Dubois

001

QUELQUES ASPECTS DE LA MODELISATION EN MECANIQUE DES FLUIDES

R. PEYRET

Département de Mathématiques
Université de Nice

COURS INRIA 84

"Simulation numérique en Mécanique des Fluides"

30 Janvier - 3 Février 1984

Table des Matières.

I. Ecoulements d'un fluide compressible
1. Dynamique d'un fluide compressible
2. Equations de Navier-Stokes
3. Grandeurs adimensionnelles
4. Nature des Equations. Conditions initiales et aux limites.
4.1. Cas des équations d'Euler
4.2. Equations de Navier-Stokes
4.3. Conditions sur une paroi
5. Fluide parfait compressible. Equations d'Euler
5.1. Enthalpie totale, Equation de Bernoulli
5.2. Discontinuités. Ondes de choc
5.3. Vecteur Tourbillon
6. Ecoulement autour d'un profil
7. Ecoulement potentiel.

II. Ecoulements d'un fluide incompressible.
1. Equations de Navier-Stokes
2. Equation de Poisson pour la pression
3. Formulation Vecteur-Courant / Tourbillon

Bibliographie.

I. ECOULEMENTS D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE

1. DYNAMIQUE D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE

* Cinématique : $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$ = vecteur vitesse

$\vec{V}(\vec{x}, t)$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

* Thermodynamique :

ρ = masse volumique , p = pression, T = Température

e = énergie interne spécifique, s = entropie spécifique

etc.

$\Rightarrow$ l'état thermodynamique est complètement déterminé si l'on connaît 2 variables, les autres s'en déduisent par les relations classiques de thermo.

2. EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

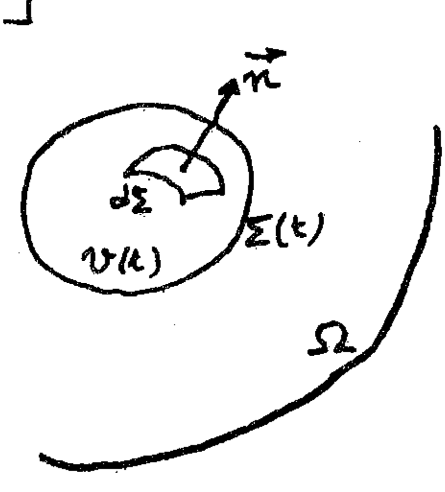
* Equations de conservation traduisant les lois fondamentales de la Dynamique.

- Masse (ρ)
- Quantité de Mouvement $(\rho \vec{V})$
- Energie $[\rho E \equiv \rho(e + \vec{V}^2/2)]$

* Volume $\vartheta(t)$ qu'on suit dans son mouvement

$\Sigma(t) = \partial \vartheta(t)$

$\vec{n}$ = normale extérieure à Σ



EQUATION DE LA MASSE

$$\frac{d}{dt}\int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,dv = 0 \tag{2.1}$$

$$\int_{v(t)} \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho\, \nabla.\vec{V} \right] dv = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}.\nabla \tag{2.3}$$

Eq.(2.2) vraie pour $\forall v \in \Omega \times [t_0, T]$:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, \nabla.\vec{V} = 0 \tag{2.4}$$

: forme "non conservative"

soit

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla.(\rho\vec{V}) = 0 \tag{2.5}$$

: forme "conservative"

EQUATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

(2.6) $$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}(t)} \rho \vec{V}\, d\mathcal{V} = \int_{\Sigma(t)} \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{n}\, d\Sigma$$

(2.7) $\overleftrightarrow{\sigma}$ = Tenseur des contraintes

(2.8) $$\int_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \vec{V}\vec{V} - \overleftrightarrow{\sigma} \right) \right] d\mathcal{V} = 0$$

(2.9) $$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \vec{V}\vec{V} - \overleftrightarrow{\sigma} \right) = 0$$

Fluide newtonien :

(2.10.a) $$\overleftrightarrow{\sigma} = -p \overleftrightarrow{I} + \overleftrightarrow{\tau}$$

(2.10.b) $$\overleftrightarrow{\tau} = \lambda (\nabla \cdot \vec{V}) \overleftrightarrow{I} + 2\mu \overleftrightarrow{D}$$

= tenseur des contraintes visqueuses

$\overleftrightarrow{I}$ = tenseur unité

(2.10.c) $$\overleftrightarrow{D} = \frac{1}{2}\left\{ (\nabla \vec{V}) + (\nabla \vec{V})^T \right\}$$

= tenseur des taux de déformation

λ, μ = Coefficients de viscosité

Viscosité.

