

Introduction a la dérivation fractionnaire

Théorie et applications

François Dubois ¹, Ana-Cristina Galucio ² et Nelly Point ¹

¹ *Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris, France.*

² *EADS Innovation Works, Suresnes, France.*

francois.dubois@math.u-psud.fr, ana-cristina.galucio@eads.net, point@cnam.fr

05 avril 2008

Table des matières

1	La dérivation fractionnaire : motivations et approches successives	3
1.1	Généralisation de la définition usuelle de la dérivation : formule de Grünwald-Letnikov	3
1.2	Formule intégrale de Liouville	5
1.3	Approche fréquentielle de la dérivation	7
1.4	Exemples et paradoxes	7
1.5	Approche fréquentielle de la dérivation	8
2	Équation de la chaleur et dérivation d'ordre un demi.	8
2.1	Introduction	8
2.2	Résolution analytique	9
2.3	Interlude	11
2.4	Intégrateur d'ordre un demi	13
3	De la définition de Riemann-Liouville à celle de Caputo	15
3.1	Une autre expression de la demi-dérivée de Riemann-Liouville	15
3.2	Dérivée fractionnaire de Caputo	16
3.3	Dérivation d'ordre arbitraire	18

4	Exponentielle de Mittag-Leffler	20
4.1	Définition	20
4.2	Equation α -différentielle fondamentale	20
5	Application à la viscoélasticité linéaire	21
5.1	Introduction à la viscoélasticité linéaire	21
5.2	Modèles classiques	23
5.3	Modèle viscoélastique à dérivées fractionnaires	24
5.4	Le rôle des dérivées fractionnaires en viscoélasticité linéaire . . .	25
5.5	Modèle fractionnaire de Zener	25
5.6	Rappel sur les dérivées fractionnaires	26
6	Phénoménologie des modèles et identification	27
6.1	Introduction	27
6.2	Propriétés dans le domaine fréquentiel	27
6.3	Analyse du modèle	30
6.4	Fonction de relaxation	30
6.5	Module complexe	30
6.6	Identification des paramètres du modèle	31
7	Approximation de l'opérateur différentiel d'ordre fractionnaire et simulation numérique	32
7.1	Approximation de l'opérateur	32
7.1.1	Schéma d'approximation de Grünwald-Letnikov	33
7.1.2	Le schéma (G^α)	34
7.2	Simulation numérique	35
7.2.1	Tests élémentaires	35
7.2.2	Oscillateur harmonique	35

1 La dérivation fractionnaire : motivations et approches successives

La question des dérivées d'ordre non entier est évoquée dès 1695 par Leibnitz dans une lettre à de L'Hospital, mais lorsque celui-ci lui demande à quel pourrait être la dérivée d'ordre un demi de la fonction x , Leibnitz répond que cela mène à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences. Plus de 300 ans après on commence seulement à venir à bout des difficultés. De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, en particulier Euler (1730), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847), etc Différentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation aux ordres non-entiers.

- La limite du taux d'accroissement d'une fonction se généralise sous la forme de la formule de Grünwald-Letnikov, très utile numériquement,
- L'intégration, opération inverse, via la formule intégrale de Liouville, mène aux formules de Riemann-Liouville et de Caputo,
- Enfin les transformations de Fourier et de Laplace associent la dérivation fractionnaire à une multiplication par $(2i\pi\nu)^\alpha$ ou p^α avec α non entier.

Mais ces différentes définitions ont pendant longtemps semblé ne pas donner toujours les mêmes résultats. Cette incohérence apparente n'a pu être dissipée que grâce au cadre nouveau proposé par la théorie des distributions de Laurent Schwartz (1945).

1.1 Généralisation de la définition usuelle de la dérivation : formule de Grünwald-Letnikov

La définition élémentaire de la dérivée en x de la fonction f est

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x) - f(x-h)) = \lim_{h \rightarrow 0} E_h f \quad (1)$$

où $E_h = \frac{1}{h}(I - \tau_h)$ désigne l'opérateur d'Euler "rétrograde" et on en déduit la dérivée seconde

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (E_h)^2 f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)) \quad (2)$$

et plus généralement en élevant à la puissance n l'opérateur et en utilisant la formule de Newton

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (E_h)^n f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k)!} f(x-kh) \quad (3)$$

Or la fonction Gamma définie pour z réel strictement positif par l'intégrale généralisée

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{z-1} du \quad (4)$$

est telle que $\Gamma(n+1) = n!$ pour n entier naturel. C'est une fonction analytique de z qui peut être prolongée de façon unique au plan complexe C privé des entiers négatifs ou nuls. Sachant que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, on démontre que

$$\forall z \in I \quad \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}, \forall m \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(z+m) = \Gamma(z) z(z+1)\dots(z+m-1) \quad (5)$$

En remarquant tout d'abord que la somme dans (3) peut être étendue à tous les k entiers non négatifs puisque les termes sont nuls pour $k \geq n$, une généralisation naturelle consiste à définir la dérivée d'ordre α , pour $\alpha > 0$ par

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} f(x-kh) \quad (6)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} f(x-kh) \quad (7)$$

Mais comme pour α non entier $\Gamma(-\alpha)$ est bien défini et que

$$\begin{aligned} (-1)^k \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k) &= (-\alpha)(-\alpha+1)\dots(-\alpha+k-1) \\ &= \frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(-\alpha)} \end{aligned}$$

d'après (5) on obtient la formule de **Grünwald-Letnikov**

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(x-kh)$$

Cette formule (Liouville 1832, Grünwald 1863, Letnikov 1868) est très utilisée pour calculer numériquement une dérivée fractionnaire connaissant f avant la valeur x . Nous verrons plus loin, que cette formule, basée sur l'opérateur d'Euler, peut être remplacée par des formules plus performantes.

1.2 Formule intégrale de Liouville

Pour les fonctions causales nulle en 0 , l'inverse de l'opérateur de dérivation est l'opérateur d'intégration :

$$\frac{df}{dx} = g \text{ avec } f(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) = If(x) = \int_0^x g(y) dy \quad (8)$$

De même pour des fonctions causales avec des conditions initiales nulles, l'inverse de la dérivation $n^{ième}$ est définie par le $n^{ième}$ itéré de l'opérateur I précédent. Ainsi la fonction f_2 telle que $f_2(0) = f_2'(0) = 0$ avec $f_2'' = g$ est définie par

$$f_2(x) = I^2 f(x) = \int_0^x \left(\int_0^z g(y) dy \right) dz = \int_0^x g(y) \left(\int_y^x dz \right) dy \quad (9)$$

$$= \int_0^x (x-y) g(y) dy \quad (10)$$

Plus généralement la fonction f_n telle que $f_n(0) = f_n'(0) = \dots = f_n^{(n-1)}(0) = 0$ avec $f_n^{(n)} = g$ est définie par l'intégrale de Liouville

$$f_n(x) = I^n f(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} g(y) dy \quad (11)$$

Cette formule peut être interprétée comme le produit de convolution de la fonction causale g avec la fonction causale $Y_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n!}$. Pour $n = 1$, Y_1 n'est autre que la fonction échelon ou de Heaviside. En utilisant la fonction Gamma on a

$$Y_n(x) = \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} \text{ pour } x > 0 \quad (12)$$

Mais encore une fois, la fonction Gamma peut être prolongée à l'ensemble du plan complexe privé des nombres entiers négatifs et on peut donc définir une fonction Y_α par

$$Y_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \text{ pour } x > 0 \quad (13)$$

On peut vérifier que la convolution de g par Y_α donne ce que l'on appelle une intégrale d'ordre α de g pour tout $\alpha > 0$. On aimerait pouvoir dire que les dérivées d'ordre α sont obtenues par une convolution avec $Y_{-\alpha}$. Mais au voisinage $x = 0$, la fonction $Y_{-\alpha} = \frac{x^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}$ n'est pas intégrable quand $1 + \alpha \geq 1$, c'est à

dire quand $\alpha \geq 0$. On peut contourner cette difficulté en définissant pour un α non entier quelconque positif la dérivée d'ordre α au sens de **Riemann-Liouville** par la relation :

$$D_{RL}^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} I^{n-\alpha} f(x) \quad \text{avec } n \text{ l'entier vérifiant : } 0 < n-1 < \alpha \leq n \quad (14)$$

donc :

$$D_{RL}^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{(x-y)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} f(y) dy \quad (15)$$

En particulier, pour $0 < \alpha < 1$, on a :

$$D_{RL}^\alpha g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-y)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} g(y) dy \quad \text{pour } 0 < \alpha < 1 \quad (16)$$

Un autre choix consiste à d'abord dériver g puis à faire le produit de convolution du résultat avec $Y_{1-\alpha}$, on obtient alors la **dérivée d'ordre α au sens de Caputo** :

$$D_C^\alpha g(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dg}{dx}(y) dy \quad \text{pour } 0 < \alpha < 1 \quad (17)$$

