Université Paris Sud — Département de Mathématiques d'Orsay
Agrégation de mathématiques
Modélisation et calcul scientifique — 28 novembre 2008

Algorithme de Newton

1) Fonction réelle d'une variable réelle
On se donne la fonction polynomiale suivante :

(1) $f(x) \,=\, (x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-5)\,(x-7)\,(x-8) \,-\, 20$

et on se propose de résoudre l'équation

(2) $f(x) = 0\,.$

Si on part suffisamment près d'une racine où la dérivée ne s'annule pas, l'algorithme de Newton qui s'écrit

(3) $x^{k+1} \,=\, x^k \,-\, \dfrac{1}{f'(x^k)}\, f(x^k)$

permet une convergence quadratique vers la solution, donc très rapide en pratique.

• Après avoir montré que l'équation (1)(2) a effectivement six solutions réelles, on demande de les calculer toutes avec la précision maximale que permet le logiciel "Matlab".

2) Intersection de courbes dans le plan.
On rappelle que le Folium de Descartes, d'équation

(4) $x^3 \,+\, y^3 \,=\, 3\,x\,y$

se dessine facilement à l'aide du paramètre $t = \frac{y}{x}$. On se propose de calculer numériquement tous les points d'intersection de cette courbe algébrique avec la courbe transcendante d'équation

(5) $y \,=\, \cos x\,.$

On dispose maintenant d'un vecteur $u \,\equiv\, (x,\, y) \,\in\, \mathbb{R}^2$ et d'une fonction $\mathbb{R}^2 \ni u \longmapsto f(u) \in \mathbb{R}^2$. Le problème d'intersection posé par le système (4)(5) peut sécrire

(6) $f(u) \,=\, 0\,.$

Si l'équation (6) admet une solution u^* pour laquelle la jacobienne $\mathrm{d}f(u^*)$ est inversible, alors l'algorithme de Newton, qui s'écrit maintenant

$$(7) \quad u^{k+1} \,=\, u^k \,-\, \big(\mathrm{d}f(u^k)\big)^{-1} \bullet f(u^k)$$

converge de façon quadratique pourvu qu'il soit correctement initialisé.

• Utiliser l'alogorthme (7) pour approcher avec quinze chiffres significatifs les trois points du plan qui vérifient les équations (4) et (5).

3) Optimisation sous contrainte égalité.
On cherche à déterminer le point du Folium de Descartes le plus proche du point $a = (1,\, 0)$. Pour cela on introduit la fonction

$$(8) \quad J(x,\, y) \,=\, (x-1)^2 \,+\, y^2 \,.$$

• En introduisant un multiplicateur de lagrange λ associé à la contrainte (4), écrire le système des (trois) équations d'Euler-Lagrange associé à cet optimum sous contrainte. Résoudre ce système par un algorithme de Newton (7) qu'on pourra initialiser par la condition

$$(9) \quad x^0 = 1\,,\;\; y^0 = 0\,,\;\; \lambda^0 = 0\,.$$

Combien faut-il d'itérations pour atteindre les limites de précision de votre version de "Matlab" ?

• Que se passe-t-il si on remplace $a = (1,\, 0)$ par l'origine ?

FD, 25 novembre 2008.