(2.11) $$\lambda = \lambda(T) \qquad \mu = \mu(T)$$

* 2nd Principe de la Thermo. ⇒

(2.12) $$3\lambda + 2\mu \geqslant 0 \qquad \mu \geqslant 0$$

* Relation de Stokes :

(2.13) $$3\lambda + 2\mu = 0$$

(Exacte pour un gaz monoatomique)

EQUATION DE L'ENERGIE

(2.14) $$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}(t)} \rho\left(e + \frac{\vec{V}^2}{2}\right) dv = \int_{\Sigma(t)} \left[(\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\vec{n}).\vec{V} - \vec{q}\,\right] d\Sigma$$

(2.15) $\vec{q}$ = Vecteur Flux de Chaleur.

(2.16) $$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla.\left(\rho E \vec{V} - \overleftrightarrow{\sigma}.\vec{V} + \vec{q}\,\right) = 0$$

(2.17) $E = e + \vec{V}^2/2$ = Energie totale spécifique

Loi de Fourier

(2.18) $$\vec{q} = -k\,\nabla T$$

(2.19) $k = k(T) \geqslant 0$
= conductibilité thermique

Récapitulation:

Eq. Masse $\Rightarrow$ 1 éq. scalaire

Eq. Qtté de Mvt $\Rightarrow$ 1 éq. vectorielle

Eq. Energie $\Rightarrow$ 1 éq. scalaire.

Inconnues : $\vec{V}, \rho, p, T, e$

* Il manque deux équations $\Rightarrow$

Loi d'état :

(2.20) $$s = s(\rho, e)$$

On en déduit :

(2.21) $$T = \frac{1}{\left(\frac{\partial s}{\partial e}\right)_\rho} \quad \text{et} \quad p = -\rho^2 T \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_e$$

Gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes

(2.22) $$s = \frac{R}{\gamma - 1} \operatorname{Log}\left\{(\gamma-1) e \rho^{1-\gamma}\right\} + \text{const.}$$

(2.23) $$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \text{const.}, \quad R = C_p - C_v = C_v(\gamma - 1)$$

D'où

(2.24) $$T = \frac{e}{C_v} \quad \text{et} \quad p = R\rho T = (\gamma-1)\rho e$$

EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

(2.25) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$$

(2.26) $$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}\vec{V} - \overleftrightarrow{\sigma}) = 0$$

(2.27) $$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \vec{V} - \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{V} + \vec{q}) = 0$$

(2.28) $$\overleftrightarrow{\sigma} = (-p + \lambda \nabla \cdot \vec{V}) \overleftrightarrow{I} + \mu [\nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T]$$

(2.29) $$\vec{q} = -k \nabla T$$

(2.30) $$p = (\gamma - 1)\rho e \; , \quad e = c_v T$$

Cas particuliers :

* *fluide non visqueux, non conducteur chaleur*

$\Rightarrow$ Equations d'EULER.

(2.31) $$\lambda = \mu = 0 \Rightarrow \overleftrightarrow{\sigma} = -p \overleftrightarrow{I}$$

(2.32) $$k = 0 \Rightarrow \vec{q} = 0$$

$\Rightarrow$ Plus de dérivées secondes.

