le cnam

Traitement du Signal

Leçon 06

Compression et quantification

- Introduction
- Base de cosinus locaux
- Localisation temporelle
- Codage d'images par cosinus locaux
- Quantification scalaire

François Dubois

Paris, 1997

Compression et quantification

1) Introduction

On pose le problème très simple du temps de transmission d'une image couleur à travers le réseau téléphonique. Pour fixer les idées, il s'agit d'une image couleur ; chaque point de l'image ou pixel est codé grâce à son niveau de rouge, de vert et de bleu. On suppose que chaque couleur est codée avec un niveau de gris allant de 0 (noir) à 255 (blanc), c'est à dire un nombre qui s'écrit avec au plus huit chiffres en base deux (octet). On suppose aussi que l'image comporte 512 par 512 points. La quantité totale d'information "brute" est de $512 \times 512 \times 8 \times 3 = 6{,}3\ 10^6$ bits. Le réseau téléphonique supporte classiquement des flux de 64 kilobits par seconde ; le temps de transfert de l'image est de près de cent secondes. C'est un temps d'attente trop important, surtout si l'image est "pauvre" en information comme par exemple un fond d'écran monochrome obtenu par répétition du même jeu de couleurs.

2) Base de cosinus locaux

- Nous avons vu qu'un signal fini f_j ($j \in \{0, \dots, N-1\}$) peut se décomposer sur la base des fonctions exponentielles $\exp(2i\pi kj/N)$ à l'aide de la transformation de Fourier discrète (Discrete Fourier Transform)

(1) $$f_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k \exp 2i\pi kj/N$$

avec

(2) $$\hat{f}_k = \sum_{p=0}^{N-1} f_j \exp -(2i\pi kp/N).$$

Lorsque le signal f est réel, l'emploi de la transformée de Fourier discrète n'est pas le plus simple puisqu'il introduit des nombres complexes. Aussi utilise-t-on en pratique la transformée en cosinus discrète (Discrete Cosine Transform en anglais).