Ces deux définitions sont équivalentes pour des fonctions g telles que $g(0^+) = 0$. Mais dans le cas général on a :

$$\begin{aligned} D_{RL}^\alpha g(x) &= \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-y)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} g(y) dy = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} g(x-y) dy \\ &= \int_0^x \frac{y^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} g'(x-y) dy + \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} g(0^+) \end{aligned}$$

d'où :

$$D_{RL}^\alpha g(x) = D_C^\alpha g(x) + g(0^+) Y_{1-\alpha}(x) \quad (18)$$

Comme on l'a vu plus haut la fonction Y_β n'est localement sommables en 0 que si $\beta > 0$, cependant pour $\beta \leq 0$, dans le cadre plus général des distributions (souvent désignées en anglais par "generalized functions"), Y_β désigne une distribution singulière. Pour $\beta = -n$ on a $Y_{-n} = \delta^{(n)}$ c'est à dire la dérivée n ème de la distribution de Dirac en 0. Pour les β négatif non entiers Y_β désigne une distribution singulière qui appliquée à une fonction test φ , à support dans $I \subset \mathbb{R}^+$, associe à l'intégrale $\int_0^x \frac{(x-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \varphi(y) dy$ divergente en 0 la partie finie d'Hadamard définie par.

$$vp \int_0^x \frac{(x-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \varphi(y) dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^x \frac{(x-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \varphi(y) dy$$

En fait dans le cadre des distributions causales on définit tout simplement la dérivation d'ordre α par

$$D^\alpha g = Y_{-\alpha} * g$$

Comme Y_1 n'est autre la fonction échelon (ou de Heaviside) $Y_1 * g$ donne l'intégrale $\int_0^x g(y) dy$. On peut montrer que pour tous α et β réels $Y * Y_\beta = Y_{\alpha+\beta}$. Donc $Y_{-1} * g = D^1 g$ c'est la dérivée au sens des distributions de la distribution g . Pour une fonction causale dérivable sur $I \subset \mathbb{R}^{+*}$ on a

$$D^1 g = \frac{dg}{dx} + g(0^+) \delta$$

où $\frac{dg}{dx}$ désigne la dérivée au sens des fonctions.

1.3 Approche fréquentielle de la dérivation

Une autre façon d'aborder la notion de dérivation est de passer par la transformation de Fourier et d'utiliser la relation :

$$F(f')(\nu) = 2i\pi\nu F(f)(\nu) \quad \text{avec} \quad F(f)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx \quad (19)$$

L'opération dérivation correspond en fréquence à une multiplication par $2i\pi\nu$ et la dérivation à l'ordre n à une multiplication par $(2i\pi\nu)^n$.

Il est alors tout naturel de vouloir définir la dérivation d'ordre α par une multiplication par $(2i\pi\nu)^\alpha$.

Dans le cadre des fonctions, la transformée de Fourier est utilisable pour les fonctions sommables ou de carré sommables sur $I \subset \mathbb{R}$, pour des fonctions causales on utilise la transformation de Laplace et la dérivation d'ordre α correspond alors à une multiplication par p^α .

1.4 Exemples et paradoxes

Voyons sur un exemple l'effet de la formule de Riemann-Liouville (16) sur la fonction causale $f(x) = x^m$:

$$D_{RL}^\alpha(x^m) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} x^{m-\alpha}$$

En raison de son rôle de fonction propre pour l'opérateur de dérivation, il est intéressant de calculer la dérivée d'ordre α de la fonction exponentielle $f(x) = e^{\lambda x}$.

En utilisant la formule de Riemann-Liouville (16) on obtient :

$$D_{RL}^{\alpha}(e^{\lambda x}) = \frac{1}{x^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{\Gamma(k+1-\alpha)}$$

On peut être surpris de ne pas trouver comme résultat $\lambda^{\alpha} e^{\lambda x}$ mais en fait dans la formule (16) on a considéré seulement les fonctions causales et l'intégrale porte de ce fait sur $I \subset \mathbb{R}^+$. Si on remplace la borne inférieure dans l'intégrale par $-\infty$, et si on applique cette nouvelle définition à $f(x) = e^{\lambda x}$, on trouve :

$${}_{-\infty}D_{RL}^{\alpha}(e^{\lambda x}) = \lambda^{\alpha} e^{\lambda x}$$

Grâce à cette formule on peut démontrer que :

$${}_{-\infty}D_{RL}^{\alpha}(\sin(x)) = \sin(x + \alpha \frac{\pi}{2})$$

1.5 Approche fréquentielle de la dérivation

(PARLER ASPECT NON LOCAL, effet mémoire)

2 Équation de la chaleur et dérivation d'ordre un demi.

2.1 Introduction

Dans ce paragraphe, nous montrons que la dérivée d'ordre un demi s'introduit naturellement quand on cherche à résoudre un problème modèle relatif à l'équation de la chaleur. On se donne l'intervalle $[0, +\infty[$ où vit la variable d'espace y . Noter que cette variable y est typiquement une direction orthogonale à une direction principale x d'un écoulement fluide. On suppose la variable de temps t positive. On se donne une constante μ de diffusivité strictement positive et une fonction $f(t)$ qui pour cet exemple ne dépend que du temps. On cherche une fonction $u(y, t)$ solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(t), \quad t > 0, \quad y \geq 0. \quad (20)$$

La fonction inconnue $u(y, t)$ satisfait à une contrainte de nullité en $y = 0$ et son gradient $\frac{\partial u}{\partial y}$ tend vers 0 si y tend vers $+\infty$:

$$u(0, t) = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(y, t) \longrightarrow 0 \quad \text{si } y \longrightarrow +\infty. \quad (22)$$



FIG. 1: Profil typique de couche limite thermique.

Un profil typique $u(y, t)$ (à t fixé) est représenté à la Fig. 1. Ce type de courbe est bien connu chez les ingénieurs comme “profil de couche limite” (voir [18] par exemple). Les ingénieurs sont directement intéressés par le flux de chaleur $\Phi(t)$ à la paroi, donné par la loi de Fourier :

$$\Phi(t) = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}(0, t), \quad t > 0 \quad (23)$$

et représenté graphiquement par la tangente en $y = 0$ à la courbe de la Fig. 1.

2.2 Résolution analytique

On peut résoudre la problème précédent (20) (21) (22) à l’aide de la transformation de Fourier en temps. Nous introduisons la transformée de Fourier $\hat{u}(y, \omega)$ de la fonction u :

$$\hat{u}(y, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y, t) \exp(-i \omega t) dt$$

et on sait qu’alors la fonction u admet la représentation :

$$u(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(y, \omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (24)$$

grâce à la formule de réciprocity de Fourier. On peut ensuite dériver par rapport au temps :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega \hat{u}(y, \omega) \exp(i\omega t) d\omega.$$

Nous notons $\hat{f}$ la transformée de Fourier du second membre f . Alors l'équation (20) s'écrit simplement :

$$i\omega \hat{u} - \mu \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = \hat{f}. \quad (25)$$

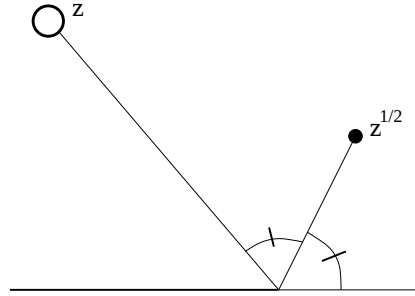


FIG. 2: Racine carrée dans le plan complexe.

- Pour $z \equiv r \exp(i\theta)$ nombre complexe n'appartenant pas à l'intervalle $]-\infty, 0]$, on note $\sqrt{z}$ la détermination principale de la racine carrée complexe, tel qu'illustré à la Fig. 2 :

$$\sqrt{r \exp(i\theta)} \equiv \sqrt{r} \exp\left(i\frac{\theta}{2}\right), \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

On a donc en particulier :

$$\operatorname{Re}(\sqrt{z}) > 0, \quad z \notin]-\infty, 0]. \quad (26)$$

On peut alors résoudre l'équation (25) :

$$\hat{u}(y, \omega) = \frac{1}{i\omega} \hat{f} + \alpha \exp\left(\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} y\right) + \beta \exp\left(-\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} y\right).$$

On tient compte de la condition limite (22) en $+\infty$ qui impose de ne pas permettre l'existence d'une solution exponentiellement croissante en y ; donc on a nécessairement $\alpha = 0$. Puis on tient compte de la condition limite (21) en $y = 0$. On en déduit

$$\widehat{u}(y, \omega) = \frac{1}{i\omega} \widehat{f} \left[1 - \exp \left(- \sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} y \right) \right]. \quad (27)$$

On peut alors dériver cette expression par rapport à y :

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial y}(y, \omega) = \frac{1}{\sqrt{i\mu\omega}} \widehat{f} \exp \left(- \sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} y \right)$$

puis faire $y = 0$:

$$\widehat{\Phi}(\omega) = -\sqrt{\frac{\mu}{i\omega}} \widehat{f}. \quad (28)$$

2.3 Interlude

Nous effectuons dans ce paragraphe une transformée de Fourier particulière qui va éclairer d'un jour nouveau la relation (28). Comme au paragraphe précédent, nous notons $Y(t)$ la fonction de Heaviside et nous posons

$$\rho(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{t}} Y(t). \quad (29)$$

Nous allons calculer la transformée de $\rho(\bullet)$ en prenant garde au fait que cette fonction n'est pas intégrable. On a cependant

$$\widehat{\rho}(\omega) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{R^2} \exp(-i\omega t) \frac{dt}{\sqrt{t}}. \quad (30)$$

Nous commençons par le cas $\omega > 0$. On fait d'abord le changement de variable $t = u^2$ dans l'intégrale (30). On a alors

$$\int_0^{R^2} \exp(-i\omega t) \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 \int_0^R \exp(-i\omega u^2) \frac{u du}{u} = 2 \int_0^R \exp(-i\omega u^2) du.$$

Puis pour $\omega > 0$, on pose $z = u\sqrt{\omega}$. Alors

$$\int_0^{R^2} \exp(-i\omega t) \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int_0^{R/\omega} \exp(-i z^2) dz.$$

Pour calculer l'intégrale oscillante $\int_0^R \exp(-i z^2) dz$, on intègre dans le plan complexe le long du contour Γ_R défini à la Fig. 3 la fonction holomorphe $z \mapsto \exp(-z^2)$.