* *fluide incompressible* :

(2.33) $$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

(2.34) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho = 0$$

Si $\rho(\vec{x}, t_0) = \text{const.}$ Alors $\rho(\vec{x}, t) = \text{const.} \; \forall t > t_0$

$\Rightarrow$ Equation de l'énergie découplée si $\mu = \text{cons}$[t]

Inconnues : $\vec{V}$, p

3. GRANDEURS ADIMENSIONNELLES

(3.1) $$\phi' = \frac{\phi}{\phi_*}$$

Grandeurs de Référence : ϕ_*

$L \quad V_* \quad \rho_* \quad T_* \quad \mu_* \quad k_*$

(3.2) $$t_* = L / V_*$$

$$\overleftrightarrow{\sigma} : \rho_* V_*^2 \qquad p : \rho_* V_*^2 \qquad \overleftrightarrow{\tau} : \rho_* V_* / L$$

$$e, E : V_*^2 \qquad \vec{q} : \rho_* V_*^3$$

* Equations Masse, Quantité de Mouvement et Energie restent inchangées.

* Lois constitutives :

(3.3) $$\overleftrightarrow{\sigma}' = - p' \overleftrightarrow{I} + \frac{1}{Re} \overleftrightarrow{\tau}'$$

(3.4) $$\overleftrightarrow{\tau}' = \lambda' (\nabla' \cdot \vec{V}') \overleftrightarrow{I} + 2\mu' \overleftrightarrow{D}' \qquad 2\overleftrightarrow{D}' = \nabla' \vec{V}' + (\nabla' \vec{V}')$$

(3.5) $$\vec{q}' = - \frac{\gamma}{Re \, Pr} k' \nabla' e'$$

(3.6) $$e' = \frac{T'}{\gamma(\gamma-1) M_*^2} \qquad p' = (\gamma - 1) \rho' e'$$

(3.7) $$Re = \frac{\rho_* V_* L}{\mu_*}$$ = Nombre de Reynolds

(3.8) $$Pr = \frac{\mu_* c_p}{k_*}$$ = Nombre de Prandtl

(3.9) $$M_* = \frac{V_*}{c_*} = \frac{V_*}{\sqrt{\gamma R T_*}}$$ = Nombre de Mach

4. NATURE DES EQUATIONS - CONDITIONS INITIALES ET AUX LIMITES

(Biblio : STRIKWERDA, 1977 ; GUSTAFFSON-SUNDSTRÖM 1978)

(4.1) $$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \nabla \vec{V} = 0 \qquad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla$$

(4.2) $$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} + \nabla p = \frac{1}{Re}\Big[\mu \, \Delta \vec{V} + (\lambda+\mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) + (\nabla \cdot \vec{V}) \nabla \lambda + \overleftrightarrow{D} \cdot \nabla \mu \Big]$$

(4.3) $$\rho \frac{De}{Dt} + p \, \nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{Re}\Big[\frac{\gamma k}{Pr} \Delta e + \frac{\gamma}{Pr} (\nabla k) \cdot (\nabla e) + \Phi \Big]$$

(4.4) $$\Phi = \overleftrightarrow{\tau} : \nabla \vec{V} = \text{fonction de dissipation} > 0$$

* CONDITIONS INITIALES

(4.5) $\rho, \vec{V}, e$ donnés à $t = 0$.

* Les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

(4.6) $$W = (\rho \quad V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad e)^T$$

(4.7) $$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_j A^{(j)}(W) \frac{\partial W}{\partial x_j} = \frac{1}{Re}\Big[\sum_{j,k} B^{(j,k)}(W) \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_j C^{(j)}\Big(\frac{\partial W}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial x_3}\Big) \frac{\partial W}{\partial x_j} \Big]$$

4.1. CAS DES EQUATIONS D'EULER.

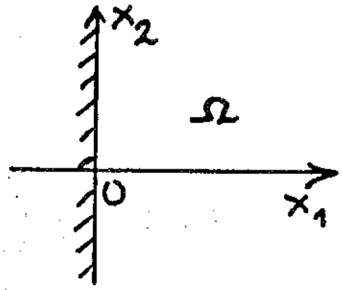
(4.8) $$Re^{-1} = 0$$

(4.9) $$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_j A^{(j)} \frac{\partial W}{\partial x_j} = 0$$: hyperbolique

* CONDITIONS AUX LIMITES :

→ Cas 2-D : $\vec{V} = (V_1, V_2)$, $\vec{x} = (x_1, x_2)$

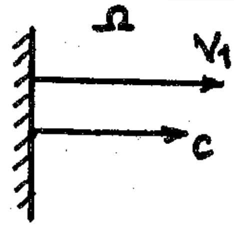
→ 1/2 Plan $x_1 \geq 0$, $-\infty < x_2 < \infty$



