{\ell} = \exp\left(-i\frac{\pi}{2^{\ell}}\right)$$

une racine primitive 2^{ℓ} ième de l'unité et les rel

(32) $$F(\ell, f^{\ell}, k) = \sum_{p=0}^{2^{\ell}} f_p \exp - \frac{2ikp\pi}{2^{\ell}}$$

la transformée de Fourier discrète du signal f, de longueur 2^{ℓ}, pour l'indice k. Les relations (23) et (24) prennent alors la forme

(33) $$F(\ell, f^{\ell}, k) = F(\ell-1, f_p^{\ell-1}, k) + (\omega_{\ell-1})^k F(\ell-1, f_i^{\ell-1}, k)$$

(34) $$F(\ell, f^{\ell}, k+2^{\ell-1}) = F(\ell-1, f_p^{\ell-1}, k) - (\omega_{\ell-1})^k F(\ell-1, f_i^{\ell-1}, k)$$

- Dans le cas où $N = 2^2 = 4$, $\omega_1 = -1$, on regroupe la suite $f^2 = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ en indices pairs $f_p^1 = (f_0, f_2)$ et impairs $f_i^1 = (f_1, f_3)$. Compte tenu de (25), on a :

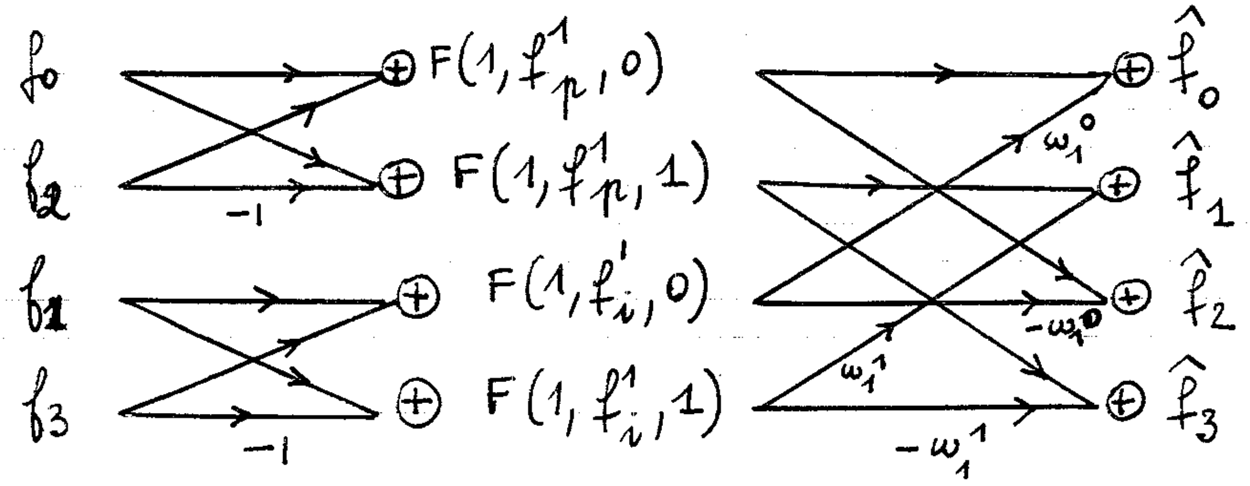
$$\begin{cases} F(1, f_p^1, 0) = f_0 + f_2 \\ F(1, f_p^1, 1) = f_0 - f_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(1, f_i^1, 0) = f_1 + f_3 \\ F(1, f_i^1, 1) = f_1 - f_3 \end{cases}$$

puis grâce à (33) et (34),

$$\begin{cases} F(2, f^2, 0) = F(1, f_p^1, 0) + (\omega_1)^0 \; F(1, f_i^1, 0) \\ F(2, f^2, 2) = F(1, f_p^1, 0) - (\omega_1)^0 \; F(1, f_i^1, 0) \\ F(2, f^2, 1) = F(1, f_p^1, 1) + (\omega_1)^1 \; F(1, f_i^1, 1) \\ F(2, f^2, 3) = F(1, f_p^1, 1) - (\omega_1)^0 \; F(1, f_i^1, 1). \end{cases}$$

L'ordre naturel d'apparition de la transformée de Fourier est 0, 2, 1, 3. on peut résumer les traitements effectués dans le graphe ci dessous :