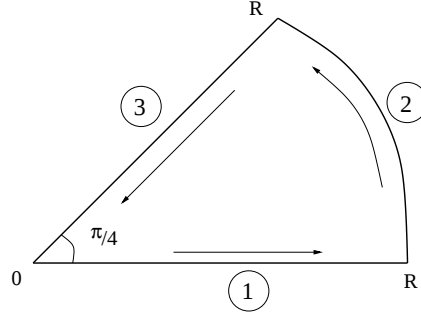


FIG. 3: Contour d'intégration.

On a

$$\int_{\Gamma_R} \exp(-z^2) dz = 0.$$

Le contour Γ_R se compose de trois branches : l'une réelle, la seconde pour $|z| = R$ et la troisième pour $\arg z = \frac{\pi}{4}$. Nous notons Γ_R^i ($1 \leq i \leq 3$) ces trois branches. Tout d'abord, $\int_{\Gamma_R^1} \exp(-z^2) dz$ tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ si R tend vers l'infini ; c'est classique (voir par exemple Dieudonné [5]). Pour $z \in \Gamma_R^2$, on a $z = R \exp(i\theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$. Donc

$$\int_{\Gamma_R^2} \exp(-z^2) dz = \int_0^{\pi/4} \exp(-R^2(\cos(2\theta) + i \sin(2\theta))) i R \exp(i\theta) d\theta.$$

Donc

$$\left| \int_{\Gamma_R^2} e^{-z^2} dz \right| \leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos(2\theta)} R d\theta = \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} \exp(-R^2 \cos \theta) d\theta.$$

Pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta \geq 1 - \frac{2\theta}{\pi}$. On en déduit

$$\left| \int_{\Gamma_R^2} e^{-z^2} dz \right| \leq \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2(1 - \frac{2\theta}{\pi})} d\theta = \frac{R}{4} e^{-R^2} \frac{\pi}{R^2} \left[e^{2R^2 \frac{\theta}{\pi}} \right]_0^{\pi/2}$$

d'où

$$\left| \int_{\Gamma_R^2} e^{-z^2} dz \right| \leq \frac{\pi}{4R} e^{-R^2} (e^{R^2} - 1)$$

et ce terme peut être négligé dans la limite où R tend vers l'infini. Enfin, $z \in \Gamma_R^3$ peut s'écrire sous la forme $z = t \exp(i \frac{\pi}{4}) = t \sqrt{i}$ avec $t \geq 0$. On en tire

$$\int_{\Gamma_R^3} e^{-z^2} dz = - \int_0^R e^{-(t\sqrt{i})^2} \sqrt{i} dt = -\sqrt{i} \int_0^R e^{-it^2} dt.$$

Après sommation des trois contributions de l'intégrale, on a

$$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} - \sqrt{i} \int_0^\infty e^{-it^2} dt = 0,$$

ce qui permet d'écrire

$$\int_0^\infty e^{-it^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{i}}. \quad (31)$$

La transformée de Fourier $\widehat{\rho}(\omega)$ s'en déduit alors facilement dans ce cas :

$$\widehat{\rho}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{\omega}} \int_0^\infty e^{-it^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{i\omega}}. \quad (32)$$

Pour $\omega < 0$, on remarque que $\widehat{\rho}(\omega) = \overline{\widehat{\rho}(-\omega)}$ et on sait que pour z complexe n'appartenant pas à l'intervalle $]-\infty, 0]$, on a

$$\overline{\sqrt{z}} = \sqrt{\bar{z}}, \quad z \notin]-\infty, 0]. \quad (33)$$

Pour $\omega < 0$, on a donc le calcul suivant :

$$\widehat{\rho}(\omega) = \overline{\widehat{\rho}(-\omega)} = \overline{\sqrt{\frac{\pi}{i(-\omega)}}} = \sqrt{\frac{\pi}{\overline{i(-\omega)}}} = \sqrt{\frac{\pi}{-i\omega}} = \sqrt{\frac{\pi}{i\omega}}$$

qui permet d'établir que la relation (32) est vraie dans tous les cas de figure pour $\omega \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$.

2.4 Intégrateur d'ordre un demi

Nous pouvons reprendre la suite de la résolution analytique et préciser l'expression du flux de chaleur (28) sous la forme

$$\widehat{\Phi} = -\sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \widehat{\rho} \widehat{f} \quad (34)$$

et grâce à la relation classique

$$\widehat{\rho * f} \equiv \widehat{\rho} \widehat{f}, \quad (35)$$

on a finalement

$$\widehat{\Phi}(\omega) = -\sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \rho * f = -\sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \int_0^t f(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}}. \quad (36)$$

Nous venons de faire apparaître l'intégrateur d'ordre un demi de la fonction f .

Définition. Intégrateur d'ordre un demi.

Soit $u(\bullet)$ une fonction **causale**, c'est à dire telle que

$$u(t) = 0 \quad \text{si } t < 0. \quad (37)$$

On appelle intégrateur d'ordre un demi et on note $(I^{1/2}u)(t)$ la fonction causale du temps définie (au premier paragraphe ??) par

$$(I^{1/2}u)(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t u(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} \quad \text{si } t > 0 \quad (38)$$

et $(I^{1/2}u)(t) \equiv 0$ pour $t \leq 0$.

Propriété. Le carré de l'intégrateur d'ordre un demi est l'intégration usuelle.

Soit $u(\bullet)$ une fonction causale et $(I^1u)(t)$ l'intégrale usuelle de cette fonction :

$$(I^1u)(t) \equiv \int_0^t u(\theta) d\theta. \quad (39)$$

On a alors

$$\left[I^{1/2}(I^{1/2}u) \right](t) = \int_0^t u(\theta) d\theta, \quad (40)$$

ce qui s'écrit aussi en termes d'opérateurs sous la forme

$$I^{1/2} \circ I^{1/2} \equiv I^1. \quad (41)$$

• Si $t < 0$, la relation (40) est claire car les deux termes sont identiquement nuls. La preuve de cette proposition est un simple calcul d'intégrale double dans le cas $t > 0$. On a en effet :

$$\left[I^{1/2}(I^{1/2}u) \right](t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} \int_0^\theta u(\varphi) \frac{d\varphi}{\sqrt{\theta-\varphi}}$$

et on calcule cette intégrale en utilisant le théoème de Fubini :

$$\left[I^{1/2}(I^{1/2}u) \right](t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t d\varphi u(\varphi) \int_\varphi^t \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}\sqrt{\theta-\varphi}}.$$

On effectue le changement de variable $\theta = \varphi + x(t - \varphi)$ ($0 < x < 1$) dans l'intégrale la plus à droite. Alors $\frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}\sqrt{\theta-\varphi}} = \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ et

$$\left[I^{1/2}(I^{1/2}u) \right](t) = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \right) \int_0^t d\varphi u(\varphi)$$

ce qui établit la relation (40) à une constante multiplicative près.

- Le calcul de l'intégrale en préfacteur est classique. On paramètre le demi-cercle d'équation $y = \sqrt{x(1-x)}$ par la pente λ d'une corde issue de l'origine : $y = \lambda x$. Alors $\lambda = \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$, c'est à dire $\lambda^2 = \frac{1}{x} - 1$. Puis on a le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= \int_{+\infty}^0 \frac{1}{y} \frac{dx}{d\lambda} d\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda x} (2\lambda x^2) d\lambda \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = \pi. \end{aligned}$$

Nous retenons que

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi \quad (42)$$

et la relation (40) est maintenant complètement établie.

3 De la définition de Riemann-Liouville à celle de Caputo

3.1 Une autre expression de la demi-dérivée de Riemann-Liouville

On a vu au cours du paragraphe précédent comment “intégrer une demi-fois” une fonction causale du temps. Si on dérive maintenant cette “semi-intégrale”, on obtient une “demi-dérivée”, ou une dérivée d'ordre un demi. C'est ce qu'ont proposé Riemann et Liouville à la fin du XIX^{ème} siècle :

$$D_{RL}^{1/2}u(t) \equiv \frac{d}{dt}(I^{1/2}u)(t) \quad (43)$$

pour une fonction causale $u(\bullet)$. De façon précise,

$$D_{\text{RL}}^{1/2} u(t) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t u(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} \right), \quad t > 0 \quad (44)$$

et $(I^\alpha u)(t) \equiv 0$ si $t < 0$.