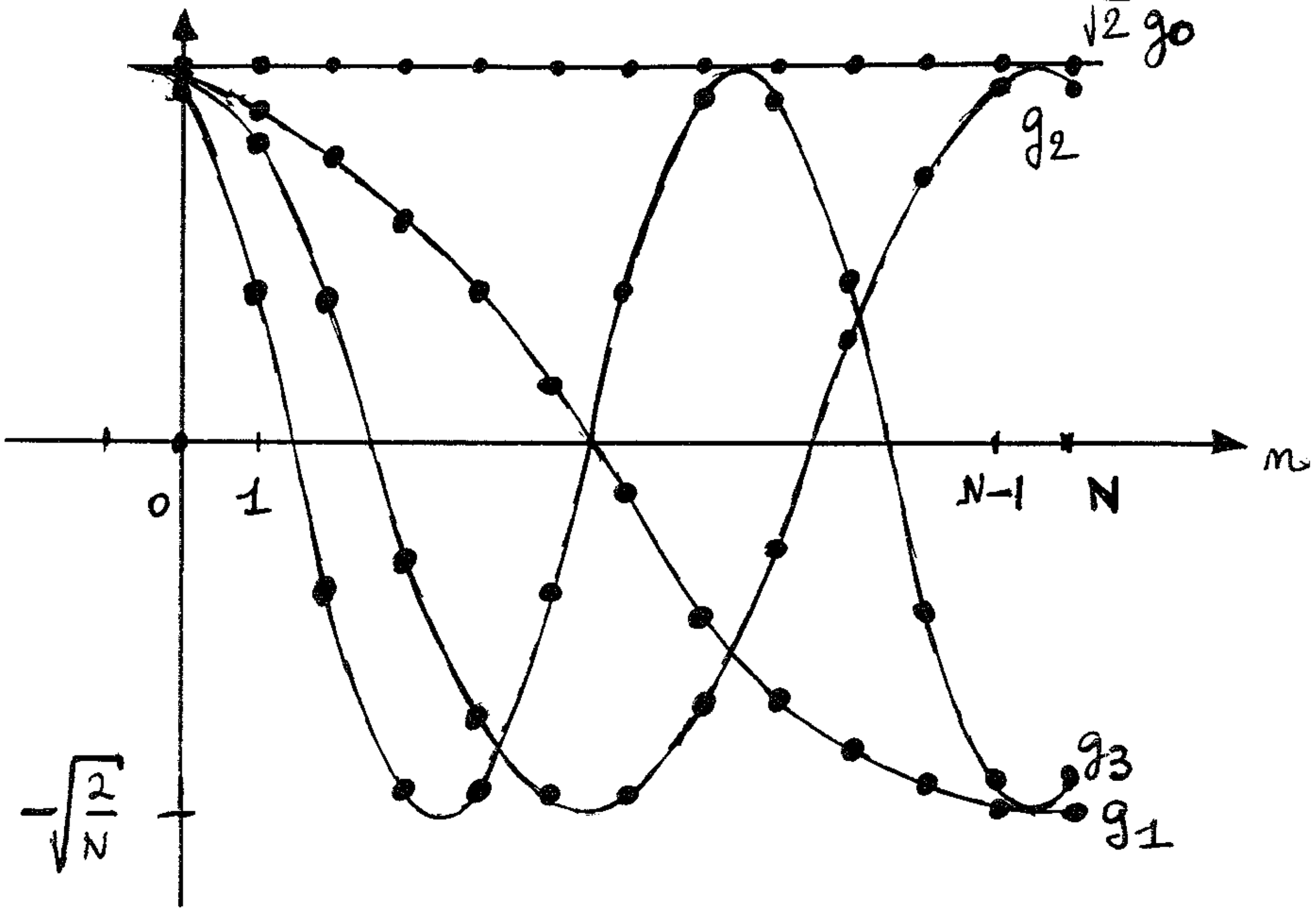
- Définition

Pour $k=0$, on pose

(3) $$g_0(j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \qquad 0 \leqslant j \leqslant N-1$$

et pour $1 \leqslant k \leqslant N-1$, on pose

(4) $$g_k(j) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{k\pi}{N}\left(j+\tfrac{1}{2}\right)\right) \qquad 0 \leqslant j \leqslant N-1$$



Premières fonctions de base de la transformée en cosinus.

on a la

Proposition.

La famille $(g_k)_{0 \le k \le N-1}$ définit une base orthonormée sur l'espace des signaux réels finis $\{0, \dots, N-1\} \to \mathbb{R}$.

on montre que le produit scalaire

$$(5) \quad (g_k, g_l) = \sum_{j=0}^{N-1} g_k(j)\, g_l(j)$$

est nul si $l \neq k$ et vaut 1 pour $l = k$.

- on regarde d'abord les produits scalaires

$$(g_0, g_k) = \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \cos \frac{k\pi}{N}(j+1/2) \text{ pour } 1 \leq k \leq N-1.$$

cette expression est la partie réelle (à un coefficient multiplicatif près) de

$$\sum_{j=0}^{N-1} \exp\left[i \frac{k\pi}{N}(j+1/2)\right] = e^{i\frac{k\pi}{2N}} \left(1 + e^{i\frac{k\pi}{N}} + \cdots + e^{i\frac{k\pi}{N}(N-1)}\right)$$

$$= e^{i\frac{k\pi}{2N}} \frac{1 - e^{ik\pi}}{1 - e^{ik\pi/N}}$$

$$= \frac{(-1)^k - 1}{2i \sin \frac{k\pi}{2N}} \quad \text{imaginaire pur}$$

- Pour $1 \leq k < \ell \leq N-1$, on a par ailleurs

$$(g_k, g_\ell) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \cos\left[\frac{k\pi}{N}(j+1/2)\right] \cos\left[\frac{\ell\pi}{N}(j+1/2)\right]$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left\{\cos\left[\frac{k+\ell}{N}\pi(j+1/2)\right] + \cos\left[\frac{k-\ell}{N}\pi(j+1/2)\right]\right\}$$

et cette somme est nulle comme on l'a vu juste avant.

