

## Algorithme de Uzawa

On se propose de déterminer numériquement la solution du problème

$$(1) \quad \begin{cases} u \in K \\ J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in K \end{cases}$$

pour une fonction  $J(\bullet)$  quadratique

$$(2) \quad J(x, y) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{x-a}{\alpha} \right)^2 + \left( \frac{y-b}{\beta} \right)^2 \right)$$

avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  et  $K$  l'un des deux convexes suivants :

$$(3) \quad K_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \right\}$$

$$(4) \quad K_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + xy + y^2 \leq 1, x^2 - xy + y^2 \leq 1 \right\}.$$

### 1) Gradient projeté.

Dans le cas où l'opérateur de projection  $P_K$  sur le convexe  $K$  est calculable facilement, l'algorithme du gradient projeté s'écrit

$$(5) \quad u^{k+1} = P_K \left( u^k - \rho \nabla J(u^k) \right), \quad k \in \mathbb{N}$$

avec  $\rho > 0$  fixé "au mieux".

- Mettre en œuvre cet algorithme dans le cas où  $K = K_1$ .

### 2) Description et mise en œuvre de l'algorithme de Uzawa

Dans le cas où le calcul effectif de l'opérateur  $P_K$  est délicat (c'est le cas pour  $K = K_2$  !) voire impossible, on suppose pour fixer les idées que le convexe  $K$  est défini par le jeu d'inéquations

$$(6) \quad F_j(u) \leq 0, \quad j = 1, 2$$

où  $F_j(\bullet)$  est une fonction convexe continue de  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On introduit le Lagrangien

$$(7) \quad \mathcal{L}(u, \lambda) = J(u) + \sum_{j=1}^2 \lambda_j F_j(u).$$

Rappelons que pour  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ , la notation  $\lambda \geq 0$  signifie  $\lambda_1 \geq 0$  et  $\lambda_2 \geq 0$ . On vérifie sans peine qu'on a

$$(8) \quad \sup_{\lambda \geq 0} \mathcal{L}(u, \lambda) = \begin{cases} +\infty & \text{si } u \notin K \\ J(u) & \text{si } u \in K. \end{cases}$$

On pose alors

$$(9) \quad g(\lambda) = \inf_{u \in \mathbb{R}^2} \mathcal{L}(u, \lambda).$$

Vérifier qu'on a

$$(10) \quad \frac{\partial g}{\partial \lambda_j}(\lambda) = F_j(u^*(\lambda)), \quad j = 1, 2$$

où  $u^*(\lambda)$  est le point de minimum de la solution du problème (9). L'algorithme de Uzawa consiste à utiliser l'algorithme du gradient projeté pour le problème dual

$$(11) \quad \begin{cases} \lambda \geq 0 \\ g(\lambda) \geq g(\mu), \quad \forall \mu \geq 0 \end{cases}$$

ce qui revient à minimiser à  $\lambda$  fixé le Lagrangien  $\mathcal{L}(u, \lambda)$  par rapport à  $u$  sans la contrainte  $u \in K$ , puis à modifier le multiplicateur  $\lambda$  grâce au gradient de  $g$  évalué à l'aide de la relation (10). L'algorithme s'écrit donc en deux étapes :

$$(12) \quad \begin{cases} u^k \in \mathbb{R}^2 \\ \mathcal{L}(u^k, \lambda^k) \leq \mathcal{L}(v, \lambda^k), \quad \forall v \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

$$(13) \quad \lambda^{k+1} = P_+(\lambda^k + \rho \nabla g(\lambda^k)), \quad \rho > 0$$

où  $P_+$  est le projecteur sur le convexe  $K_+$  des contraintes du problème dual :

$$(14) \quad K_+ = \{\lambda, \lambda \geq 0\}.$$

- Utiliser l'algorithme de Uzawa pour résoudre le problème (1) avec la fonction  $J$  donnée à la relation (2) pour  $K = K_1$  et  $K = K_2$  successivement. On pourra dessiner les convexes et placer les itérés  $u^k$  de l'algorithme.