Université Paris Sud Département de Mathématiques d'Orsay
Agrégation de mathématiques
Modélisation et calcul scientifique 10 décembre 2010

# Equation de la chaleur à une dimension spatiale

• On propose dans ce travail d'étudier la discrétisation d'un problème modèle pour l'équation de la chaleur, de la forme

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x)\,, \qquad 0 < x < 1$$

avec des conditions de Dirichlet homogènes :

$$(2) \quad u(0,\, t) = u(1,\, t) = 0\,, \qquad t > 0$$

et une condition initiale uniformément nulle :

$$(3) \quad u(x,\, 0) = 0\,, \qquad 0 < x < 1\,.$$

On utilise les séries de Fourier et la méthode des différences finies.

**Séries de Fourier**

**1)** On suppose d'abord le second membre $f$ donnée par un simple sinus :

$$(4) \quad f_1(x) = \sin\big(\pi\, x\big)\,, \qquad 0 < x < 1\,.$$

Rappeler l'expression de la fonction $u_1(x,\, t)$ solution du problème (1)(2)(3) dans ce cas. Développer un programme "Matlab" qui permet de représenter cette fonction relativement à la variable d'espace, pour un temps $t$ arbitraire.

**2)** On suppose maintenant que le second membre $f$ est un polynome du second degré :

$$(5) \quad f_2(x) = x\,(1-x)\,, \qquad 0 < x < 1\,.$$

Pour calculer le développement de cette fonction sur les modes de Fourier, on complète $f_2$ par imparité et on la périodise sur une période égale à 2. Montrer qu'on a

$$(6) \quad f_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \sin\big((2k+1)\,\pi\, x\big)\,, \qquad 0 < x < 1\,,$$

où l'on précisera l'expression des coefficients $a_k$. Adapter le programme "Matlab" de la première question afin de de représenter la solution $u_2(\bullet, t)$ de (1)(2)(3) avec $f \equiv f_2$ pour un temps $t$ arbitraire.

**Différences finies**
On se donne un entier $n$ supérieur ou égal à 1, on note $h = \frac{1}{n}$ le pas d'espace associé et on introduit une grille $x_j$ grâce à une subdivision régulière de l'intervalle $[0,\,1]$ :

(7) $\quad x_j \,=\, j\,h\,, \qquad 0 \leq j \leq n\,.$

Le pas de temps $\Delta t > 0$ est un nouveau paramètre de discrétisation. On note

(8) $\quad \sigma \,=\, \mu\,\dfrac{\Delta t}{h^2}$

le nombre sans dimension qui relie le paramètre "physique" $\mu$ et les paramètres "numériques" $h$ et $\Delta t > 0$ du problème. On approche $u\big(x_j,\,k\,\Delta t\big)$ par $u_j^k$ et on remplace l'équation aux dérivées partielles (1) par le schéma aux différences finies à trois points en espace et explicite en temps :

(9) $\quad \dfrac{1}{\Delta t}\big(u_j^{k+1} - u_j^k\big) \,-\, \dfrac{\mu}{h^2}\Big(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k\Big) = f(x_j)\,, \qquad 0 < j < n\,.$

Les conditions aux limites (2) sont prises en compte sous la forme

(10) $\quad u_0^k \,= u_n^k \,= 0\,, \qquad k \geq 0\,.$

**3)** Développer un programme "Matlab" qui approche la solution du problème (1)(2)(3)(4) avec la méthode des différences finies explicites décrite ci-dessus. Valider ce programme à l'aide de la question 1). Comment faut-il choisir le paramètre sans dimension $\sigma$ ?

**4)** Montrer avec une suite d'expériences numériques bien choisies que si l'on maintient constant le paramètre $\sigma$, l'erreur $\ell^\infty$ de la méthode des différences finies est du second ordre relativement au paramètre $h$ de discrétisation en espace.

**Différences finies implicites en temps**
Afin de s'affranchir de la restriction imposée au paramètre $\sigma$, on remplace le schéma explicite (9) par un schéma implicite en temps :

(11) $\quad \dfrac{1}{\Delta t}\big(u_j^{k+1} - u_j^k\big) \,-\, \dfrac{\mu}{h^2}\Big(u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}\Big) = f(x_j)\,, \qquad 0 < j < n\,,$

sans changer les conditions limites numériques (10).

**5)** Reprendre les questions 3) et 4) avec ce nouveau schéma.

**6)** Reprendre les questions 3) à 5) en remplaçant $f_1$ par des approximations convenables de $f_2$, d'une part *via* une série de Fourier et d'autre part à l'aide de différences finies explicites ou implicites. Laquelle des deux approches vous semble la plus simple ?

FD, 7 décembre 2010.