Décomposition de la dérivée de Riemann et Liouville.

Soit $u(\bullet)$ une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$. On a

$$D_{\text{RL}}^{1/2} u(t) = \frac{u(0)}{\sqrt{\pi t}} + \int_0^t \frac{du}{d\theta}(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{\pi(t-\theta)}}. \quad (45)$$

- La preuve de la relation (45) est élémentaire. On effectue le changement de variable $\varphi = t - \theta$ au membre de droite de (44) avant de dériver en temps. On a donc

$$\int_0^t u(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{(t-\theta)}} = \int_0^t u(t-\varphi) \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi}}$$

et ensuite on dérive par rapport au temps l'expression obtenue :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t u(t-\varphi) \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi}} \right) &= \frac{u(0)}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} (u(t-\varphi)) \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi}} \\ &= \frac{u(0)}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{du}{d\theta}(t-\varphi) \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi}} = \frac{u(0)}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{du}{d\theta}(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} \end{aligned}$$

ce qui établit le résultat. $\square$

3.2 Dérivée fractionnaire de Caputo

Si $u(0) = 0$, on peut remplacer $D_{\text{RL}}^{1/2} u(t)$ par le produit de convolution $\frac{Y(t)}{\sqrt{\pi t}} * \frac{du}{dt}$ dès que u est dérivable. De plus, si $u(\bullet)$ est constante, le produit de convolution $\frac{Y(t)}{\sqrt{\pi t}} * \frac{du}{dt}$ est identiquement nul, propriété qu'on est en droit d'attendre d'une semi-dérivée, ce qui n'est **pas** le cas pour la définition de Riemann et Liouville si $u(0) \neq 0$. On propose donc, avec Caputo [3] (définition reprise entre autres par Lighthill [12]), de définir la demi-dérivée $D^{1/2} u(t)$ par la convolution $\frac{Y(t)}{\sqrt{\pi t}} * \frac{du}{dt}$.

Définition de Caputo de la dérivation d'ordre un demi.

Soit $u(\bullet)$ une fonction causale dérivable si $t > 0$. On pose

$$D^{1/2} u(t) = \int_0^t \frac{du}{d\theta}(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{\pi(t-\theta)}}. \quad (46)$$

On a aussi la propriété suivante, qui fait le lien avec la transformation de Fourier.

Propriété. Transformation de Fourier de la demi-dérivée.

Soit $D^{1/2}u(t)$ la demi-dérivée définie en (46). On a alors

$$\widehat{D^{1/2}u}(\omega) = \sqrt{i\omega} \widehat{u}(\omega) \quad (47)$$

- La preuve de la relation (47) est une conséquence élémentaire de l'action de la transformée de Fourier d'un produit de convolution et de la proposition précédente.

On a $D^{1/2}u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \rho * \frac{du}{dt}$. Donc

$$\widehat{D^{1/2}u} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \widehat{\rho}(i\omega) \widehat{u} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{i\omega}} (i\omega) \widehat{u} = \sqrt{i\omega} \widehat{u},$$

ce qui montre la propriété. $\square$

Il est ensuite facile de calculer la dérivée d'ordre un demi de quelques fonctions.

Propriété. Quelques dérivées d'ordre un demi élémentaires.

$$D^{1/2}(tY(t))(t) = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} Y(t) \quad (48)$$

$$D^{1/2}(\sqrt{t}Y(t))(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} Y(t). \quad (49)$$

Il s'agit d'un calcul tout à fait élémentaire qui est laissé au lecteur à titre d'exercice.

Propriété. La dérivation d'ordre un demi est un inverse de l'intégration d'ordre un demi.

Soit $u(\bullet)$ une fonction causale dérivable telle que $u(0) = 0$. Alors

$$\left[(I^{1/2} \circ D^{1/2})u \right](t) = u(t), \quad t \in \mathcal{R}. \quad (50)$$

$$\left[(D^{1/2} \circ I^{1/2})u \right](t) = u(t), \quad t \in \mathcal{R}. \quad (51)$$

- On a en effet le calcul élémentaire suivant :

$$\begin{aligned} \left[I^{1/2} (D^{1/2})u \right](t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} \int_0^\theta \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\pi}(\theta-\varphi)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^t d\varphi \frac{du}{d\varphi} \int_\varphi^t \frac{d\theta}{\sqrt{(t-\theta)(\theta-\varphi)}} = \int_0^t d\varphi \frac{du}{d\varphi} \text{ compte tenu de (42)} \end{aligned}$$

$$= u(t) \quad \text{car } u(\bullet) \text{ est causale et } u(0) = 0.$$

Nous laissons au lecteur la preuve de la relation (51). $\square$

Propriété. La dérivée d'ordre un demi est une racine carrée de la dérivée usuelle.

Soit $u(\bullet)$ une fonction causale dérivable. On a alors

$$\left[(D^{1/2} \circ D^{1/2})u \right](t) = \frac{du}{dt}(t), \quad t \in \mathcal{R}. \quad (52)$$

- On calcule le produit $(I^{1/2} \circ I^{1/2} \circ D^{1/2} \circ D^{1/2})u(t)$ de deux façons. On a d'une part

$$\begin{aligned} (I^{1/2} \circ I^{1/2} \circ D^{1/2} \circ D^{1/2})u(t) &= \left[I^{1/2} \circ (I^{1/2} \circ D^{1/2}) \circ D^{1/2} \right]u(t) \\ &= \left[I^{1/2} \circ D^{1/2} \right]u(t) = u(t) \end{aligned}$$

compte tenu de (50). D'autre part,

$$\begin{aligned} (I^{1/2} \circ I^{1/2} \circ D^{1/2} \circ D^{1/2})u(t) &= (I^{1/2} \circ I^{1/2}) \left[(D^{1/2} \circ D^{1/2})u(t) \right] \\ &= \int_0^t (D^{1/2} \circ D^{1/2})u(\theta) d\theta \end{aligned}$$

compte tenu de (40). On dérive par rapport à t l'expression précédente. La relation (52) s'en déduit de manière élémentaire. $\square$

3.3 Dérivation d'ordre arbitraire

Dans le cas d'un indice α arbitraire mais choisi ici entre 0 et 1 ($0 < \alpha < 1$), la définition de la dérivation d'ordre α au sens de Caputo utilise explicitement les propriétés de fonctions spéciales très classiques. D'une part, la fonction $\Gamma(\bullet)$ définie à la relation (4), d'autre part la fonction Beta $B(\bullet, \bullet)$ à deux arguments :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0. \quad (53)$$

On peut montrer à l'aide du calcul d'une intégrale double *via* le théorème de Fubini qu'on a (voir aussi par exemple Schwartz [19]) :

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) = B(\alpha, \beta) \Gamma(\alpha + \beta), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0.$$

Nous pouvons alors, pour λ tel que $0 < \lambda < 1$, généraliser le calcul (32) de la transformée de Fourier de la fonction définie en (29). Nous posons

$$\rho_\lambda(t) \equiv \frac{1}{t^\lambda} Y(t) \quad 0 < \lambda < 1 \quad (54)$$

et un calcul d'intégration dans le plan complexe analogue à celui mené plus haut montre que

$$\widehat{\rho_\lambda}(\omega) = \frac{\Gamma(1-\lambda)}{(i\omega)^{1-\lambda}}. \quad (55)$$

Si $u(\bullet)$ désigne une fonction causale, l'intégrateur d'ordre α est défini *via* une généralisation de (38) :

$$(I^\alpha u)(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(\theta)}{(t-\theta)^{1-\alpha}} d\theta. \quad (56)$$

Il est alors facile de déduire de (55) la propriété fondamentale suivante :

$$\widehat{I^\alpha u}(\omega) = \left(\frac{1}{i\omega}\right)^\alpha \widehat{u}(\omega), \quad (57)$$

qui justifie l'intégration formelle à l'ordre α de la représentation de Fourier (24). Pour $0 < \alpha < 1$ la dérivation $D^\alpha u$ au sens de Caputo d'une fonction causale $u(\bullet)$ est définie par

$$(D^\alpha u)(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{du}{d\theta} \frac{1}{(t-\theta)^\alpha} d\theta. \quad (58)$$

On a alors les relations générales suivantes, démontrées par exemple dans l'ouvrage de référence de Oldham et Spanier [15] :

$$\widehat{D^\alpha u}(\omega) = (i\omega)^\alpha \widehat{u}(\omega), \quad (59)$$

qui généralise la relation (47),

$$D^\alpha (t^\beta Y(t))(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} t^{\beta-\alpha} Y(t), \quad 0 < \alpha, \beta < 1, \quad (60)$$

qui généralise les relations (48) et (49), et enfin

$$(D^\alpha (D^\beta u))(t) = (D^{\alpha+\beta} u)(t), \quad \alpha > 0, \beta > 0, \quad \alpha + \beta < 1. \quad (61)$$

4 Exponentielle de Mittag-Leffler

4.1 Définition

Pour $\theta \in \mathcal{C}$ et $0 < \alpha < 1$, on appelle exponentielle de Mittag-Leffler et on note $E_\alpha(\bullet)$ la fonction suivante

$$E_\alpha(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{\Gamma(1 + \alpha k)}. \quad (62)$$

On remarque bien sûr que E_1 est l'exponentielle usuelle :

$$E_1(\theta) \equiv \exp(\theta). \quad (63)$$

Nous allons surtout vérifier que cette fonction permet d'exprimer facilement "la" solution de l'équation " α -différentielle" suivante :

$$D^\alpha u + \lambda^\alpha u = 0, \quad t > 0 \quad (64)$$

avec la condition initiale

$$u(0) = 1. \quad (65)$$

Dans le paragraphe qui suit, nous supposons admis que le modèle (64) (65) a une unique solution (voir par exemple [8] pour une étude mathématique complète) $u(\bullet)$ telle que $u(t) \equiv 1$ pour $t \leq 0$, ce qui signifie que la fonction $u - 1$ est causale. Nous dérivons sans ambage à l'ordre α sous le signe de sommation des séries. Ce qui compte ici, c'est l'idée du calcul !