- Pour $k=\ell$, la somme précédente comporte un premier paquet dont la sommation donne zéro et un second qui comporte N fois la valeur 1. On en déduit donc $(g_k, g_k) = 1$.

- Enfin pour $\ell = k = 0$, on a clairement compte tenu de la relation (3), $(g_0, g_0) = 1$.

La proposition est établie.

$\blacksquare$

- La transformée en cosinus consiste à décomposer le signal fini f sur la base des g_k :

(6) $$f = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{f}^c_k \, g_k$$

et le coefficient de g_k dans la relation (6) définit la transformée en cosinus :

(7) $$\tilde{f}^c_k = (f, g_k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cos\left[\frac{k\pi}{N}(j+1/2)\right], k \geqslant$$

$$\text{et } \tilde{f}^c_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \, .$$

- Une propriété importante de la transformée en cosinus est qu'elle admet un algorithme rapide de calcul, comme pour la transformée de Fourier discrète.

Soit $(f_j)_{0 \leqslant j \leqslant 2N-1}$ un signal de longueur N. On forme à partir de celui-ci un signal fini de longueur N, à savoir

(8) $$\varphi_j = f_{2j} \qquad 0 \leqslant j \leqslant \frac{N}{2} - 1$$

(9) $$\varphi_j = f_{2(N-j-1)+1} \quad \frac{N}{2} \leqslant j \leqslant N-1 \, .$$

On remarque que la différence avec la transformation de Fourier discrète est qu'on "retourne" la suite des indices impairs.

$$\varphi = (f_2, f_4, f_6, \dots f_N, f_{N-1}, \dots, f_5, f_3, f_1)$$

- On évalue la transformée en cosinus du signal f à l'aide de la relation (7) (pour $k \geq 1$) :

$$\tilde{f}^c_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cos\left[\frac{k\pi}{N}(j+1/2)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j} \cos\left[\frac{k\pi}{N}\left(2j+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2(N-1-j)+1} \cos\left[\frac{k\pi}{N}(2j+1/2)\right]$$

car $\cos\left[\frac{k\pi}{N}\left(2(N-1-j)+1+\frac{1}{2}\right)\right] = \cos\left[\frac{k\pi}{N}(2j+1/2)\right]$

$$(10) \quad \tilde{f}^c_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_j \left[\cos \frac{k\pi}{N}(2j+1/2)\right]$$

- Il est alors facile de relier cette dernière expression à la transformée de Fourier discrète de φ :

$$(11) \quad \tilde{f}^c_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \, \mathrm{Re}\left\{ e^{-\frac{k\pi}{2N}} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_j \, e^{-2i\pi jk/N} \right\}$$

ce qui montre, en utilisant la FFT, que la transformation en cosinus a une version algorithmique rapide.

3) Localisation temporelle

- On suppose ici que N est un entier de grande taille ($N=512$ par exemple) pour lequel le stockage des coefficients dans la base des cosinus locaux contient beaucoup de termes. On préfère en prati. que travailler sur des enregistrements de longueur M plus petite, avec

(12) $$N = KM$$

en isolant successivement K fenêtres de longueur M. On introduit une fenêtre rectangulaire de taille M qui ne retient que les M premières valeurs du signal :

(13) $$w_k = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq k \leq M-1 \\ 0 & \text{si } M \leq k \leq N-1 \end{cases}$$

