Université Paris Sud — Département de Mathématiques d'Orsay
Agrégation de mathématiques
Modélisation et calcul scientifique

09 octobre 2009

Minimisation pour un problème de Neumann

• On se donne un entier N et une famille $\big(f_{j+1/2}\big)_{0\leq j\leq N-1}$ de nombres réels. De façon indépendante, étant donné un vecteur $\big(u_j\big)_{0\leq j\leq N}$ de $\mathbb{R}^{N+1}$, on pose

$$(1) \qquad J_N(u) \,=\, \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle \frac{N}{2} \sum_{j=0}^{N-1} (u_{j+1}-u_j)^2 \,+\, \frac{1}{8\,N} \sum_{j=0}^{N-1} (u_{j+1}+u_j)^2 \\ \qquad \displaystyle -\frac{1}{2\,N} \sum_{j=0}^{N-1} f_{j+1/2}\,(u_{j+1}+u_j)\,. \end{array} \right.$$

On cherche à minimiser cette fonctionnelle.

1) Méthode du gradient à pas constant

• Le gradient de la fonction $J_N(\bullet)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$. Calculer ses composantes.

• Dans le cas où la donnée $\big(f_{j+1/2}\big)_{0\leq j\leq N-1}$ a la forme algébrique suivante

$$(2) \quad f_{j+1/2} \,=\, -23 \,+\, \frac{48}{N}\Big(j+\frac{1}{2}\Big) \,+\, \frac{12}{N^2}\Big(j+\frac{1}{2}\Big)^2 \,-\, \frac{8}{N^3}\Big(j+\frac{1}{2}\Big)^3 \,,$$

mettre en œuvre la méthode du gradient à pas constant. Elle consiste à se donner un vecteur initial $u^0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ [par exemple constant], un coefficient $\rho > 0$ [la valeur $\rho = \frac{1}{100}$ nous a donné satisfaction pour $N = 30$] et à calculer u^{k+1} à partir de u^k à l'aide de la relation suivante :

$$(3) \quad u^{k+1} \,=\, u^k \,-\, \rho\,\nabla J\big(u^k\big)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

• On pourra représenter chaque itération en considérant les valeurs $\big(u_j\big)_{0\leq j\leq N}$ comme la discrétisation d'une fonction $u(x)$ avec $x \in [0,\,1]$.

2) Résolution des équations d'Euler de l'optimum

• Ecrire les équations $\nabla J(u^*) = 0$ sous la forme d'un système linéaire d'inconnue $u^* \in \mathbb{R}^{N+1}$.

• Résoudre numériquement ce système et comparer la solution obtenue avec les valeurs u^k obtenues à la question précédente. Que remarquez-vous ?

3) Calcul d'une "solution exacte continue"

• La fonctionnelle $J_N(\bullet)$ introduite à la relation (1) est la discrétisation à l'ordre N d'un problème de minimisation continue que l'on écrira.

• Montrer que ce problème de minimisation continue s'interprète comme un problème de Neumann homogène pour un opérateur monodimensionnel qu'on précisera.

• Ce problème admet une solution analytique simple lorsque le second membre est donné par la relation (2), solution qu'on pourra exprimer et comparer après discrétisation avec les vecteurs u^k et u^* calculés aux questions précédentes.

FD, 04 octobre 2009.