4.2 Equation α -différentielle fondamentale

La fonction $u(t)$ définie pour $t > 0$ par

$$u(t) = E_\alpha(-(\lambda t)^\alpha) \quad (66)$$

est une solution de l'équation α -différentielle (64) avec la condition initiale (65).

- Nous avons vu à la relation (60) le calcul de la dérivée d'ordre α d'une fonction puissance. On en déduit le calcul de la dérivée d'ordre α d'un terme courant de la série du membre de droite de (66) :

$$\begin{aligned}
D^\alpha \left(\frac{1}{\Gamma(1 + \alpha k)} (-\lambda t)^\alpha Y(t) \right) &= \frac{(-1)^k \lambda^{\alpha k}}{\Gamma(1 + \alpha k)} D^\alpha (t^{\alpha k} Y(t)) \\
&= \frac{(-1)^k \lambda^{\alpha k}}{\Gamma(1 + \alpha k)} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1 - \alpha)} t^{\alpha k - \alpha} Y(t) \\
&= -\lambda^\alpha \frac{(-1)^{k-1} \lambda^{\alpha(k-1)}}{\Gamma(1 + \alpha(k-1))} t^{\alpha(k-1)} Y(t)
\end{aligned}$$

et on retrouve, à un décalage d'indice près et à un facteur multiplicatif près, le terme général de la série (62) qui permet de calculer $E_\alpha(-(\lambda t)^\alpha)$. On somme donc pour k allant de 1 à l'infini la relation précédente ; on trouve

$$D^\alpha \left(E_\alpha(-(\lambda t)^\alpha) - 1 \right) + \lambda^\alpha E_\alpha(-(\lambda t)^\alpha) = 0,$$

ce qui donne le résultat escompté car $D^\alpha(1) = 0$ et $E_\alpha(0) = 1$. $\square$

5 Application à la viscoélasticité linéaire

5.1 Introduction à la viscoélasticité linéaire

L'hypothèse de base faite pour les matériaux viscoélastiques linéaires est que la contrainte à l'instant actuel est une fonction linéaire de toute l'histoire des déformations.

Deux essais statiques sont les plus souvent employés pour définir, pour des temps longs, les coefficients des lois de comportement : l'essai de fluage et l'essai de relaxation. L'essai de fluage consiste à imposer de façon instantanée une contrainte constante à une éprouvette et à suivre ses déformations en fonction du temps. Dans l'essai de relaxation, on impose une déformation instantanée, on la maintient constante et l'on mesure les variations de la contrainte en fonction du temps.

Basée sur le principe de superposition de Boltzmann, la loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire quelconque peut s'écrire sous forme intégrale par

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \mathcal{G}(t-s) \dot{\varepsilon}(s) ds \quad (67)$$

où σ représente la contrainte, ε la déformation, $\mathcal{G}$ la fonction de relaxation et où s est la variable d'intégration temporelle. Si le matériau est initialement au repos ($\varepsilon(t) = 0$ pour $t < 0$), l'équation précédente s'écrit

$$\sigma(t) = \mathcal{G}(t)\varepsilon(0) + \int_0^t \mathcal{G}(t-s)\dot{\varepsilon}(s)ds \quad (68)$$

Dans sa forme classique, la loi de comportement sous forme d'équation différentielle contient des dérivées temporelles d'ordre entier

$$\sigma + \sum_{m=1}^M b_m \frac{d^m \sigma}{dt^m} = a_o \varepsilon + \sum_{n=1}^N a_n \frac{d^n \varepsilon}{dt^n} \quad (69)$$

où les quantités b_m , a_o et a_n sont des paramètres matériaux.

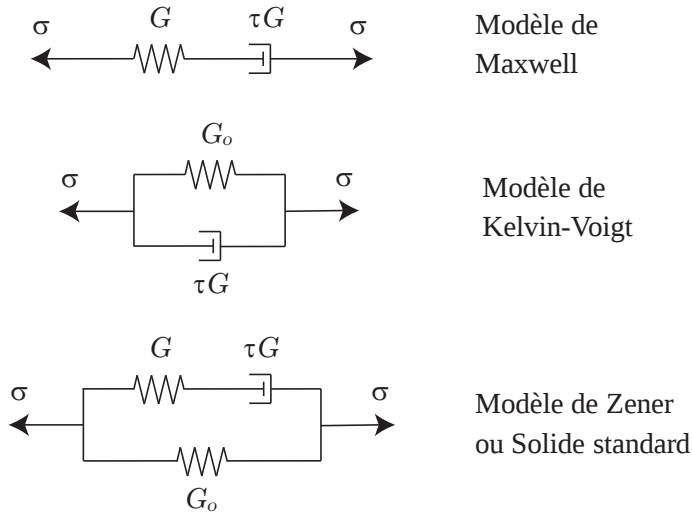


FIG. 4: Modèles analogiques de Maxwell, Kelvin-Voigt et Zener.

Afin d'illustrer la forme de ces opérateurs différentiel, considérons trois modèles rhéologiques simples : le modèle de Maxwell, de Kelvin-Voigt et le modèle de Zener (voir Fig. 4). Ainsi, les lois de comportement de ces modèles s'écrivent sous la forme :

$$\sigma + b_1 \dot{\sigma} = a_o \varepsilon + a_1 \dot{\varepsilon} \quad (70)$$

où b_1 , a_o et a_1 sont des paramètres matériaux dont les valeurs sont fournies dans le Tableau 1 pour chacun des modèles étudiés. Les rigidités des ressorts sont notées G et G_o et τ est un temps de relaxation.

TAB. 1: Coefficients de la loi de comportement (70)

Modèle	b_1	a_o	a_1
Maxwell	τ	$-$	τG
Voigt	$-$	G_o	τG
Zener	τ	G_o	$\tau(G + G_o)$

5.2 Modèles classiques

Nous pouvons citer l'approche par module complexe, la méthode des énergies modales et les modèles à variables internes. Quelqu'uns de ces modèles sont exposés ci-après.

Il est commode, pour étudier un matériau viscoélastique linéaire, de lui imposer une déformation (ou une contrainte) sinusoïdale à une certaine fréquence et amplitude. La contrainte et la déformation peuvent être exprimées sous forme complexe par

$$\sigma^*(\omega) = G^*(\omega)\varepsilon^*(\omega) \quad (71)$$

où G^* est le module complexe défini par

$$G^*(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega) \quad (72)$$

Ainsi, le module qui lie la contrainte et la déformation peut être exprimé en termes des parties réelle et imaginaire. Ce module est classiquement dénommé *module complexe*.

La *méthode des énergies modales (Modal Strain Energy ou MSE)* a été présentée par Rogers et al [9]. Pour un mode propre donné, le rapport entre les facteurs de perte de la structure et du matériau viscoélastique est égal au rapport entre les énergies de déformation élastique du matériau viscoélastique et de la structure lorsqu'elle se déforme dans le mode considéré.

Cette méthode permet d'estimer l'amortissement à moindre coût à partir du calcul des modes propres réels. Cependant, elle ne se montre efficace que pour des structures faiblement amorties.

La troisième classe de loi de comportement est celle des modèles à variables internes. Les variables internes sont utilisées afin que les équations dans le do-

maine fréquentiel puissent être transformées dans le domaine temporel. Citons, par exemple, les modèles GHM, ADF et les séries de Prony.

La *méthode GHM (Golla-Hughes-McTavish)* [14] permet une écriture matricielle classique dans un cadre éléments finis des équations de mouvement. Les propriétés viscoélastiques sont introduites dans les matrices de masse et de rigidité. Des coordonnées supplémentaires (coordonnées de dissipation), associées à chaque élément fini, permettent une description de la dépendance en fréquence du comportement des matériaux viscoélastiques. Cette méthode permet de caractériser les propriétés viscoélastiques à partir d’une série de mini-oscillateurs.

La *méthode Anelastic Displacement Fields (ADF)* a été largement utilisée pour modéliser le comportement des matériaux viscoélastiques. Un de ses principaux avantages réside dans sa capacité à prendre en compte des états tridimensionnels de contraintes. Le modèle ADF permet d’écrire le module complexe du matériau viscoélastique par une série de n termes [11].