on a alors clairement

(14) $$f_j = \sum_{k=1}^{K} w(j-kM)\, f_j$$

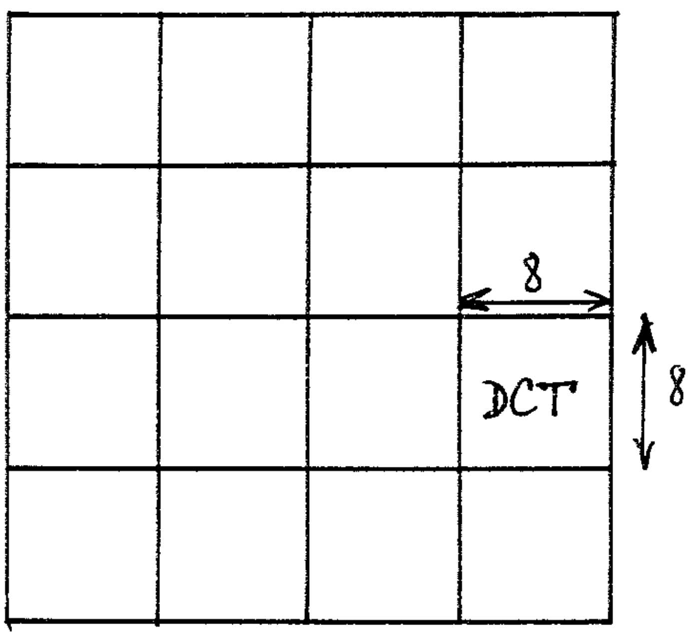
et c'est chacun des K signaux de longueur M $\left(w(j-kM)\, f_j\right)_{kM \leq j \leq (k+1)M-1}$ qu'on développe sur la base des g_k, avec des numéros d'indices translatés de façon ad hoc :

(15) $$f_j = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{M-1} \tilde{f}^{c}_{l,k}\, w(j-kM)\, g_l(j-kM)$$

- On a fabriqué de cette façon une nouvelle base orthogonale pour les signaux de longueur N, à partir des translatées de la fenêtre w (relation (13)) et des cosinus locaux de taille M définis aux relations (3) et (4).

4) Codage d'images par cosinus locaux.

On conçoit facilement que si une image contient de larges plages de couleur uniforme, le codage en est réduit si on sait identifier les zones ad hoc. Comme un tel traitement est complexe, on l'effectue sous forme d'une décomposition en petits blocs M×M. Dans chaque bloc, on ne stocke que les coefficients de la transformée en cosinus, dont le nombre est réduit si l'image contient de larges plages de teinte uniforme.



Standard JPEG

Une image est ici un signal bidimensionnel de longueur $N \times N$, avec N factorisé sous la forme (12)

$$(16) \qquad f_{i,j} \in \mathbb{R} \qquad 0 \le i, j \le N-1$$

Pour obtenir une base orthogonale de l'image, il suffit de partir de la décomposition (15) valable pour les signaux temporels et d'en faire deux copies pour chacune des composantes on décompose l'image en K^2 carrés de taille M^2 et sur chaque carré, on effectue une transformée en cosinus bidimensionnelle :

$$(17) \qquad \tilde{f}^{c}_{lm,kp} = \sum_{\substack{kM \le i \le (k+1)M-1 \\ pM \le j \le (p+1)M-1}} f_{i-kM,\, j-pM} \; g_l(i-kM)\, g_m(j-pM)$$

ce qui revient à décomposer l'image sur la base

$$(18) \qquad e_{lm,kp}(i,j) = w(i-kM)\, g_l(i-kM)\, w(j-pM)\, g_m(j-pM)$$

c'est à dire

$$(19) \qquad f = \sum_{k=1}^{K} \sum_{p=1}^{K} \sum_{l=1}^{M} \sum_{m=1}^{M} \tilde{f}^{c}_{lm,kp}\; e_{lm,kp} .$$

- Le standard le plus courant pour la compression d'images, JPEG, utilise la décomposition en cosinus (ie (17)-(19)) avec $M = 8$ (fenêtres de 8×8 pixels)

5) Quantification scalaire.

Le choix d'une base orthonormée permet d'écrire sous forme plus rapide un signal de longueur N lorsque certaines composantes de la décomposition sont nulles. Dans le cas de la transformation en cosinus par exemple, les relations (6) et (15) fournissent un coefficient $\tilde{f}^c_\ell$ ou une famille $(\tilde{f}^c_{\ell,k})_{1\leq k\leq K}$ par mode g_ℓ $(0\leq \ell\leq M-1)$.