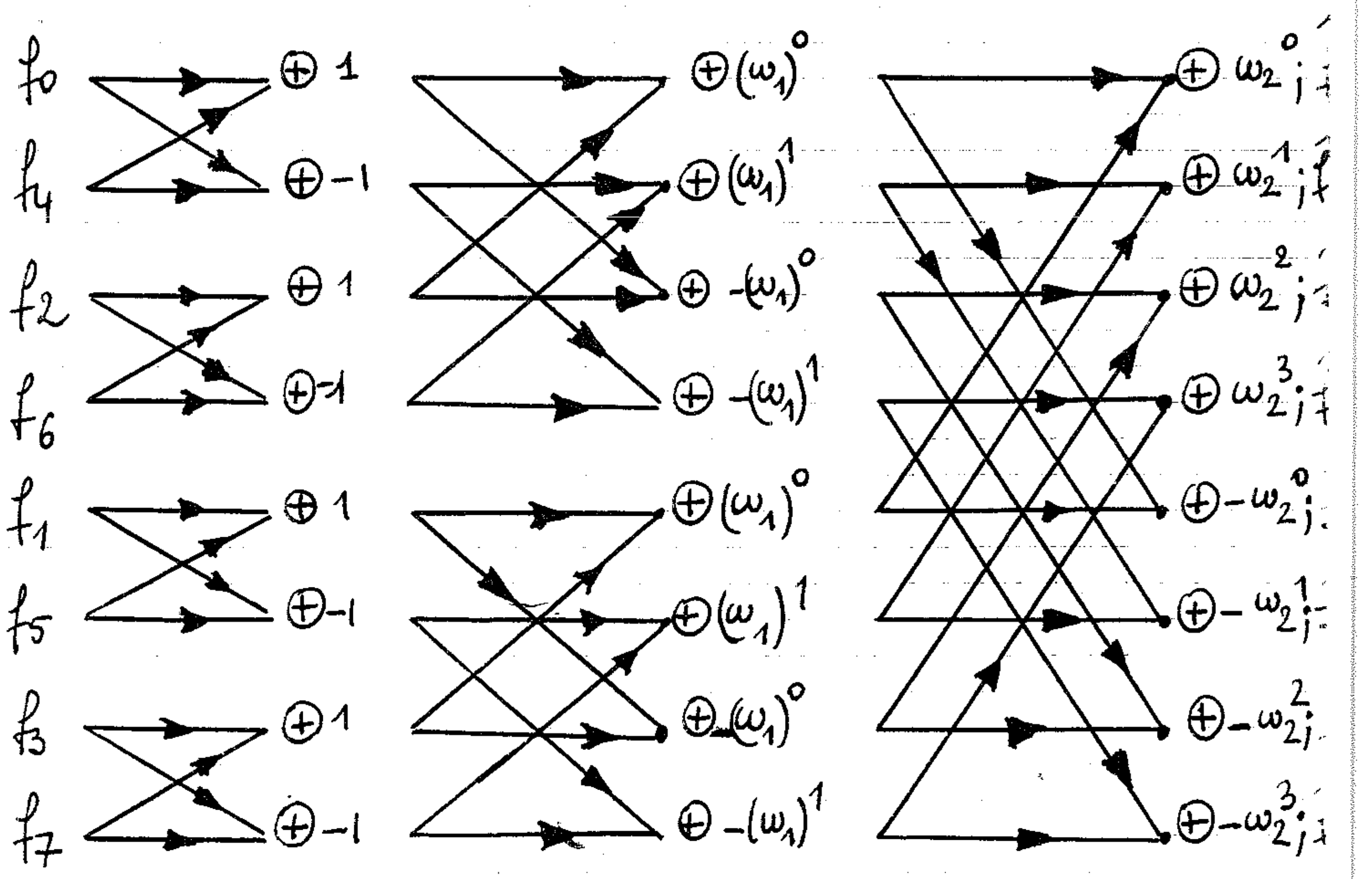


- Le cas $N = 2^3 = 8$ est à peine plus compliqué : on doit d'abord décomposer f^3 sous la forme $f_p^2 = (f_0, f_2, f_4, f_6)$ plus $f_i^2 = (f_1, f_3, f_5, f_7)$ et appliquer à chacune de ces suites l'algorithme précédent, joint aux relations

$$F(3, f^3, k) = F(2, f_p^2, k) + (\omega_2)^k \, F(2, f_i^2, k)$$

$$F(3, f^3, k+4) = F(2, f_p^2, k) - (\omega_2)^k \, F(2, f_i^2, k)$$

avec $\omega_2 = e^{-i\pi/2} = -i$. Le graphe du calcul complet est le suivant [on note à droite le coefficient multiplicatif de la flèche venant du bas, avant addition] :



- La dernière remarque concerne le tri préalable des indices, qui est le résultat de l'itération de la relation (30) à trois reprises :

$$(0,1,2,3,4,5,6,7) \to (0,2,4,6\,;\,1,3,5,7)$$
$$\to (0,4,2,6\,;\,1,5,3,7)$$

qui consiste à trier les pairs des impairs, puis les pairs parmi les pairs des impairs parmi les pairs, puis les pairs parmi les impairs des impairs parmi les impairs. Cette convention s'entend en remplaçant la séquence des pairs 0, 2, 4, 6 par leur numéro 0, 1, 2, 3 ; trier la parité des numéros 0, 2, 1, 3 et reporter cet ordre sur la suite précédente, soit 0, 4, 2, 6. Idem pour les indices impairs.

Il est plus simple de compter en base deux, ce qui revient à regarder les parités / imparités multiples en lisant les nombres "à l'envers" c'est à dire de gauche à droite. L'algorithme est le suivant : on part de la suite 0, ..., 7, on l'écrit en base deux ; on "retourne" les bits en lisant le nombre à l'envers ; on le réécrit en base dix.

0	1	2	3	4	5	6	7
000	001	010	011	100	101	110	111
000	100	010	110	001	101	011	111
0	4	2	6	1	5	3	7 .

!

04/9