On peut aussi construire un modèle de comportement en connectant plusieurs éléments de Maxwell en parallèle à un ressort (modèle de Maxwell généralisé). Cette somme d’exponentielles est connue sous le nom de *série de Prony* [20].

5.3 Modèle viscoélastique à dérivées fractionnaires

En général, les modèles rhéologiques utilisés en viscoélasticité linéaire sont constitués de ressorts et d’amortisseurs. Les lois de comportement de ces éléments rhéologiques peuvent être généralisées à partir de l’utilisation des dérivées fractionnaires.

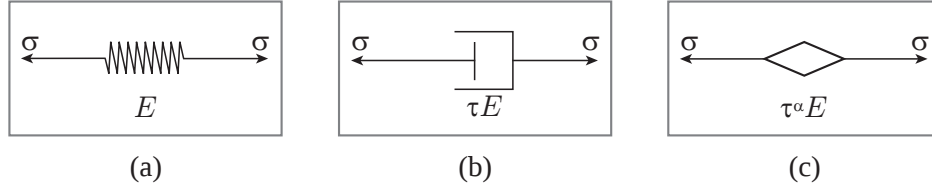


FIG. 5: Éléments rhéologiques de la viscoélasticité.

La loi de comportement associée à la réponse d’un élément élastique est décrite simplement par $\sigma = \tau^0 E \mathcal{D}^0 \varepsilon = E \varepsilon$, où τ est le temps de relaxation, E le module élastique et $\mathcal{D}^0$ l’opérateur différentiel temporel d’ordre zéro. Cela caractérise le comportement d’un ressort (voir Fig. 5 (a)). La loi de comportement associée à la

réponse d'un élément visqueux est donnée par $\sigma = \tau^1 E \mathcal{D}^1 \varepsilon = \tau E \dot{\varepsilon}$, où τE correspond à la viscosité du matériau et $\mathcal{D}^1$ à l'opérateur différentiel temporel d'ordre un. Cela caractérise le comportement d'un amortisseur (voir Fig. 5 (b)). Afin de généraliser les deux cas précédents, la loi de comportement linéaire peut s'écrire sous la forme

$$\sigma = \tau^\alpha E \mathcal{D}^\alpha \varepsilon \quad (73)$$

où $\mathcal{D}^\alpha$ est l'opérateur différentiel temporel d'ordre fractionnaire, avec $0 \leq \alpha \leq 1$. L'élément rhéologique associé à l'Eq. (73) présente à la fois des caractéristiques de ressort (*spring*) et d'amortisseur (*dashpot*), d'où la désignation de *spring-pot* (voir Fig. 5 (c)). Autrement dit, lorsque $\alpha = 0$, le matériau a une mémoire parfaite, tandis que pour $\alpha = 1$ le matériau n'a pas de mémoire. Le paramètre α (valeurs comprises entre zéro et un) peut être alors considéré comme un paramètre de mémoire.

5.4 Le rôle des dérivées fractionnaires en viscoélasticité linéaire

Nous avons vu au début du chapitre une liste non exhaustive de modèles de comportement pour l'amortissement viscoélastique en dynamique de structures. Dans ce travail, nous avons choisi de travailler avec le modèle fractionnaire de Zener. Ce choix est dû aux nombreux avantages que présentent les modèles à dérivées fractionnaires. Par exemple, l'écriture mathématique du modèle à base de dérivées fractionnaires est établie sur les théories moléculaires qui décrivent le comportement mécanique d'un milieu viscoélastique [?]. De plus, le modèle vérifie le deuxième principe de la thermodynamique et est capable de prédire des courbes elliptiques d'hystérésis de type contrainte-déformation pour les matériaux viscoélastiques [1]. Le principal atout des modèles viscoélastiques fractionnaires est certainement le nombre réduit de paramètres matériaux nécessaires à sa caractérisation, notamment pour le lissage des courbes maîtresses. De nombreux matériaux viscoélastiques ont ainsi été caractérisés avec très peu de paramètres sur une plage de fréquence d'une dizaine de décades. Ces prérogatives font de l'approche par calcul fractionnaire un outil très attractif parmi les méthodes existantes.

5.5 Modèle fractionnaire de Zener

En remplaçant les amortisseurs des modèles rhéologiques classiques par des *spring-pots*, on aboutit à un modèle rhéologique d'ordre fractionnaire. Dans le cas

du solide standard ou modèle de Zener, nous arrivons au modèle fractionnaire de Zener à quatre paramètres (voir Fig. 6)

$$\sigma(t) + \tau^\alpha \mathcal{D}^\alpha \sigma(t) = E_o \varepsilon(t) + \tau^\alpha E_\infty \mathcal{D}^\alpha \varepsilon(t) \quad (74)$$

où E_o et E_∞ sont les modules élastiques relaxé et non relaxé, α l'ordre de la dérivée fractionnaire ($0 < \alpha < 1$) et τ le temps de relaxation.

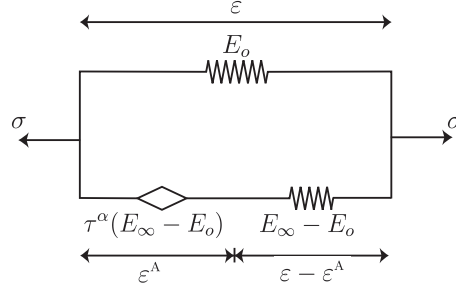


FIG. 6: Modèle fractionnaire de Zener.

Conformément à la figure ci-dessus, on peut réécrire la loi de comportement (74) sous la forme suivante

$$\sigma = E_o \varepsilon + (E_\infty - E_o)(\varepsilon - \varepsilon^A) \quad (75)$$

où ε^A est une déformation anélastique dont la loi d'évolution temporelle est donnée par

$$\varepsilon^A + \tau^\alpha \mathcal{D}^\alpha \varepsilon^A = \varepsilon \quad (76)$$

5.6 Rappel sur les dérivées fractionnaires

L'opérateur de dérivées fractionnaires (ou d'ordre non-entier) d'une fonction temporelle $\mathcal{D}^\alpha$ peut être défini par de nombreuses méthodes. Les plus populaires sont certainement celle due à Riemann-Liouville (qui découle des transformées intégrales de Laplace) et celle due à Grünwald-Letnikov (qui vient de la définition des dérivées d'ordre entier) [17].

L'opérateur fractionnaire $\mathcal{D}^\alpha$, selon la définition de Riemann-Liouville, est

$$\mathcal{D}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^\alpha} ds \quad (77)$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction gamma, définie par une superposition continue de fonctions exponentielles

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} \exp(-t) dt \quad (78)$$

La deuxième définition est relativement simple à mettre en œuvre d'un point de vue numérique, notamment en combinaison avec une approche par éléments finis. C'est cette méthode qui sera utilisée dans la suite de ce travail. Les détails sur ce formalisme seront présentés dans la Section 7.1.1 (page 33).

6 Phénoménologie des modèles et identification

6.1 Introduction

6.2 Propriétés dans le domaine fréquentiel

La transformée de Fourier de l'Eq. (74) fournit la relation contrainte-déformation dans le domaine fréquentiel

$$\sigma^*(\omega) = E^*(\omega) \varepsilon^*(\omega) \quad (79)$$

où $\sigma^*(\omega)$ et $\varepsilon^*(\omega)$ sont respectivement les transformées de Fourier ¹ de $\sigma(t)$ et $\varepsilon(t)$, reliées par le module complexe d'élasticité :

$$E^*(\omega) = \frac{E_o + E_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha} \quad (80)$$

Ce module est composé d'une partie réelle et d'une partie imaginaire

$$E^*(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) = E'(\omega)[1 + i\eta(\omega)] \quad (81)$$

où $E'(\omega)$ correspond à la rigidité élastique, tandis que $E''(\omega)$ représente la dissipation du matériau. Le rapport entre ces modules définit le facteur de perte

¹On rappelle que la transformée de Fourier de la dérivée d'ordre non-entier d'une fonction causale $f(t)$ est définie par $\mathcal{F}\{\mathcal{D}^\alpha f(t)\}(\omega) = (i\omega)^\alpha \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = (i\omega)^\alpha f^*(\omega)$, avec $i = \sqrt{-1}$.

$$\eta(\omega) = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} \quad (82)$$

qui caractérise l'amortissement du matériau.

À partir de l'Eq. (80), on peut extraire la partie réelle et la partie imaginaire du module complexe. On a alors le module élastique (partie réelle)

$$E'(\omega) = \frac{E_o + (E_\infty + E_o)(\omega\tau)^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + E_\infty(\omega\tau)^{2\alpha}}{1 + 2(\omega\tau)^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + (\omega\tau)^{2\alpha}} \quad (83)$$

et le module de perte du matériau viscoélastique (partie imaginaire)

$$E''(\omega) = \frac{(E_\infty - E_o)(\omega\tau)^\alpha \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{1 + 2(\omega\tau)^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + (\omega\tau)^{2\alpha}} \quad (84)$$

Le comportement du module complexe dans le domaine fréquentiel peut être décrit entre deux valeurs asymptotiques : le module statique $E_o = E^*(\omega \rightarrow 0)$ et le module dynamique $E_\infty = E^*(\omega \rightarrow \infty)$. Cela signifie que les limites du module complexe à haute et à basse fréquence sont purement élastiques. Par conséquent, l'amortissement du matériau ne se présente que sur une bande moyenne de fréquence.

