Université Paris Sud Département de Mathématiques d'Orsay
Agrégation de mathématiques
Modélisation et calcul scientifique 19 novembre 2010

Autour du Laplacien discret à une dimension d'espace

• On propose dans ce travail d'étudier la discrétisation de deux problèmes relatifs à l'équation de Poisson

(1) $$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = f\,, \qquad 0 < x < 1$$

à l'aide de deux approches classiques : les différences finies et les éléments finis. Le premier problème suppose des conditions de Dirichlet homogènes :

(2) $$u(0) = u(1) = 0$$

alors que le second utilise des conditions de Dirichlet-Neumann :

(3) $$u(0) = 0\,, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(1) = g\,.$$

Différences finies

On se donne un entier n supérieur ou égal à 1, on note

(4) $$h = \frac{1}{n}$$

le pas d'espace (uniforme) associé et on introduit une grille x_j grâce à une subdivision régulière de l'intervalle $[0,\,1]$:

(5) $$x_j = j\,h\,, \qquad 0 \leq j \leq n\,.$$

On remplace l'équation "aux dérivées partielles" (1) par le schéma aux différences finies "à trois points"

(6) $$\frac{1}{h^2}\big(-u_{j+1} + 2u_j - u_{j-1}\big) = f(x_j)\,, \qquad 0 < j < n\,.$$

1) Pour la fonction f donnée par

(7) $$f(x) = 3 - 6\,x\,, \qquad 0 < x_j < 1\,,$$

développer un programme "Matlab" qui permet de résoudre de façon approchée le problème (1)(2) avec le schéma aux différences finies (6). Quel est l'ordre du système linéaire associé ? Que remarquez-vous ? A l'aide d'un calcul explicite de la solution *exacte* du système (1)(2)(7), expliquer le phénomène observé.

2) Afin de passer à un comportement plus général, on remplace la fonction f de la relation (7) par

$$(8) \quad f(x) = \frac{22}{9} - 12\,x + 12\,x^2\,, \qquad 0 < x < 1\,,$$

sans rien changer aux conditions aux limites (2). Adapter l'étude précédente pour cette nouvelle fonction. Montrer de façon expérimentale que lorsque l'entier n tend vers l'infini, l'erreur ℓ^∞ entre la solution exacte u (que l'on calculera "sur un coin de table") et la solution u^n approchée pour n mailles, qui est définie par la relation

$$(9) \quad \| \, u - u^n \, \|_\infty \equiv \sup_{j=0,\,\dots,\,n} \, | \, u(x_j) - u_j^n \, |\,,$$

tend vers zéro comme $\frac{1}{n^2}$. On dit pour cette raison que le schéma aux différences finies est précis "au deuxième ordre".

3) On remplace maintenant les conditions aux limites de Dirichlet homogènes (2) par les conditions "de Dirichlet-Neumann" (3). On choisit la fonction f selon la relation (7) et on prend le scalaire g égal à un demi :

$$(10) \quad g = \frac{1}{2}\,.$$

On approche la condition limite de Neumann en $x = 1$ par le schéma décenté très simple :

$$(11) \quad \frac{1}{h}\,\big(u_n - u_{n-1}\big) = g\,.$$

Adapter le programme "Matlab" développé plus haut pour approcher numériquement le problème (1)(3)(7) avec le schéma aux différences finies (6)(11). Quel est l'ordre de convergence de l'erreur ℓ^∞ si n tend vers l'infini ? Etes-vous satisfait de ce comportement asymptotique ?

4) Afin de remédier au défaut constaté plus haut, on change de schéma numérique pour approcher la condition de Neumann en $x = 1$. On remplace le schéma décentré (11) par le schéma de Gear :

$$(12) \quad \frac{1}{h}\left(\frac{3}{2}u_n - 2\,u_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n-2}\right) = g\,.$$

Calculer l'erreur de troncature de ce schéma à la limite. Adapter le programme "Matlab" développé précédemment pour approcher numériquement le problème (1)(3)(7)(10) avec le schéma aux différences finies (6)(12). Quel est maintenant l'ordre de convergence de l'erreur ℓ^∞ si n tend vers l'infini ?

Eléments finis

L'entier n étant donné comme pour la méthode des différences finies, on introduit à nouveau le paramètre h par la relation (4) et les sommets x_j à l'aide de la relation (5). L'approche par éléments finis introduit des "fonctions de base" φ_j affines sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ et continues sur $[0, 1]$ de sorte que

(13) $\quad \varphi_j(x_k) = \delta_{jk}\,, \qquad 0 \leq j, k \leq n\,.$

On transforme d'abord le problème (1)(2) en une formulation variationnelle qui consiste à chercher u_h dans un espace V_h de dimension finie engendré par des fonctions φ_j présentées plus haut et que l'on précisera. Montrer qu'elle s'écrit

(14) $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u_h}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \,=\, \int_0^1 f(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \forall\, v \in V_h\,.$$

5) Comment adapter le programme aux différences finies de la première question pour résoudre le problème (14) ? On pourra en particulier remplacer f au second membre de la relation (14) par son interpolé f_h qui s'écrit

(15) $$f_h \,=\, \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\,\varphi_j$$

et utiliser la "matrice de masse" M d'élément générique

(16) $$M_{jk} \,=\, \int_0^1 \varphi_j(x)\,\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x$$

qui se calcule de façon élémentaire. Traiter le cas des seconds membres f donnés aux relations (7) et (8) avec le programme précédent. Reprendre les questions posées en 1) et 2).

6) Pour passer au problème de Dirichlet-Neumann (1)(3), on modifie la formulation variationnelle (14). Montrer que la nouvelle formulation variationnelle consiste à chercher $u_h \in W_h$ tel que

(17) $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u_h}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \,=\, \int_0^1 f(x)\,v(x)\mathrm{d}x \,+\, g\,v(1)\,, \quad \forall\, v \in W_h\,.$$

On précisera avec soin de choix de l'espace de fonctions W_h. Traiter complètement le cas du problème (1)(3)(10) lorsque le second membre f est donné par la relation (7). Quel est le comportement de l'erreur ℓ^∞ définie en (9) si l'entier n tend vers l'infini ?

FD, 12 novembre 2010.