L'expression (80), qui est utilisée dans l'identification des paramètres du modèle, permet de décrire la dépendance en fréquence intrinsèque aux matériaux viscoélastiques sur une large bande de fréquence [1].

Considérations thermodynamiques

Ce modèle vérifie le deuxième principe de la thermodynamique. Le critère de vérification est basé sur l'inégalité de Clausius-Duhem. On se place dans la suite dans le cas isotherme où seule la composante de dissipation intrinsèque est considérée.

Le premier cas consiste à approcher l'élément *spring-pot* du modèle fractionnaire par une somme discrète d'éléments de Maxwell en parallèle et le deuxième par une somme continue.

Spectre de relaxation discret

Suivant la méthode proposée par Lion [13], écrivons l'énergie libre isotherme comme étant l'énergie totale de déformation stockée dans les ressorts.

Cette approximation est possible puisque la fonction de relaxation d'un *spring-pot* peut s'écrire comme une superposition continue de fonctions exponentielles.

Spectre de relaxation continu

Dans le cas où l'on utilise un spectre continu de relaxation du *spring-pot*, l'énergie libre isotherme s'écrit

Ceci démontre que le modèle fractionnaire de Zener vérifie l'inégalité de Clausius-Duhem et donc le deuxième principe de la thermodynamique pour n'importe quel type de chargement.

Chargement harmonique

Dans le cas d'un chargement harmonique $\varepsilon(t) = \sin \omega_o t$, quelques hypothèses peuvent être faites concernant les paramètres du modèle. On rappelle que le taux d'énergie mécanique, ainsi que le taux d'énergie dissipée des solides réels doivent être non-négatifs. Ces conditions sont vérifiées si les modules élastique et de perte sont positifs pour n'importe quelle fréquence, c'est-à-dire si les parties réelles et imaginaires du module complexe sont positives

$$E'(\omega) \geq 0 \quad \text{et} \quad E''(\omega) \geq 0 \quad (85)$$

dans l'intervalle $0 < \omega < \infty$. Basées sur les relations ci-dessus, certaines conditions sur les paramètres du modèle peuvent être établies. On note dans les équations (83) et (84) que les modules élastique et de perte du modèle à quatre paramètres sont positifs quelles que soient la fréquence et la valeur de α , si les conditions suivantes sont vérifiées

$$E_o \geq 0 \quad (86a)$$

$$E_\infty > 0 \quad (86b)$$

$$\tau > 0 \quad (86c)$$

$$\frac{E_\infty}{E_o} \gg 1 \quad (86d)$$

L'analyse détaillée des propriétés thermodynamiques du modèle fractionnaire de Zener dans le cas d'un chargement harmonique est réalisée dans l'article de Bagley et Torvik [2].

6.3 Analyse du modèle

Dans le contexte de la viscoélasticité linéaire isotherme, il existe de nombreux moyens d'exprimer les propriétés mécaniques qui interviennent dans la loi de comportement des matériaux viscoélastiques. Les descriptions des propriétés mécaniques les plus souvent utilisées sont probablement celles fournies par les fonctions de fluage et relaxation et par le module complexe. Ces méthodes, qui sont équivalentes, peuvent être déterminées à partir de l'observation directe d'essais expérimentaux [4].

Dans la suite, une brève analyse du modèle à quatre paramètres est présentée. Cette analyse consiste simplement à étudier l'influence de l'ordre de la dérivée fractionnaire sur le comportement du matériau viscoélastique. D'abord avec une approche temporelle à travers la fonction de relaxation et ensuite avec une approche fréquentielle à travers le module complexe. Enfin, les grandes lignes sur l'identification des paramètres du modèle à quatre paramètres d'un matériau viscoélastique sont présentées.

6.4 Fonction de relaxation

Les tests de fluage et de relaxation sont des moyens simples et directs pour obtenir les propriétés mécaniques liées à la théorie linéaire de viscoélasticité. L'essai de fluage consiste à imposer de façon instantanée (en traction, compression uniaxiale, flexion, etc.) une contrainte constante à une éprouvette et à suivre ses déformations en fonction du temps. Dans l'essai de relaxation, on impose une déformation instantanée qui est maintenue constante pendant que l'on mesure la contrainte en fonction du temps. Dans [10], Koeller présente les fonctions de relaxation et de fluage pour plusieurs modèles rhéologiques munis d'un *spring-pot*. Pour cela, il utilise le concept d'intégrale de Volterra et explicite les fonctions de relaxation et de fluage avec la fonction de Mittag-Leffler. Une étude plus récente réalisée par Enelund et Olsson dans [6], propose l'application d'une méthode intégrale pour résoudre un système viscoélastique à un degré de liberté. Pour cela ils travaillent avec la fonction de Mittag-Leffler.

6.5 Module complexe

Le comportement des matériaux viscoélastiques est classiquement décrit par leurs courbes maîtresses dans le domaine fréquentiel. Ces courbes maîtresses présentent

respectivement la partie réelle du module complexe E' et le facteur de perte η en fonction de la fréquence.

6.6 Identification des paramètres du modèle

L'identification des quatre paramètres du modèle E_o , E_∞ , τ et α peut être réalisée à partir de différents essais dynamiques (en régime transitoire ou harmonique). Pour les matériaux viscoélastiques isotropes, des essais harmoniques de traction-compression permettent, par exemple, d'identifier le module d'Young et des essais harmoniques de torsion le module de cisaillement.

Les données expérimentales utilisées pour tracer les courbes maîtresses du matériau viscoélastique ISD112 à 27°C ont été fournies par le fabricant dans un intervalle de fréquence de 20 Hz à 5000 Hz. Ces courbes maîtresses (voir Fig. 7) présentent respectivement la partie réelle G' du module de cisaillement complexe et le facteur de perte $\eta = G''/G'$ en fonction de la fréquence.

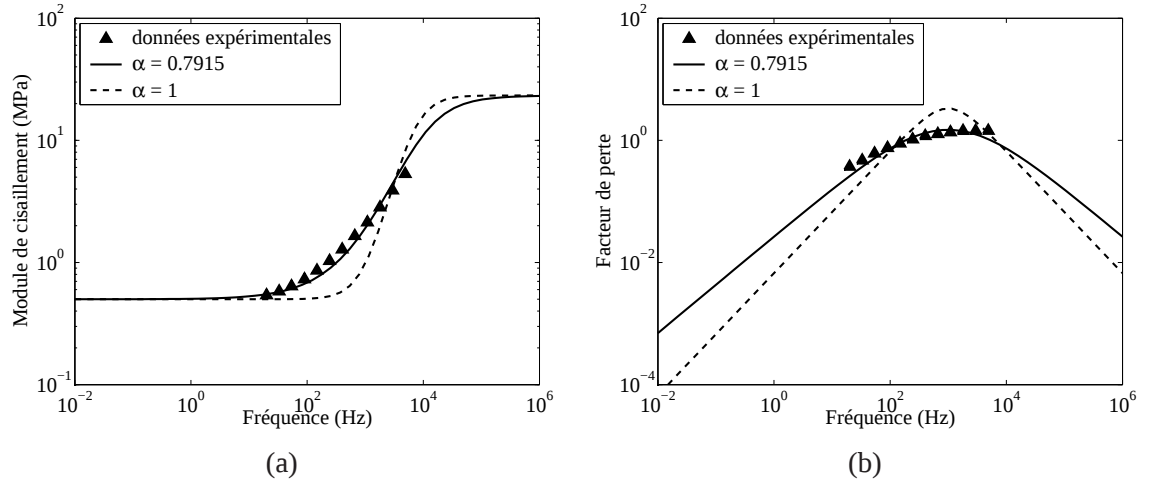


FIG. 7: Courbes maîtresses du matériau viscoélastique ISD112 à 27°C : (a) partie réelle du module de cisaillement $G'(\omega)$ et (b) facteur de perte $\eta(\omega)$.

En supposant que les valeurs asymptotiques de la partie réelle du module élastique (E_o et E_∞) et la valeur maximale du facteur de perte $\eta_{\max}$ sont connues, l'ordre de la dérivée fractionnaire α peut être calculé analytiquement à partir de

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \arcsin \left[\eta_{\max}(E_{\infty} - E_o) \frac{2\sqrt{E_o E_{\infty}} + (E_{\infty} + E_o)\sqrt{1 + \eta_{\max}^2}}{\eta_{\max}^2(E_{\infty} + E_o)^2 + (E_{\infty} - E_o)^2} \right] \quad (87)$$

où la valeur maximale du facteur de perte est évaluée à la fréquence donnée par (??).

On note que l'Eq. (87) est indépendante de τ . Le temps de relaxation peut, quant à lui, être obtenu par minimisation de l'écart entre les valeurs théorique et expérimentale du module complexe, par exemple par une méthode des moindres carrés.

À titre de comparaison, les courbes maîtresses du modèle classique de Zener (ou solide standard) et du modèle à dérivées fractionnaires sont tracées sur la Fig. 7 pour des valeurs fixées de E_o et E_{∞} . On observe que le modèle à dérivées fractionnaires (trait plein) s'approche beaucoup mieux des données expérimentales que le modèle du solide standard (trait interrompu), avec seulement un paramètre supplémentaire.

7 Approximation de l'opérateur différentiel d'ordre fractionnaire et simulation numérique

7.1 Approximation de l'opérateur

Les grandes lignes de deux méthodes d'approximation aux différences finies sont ici présentées. La première technique d'approximation est liée à la définition de Grünwald. Elle consiste à approcher la dérivée fractionnaire par un schéma aux différences finies décentré amont précis au premier ordre. La deuxième technique consiste à utiliser un schéma décentré vers le passé précis au deuxième ordre. C'est le schéma $G\alpha$ développé par Galucio et al. [7].

Soit u une fonction du temps connue à ses valeurs discrets u^n pour chaque t^n , où n est un entier positif. La fonction u^n peut être approchée par $u(t^n)$ avec $t^n = n\Delta t$, où Δt supposé constant, est l'incrément de temps. De plus, l'opérateur de retard utilisé dans la suite de ce travail est défini par :

$$(\delta^- u)^n = u^{n-1} \quad (88)$$

7.1.1 Schéma d'approximation de Grünwald-Letnikov

Considérons l'opérateur d'Euler arrière (E) tel que

$$E = \frac{1}{\Delta t} (I - \delta^-) \quad (89)$$

où I est l'opérateur identité. Le schéma de Grünwald-Letnikov (GL) peut être obtenu à partir de l'extension de cet opérateur E , suivant les travaux d'Oustaloup [16] :

$$GL = E^\alpha = \frac{1}{\Delta t^\alpha} (I - \delta^-)^\alpha \quad (90)$$

où le terme entre parenthèses peut être calculé par la formule binomiale de Newton ce qui résulte :

$$GL = \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j C_\alpha^j (\delta^-)^j \quad (91)$$

avec les coefficients $(-1)^j C_\alpha^j$ définis en termes de la fonction Gamma :

$$(-1)^j C_\alpha^j = \frac{\Gamma(j - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j + 1)} = A_{j+1}^\alpha \quad (92)$$

où A_{j+1}^α sont les coefficients de Grünwald-Letnikov, avec $A_1^\alpha = 1$ pour tout α . Ainsi, la dérivée d'ordre α d'une fonction u calculée à l'instant t^n par le schéma de Grünwald-Letnikov est donnée par [?, ?] :

$$(GLu)^n = \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} A_{j+1}^\alpha u^{n-j} \quad (93)$$

En utilisant la propriété de la fonction gamma $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, on obtient la relation de récurrence suivante

$$A_{j+1}^\alpha = \frac{j - \alpha - 1}{j} A_j^\alpha \quad (94)$$

Pour $0 < \alpha < j$, la valeur absolue du coefficient rationnel de l'Eq. (94) est inférieure à 1, donc $|A_{j+1}^\alpha| < |A_j^\alpha|$. Cela signifie que la série formée par les coefficients $|A_{j+1}^\alpha|$ est strictement décroissante lorsque j devient supérieur à l'ordre de la dérivée α . Cette propriété caractérise le phénomène de mémoire évanescence et motive donc la troncature de la série en (93).

Dans le cas particulier où α est un entier positif, seuls les $\alpha+1$ premiers coefficients de Grünwald sont non-nuls. En revanche, pour tout ordre non-entier positif, tous les coefficients A_{j+1} sont non-nuls. Cela signifie que les dérivées fractionnaires agissent comme des opérateurs non-locaux.

Il est important de signaler que le calcul des coefficients A_{j+1} est une tâche délicate. Il faut éviter de les calculer en utilisant la définition formelle (92). Il est préférable d'utiliser la relation de récurrence (94) pour ne pas cumuler trop d'erreurs numériques.

7.1.2 Le schéma (G^α)

Soit l'opérateur de Gear défini par :

$$G = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{3}{2}I - 2\delta^- + \frac{1}{2}(\delta^-)^2 \right] \quad (95)$$

Suivant le même formalisme du paragraphe précédent, nous avons :

$$G^\alpha = \frac{1}{\Delta t^\alpha} \left(\frac{3}{2} \right)^\alpha \left[I - \frac{4}{3}\delta^- + \frac{1}{3}(\delta^-)^2 \right]^\alpha \quad (96)$$

Cet opérateur est obtenu directement à partir de la puissance α de l'Eq. (95). Ainsi, à l'aide de la formule binomiale de Newton, l'équation 3.1 devient :

$$G^\alpha = \frac{1}{\Delta t^\alpha} \left(\frac{3}{2} \right)^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^j \left(\frac{4}{3} \right)^j \left(\frac{1}{4} \right)^\ell (-1)^j C_\alpha^j (-1)^\ell C_j^\ell (\delta^-)^{j+\ell} \quad (97)$$

et la dérivée d'ordre α d'une fonction u calculée à l'instant t^n :

$$(G^\alpha u)^n = \frac{1}{\Delta t^\alpha} \left(\frac{3}{2} \right)^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^j \left(\frac{4}{3} \right)^j \left(\frac{1}{4} \right)^\ell A_{j+1}^\alpha B_{\ell+1}^j u^{n-j-\ell} \quad (98)$$

où les coefficients A_{j+1}^α sont définis par (94) et les $B_{\ell+1}^j$ par :

$$B_{\ell+1}^j = \frac{\ell - j - 1}{\ell} B_\ell^j \quad (99)$$

avec $B_1^j = 1$ pour tout j .

À titre illustratif, les cinq premiers coefficients de l'équation 3.3 sont présentés dans le Tableau 2. Ces coefficients sont liés à l'Eq. (98) par l'expression :

$$(G^\alpha u)^n = \frac{1}{\Delta t^\alpha} \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} u^{n-j} \quad (100)$$

où g est un nombre rationnel.

TAB. 2: Premiers coefficients g_{j+1} du schéma G^α pour $\alpha = 1/3$, $\alpha = 1/2$ et $\alpha = 3/4$

j	$\alpha = 1/3$	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 3/4$
0	1	1	1
1	$-\frac{4}{9}$	$-\frac{2}{3}$	-1
2	$-\frac{7}{81}$	$-\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$
3	$-\frac{104}{2187}$	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{108}$
4	$-\frac{643}{19683}$	$-\frac{17}{648}$	$-\frac{1}{96}$
5	$-\frac{4348}{177147}$	$-\frac{19}{972}$	$-\frac{7}{864}$

7.2 Simulation numérique

7.2.1 Tests élémentaires

7.2.2 Oscillateur harmonique

Références

- [1] R.L. BAGLEY and P.J. TORVIK. Fractional calculus – a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA Journal*, 21 :741–748, 1983.
- [2] R.L. BAGLEY and P.J. TORVIK. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *Journal of Rheology*, 30 :133–155, 1986.
- [3] M. CAPUTO. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, Part 2. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 13 :529–539, 1967.
- [4] R.M. CHRISTENSEN. *Theory of viscoelasticity*. Dover Publications, 1982.
- [5] J. DIEUDONNÉ. *Calcul infinitésimal*. Hermann, Paris, 1968.
- [6] M. ENELUND and P. OLSSON. Damping described by fading memory – analysis and application to fractional derivative models. *International Journal of Solids and Structures*, 36 :939–970, 1999.

- [7] A.C. GALUCIO, J.-F. DEÜ, S. MENGÜÉ, and F. DUBOIS. An adaptation of the gear scheme for fractional derivatives. *Comp. Methods in Applied Mech. Engineering*, 195 :6073–6085, 2006.
- [8] R. GORENFLO and title= S. VESSELLA.
- [9] C.D. JOHNSON and D.A. KIENHOLZ. Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers. *AIAA Journal*, 20(9) :1284–1290, 1982.
- [10] R.C. KOELLER. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 51 :299–307, 1984.
- [11] G.A. LESIEUTRE and E. BIANCHINI. Time domain modeling of linear viscoelasticity using anelastic displacement field. *Journal of Vibration and Acoustics*, 117(4) :424–430, 1995.
- [12] J. LIGHTHILL. *Waves in fluids*. Cambridge University Press, London, 1978.
- [13] A. LION. On the thermodynamics of fractional damping elements. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 9 :83–96, 1997.
- [14] D.J. MCTAVISH and P.C. HUGHES. Modeling of linear viscoelastic space structures. *Journal of Vibration and Acoustics*, 115 :103–110, 1993.
- [15] K.B. OLDHAM, J. SPANIER. *The fractional calculus*. Academic Press, New York and London, 1974.
- [16] A. OUSTALOUP *La dérivation non entière : Théorie, synthèse et applications*. Hermes, Paris, 1995.
- [17] I. PODBLUNY. *Fractional differential equations*. Academic Press, 1999.
- [18] H. SCHLICHTING. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill Company, New York, 1955.
- [19] L. SCHWARTZ. *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques*, Hermann, Paris, 1961.
- [20] J.C. SIMO and T.R.J. HUGHES. *Computational inelasticity*. Springer, 1998.