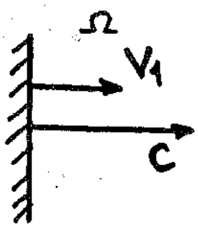
Nombre de conditions =
= Nombre de valeurs propres positives de $A^{(1)}\big|_{x_1=0}$

v.p. $= V_1, V_1, V_1 - c, V_1 + c \quad (c>0)$

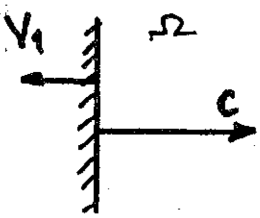
(1) $0 < c < V_1$ 4 conditions Entrée Supersonique



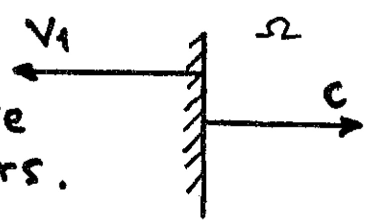
(2) $0 < V_1 < c_1$ 3 conditions Entrée Subsonique



(3) $-c < V_1 < 0$ 1 condition Sortie Subson.



(4) $V_1 < -c$ 0 condition Sortie Supers.



4.2. EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

$$Re^{-1} \neq 0 \qquad (4.10)$$

$\Rightarrow$ Système "incomplètement parabolique"

$$B^{(j,k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0\;0\;0\;0 \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} \left(B_{I}^{(j,k)} \right) \end{matrix} \; \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad W = \left\{ \begin{matrix} \rho \equiv W^{II} \\ \left. \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ e \end{matrix} \right\} \equiv W^{I} \end{matrix} \right. \qquad (4.11)$$

Système I :

$$\frac{\partial W^{I}}{\partial t} = \frac{1}{Re} \left[\sum_{j,k} B_{I}^{(j,k)} \frac{\partial^2 W^{I}}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j} C_{I}^{(j)} \frac{\partial W^{I}}{\partial x_j} \right] \qquad (4.12)$$

Parabolique.

Système II :

$$\frac{\partial W^{II}}{\partial t} + \sum_{j} A_{II}^{(j)} \frac{\partial W^{II}}{\partial x_j} = 0 \qquad (4.13)$$

hyperbolique

Ici :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} = 0 \qquad (4.14)$$

* L'étude sépare les deux systèmes.

* Conditions assurant que le problème est bien posé.

Cas unidimensionnel

(4.15) $$W_t = B\,W_{xx} + A\,W_x$$

(4.16) $$W_t = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{I} \\ W^{II} \end{pmatrix}_{xx} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{I} \\ W^{II} \end{pmatrix}_{x}$$

A, B : Matrices constantes symétriques

B : définie positive

Conditions aux limites :

(4.17) $$R\,W_x + S\,W = 0, \qquad x = 0$$

Condition initiale :

(4.18) $$W = W_0, \qquad t = 0$$

Méthode de l'énergie :

$$\frac{d}{dt}\|W\|^2 = -\left[W^T A\,W + 2\,W^T B\,W_x\right]_{x=0} - 2\int_0^{\infty} W_x^T\,B\,W_x\,dx$$

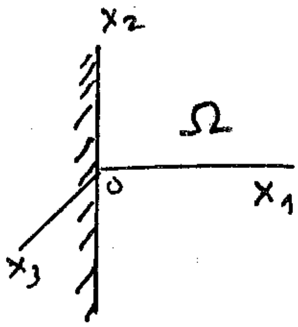
* Si l'on peut choisir les conditions aux limites telles que

(4.19) $$\left[W^T A\,W + 2\,W^T B\,W_x\right]_{x=0} \geq 0$$

Alors

(4.20) $$\|W(t)\| \leq \|W_0\| \qquad \forall\, t \geq 0$$

Conditions aux limites:



$x_1 = 0$

1/2 espace $\begin{cases} x_1 \geqslant 0 \\ -\infty < x_2, x_3 < \infty \end{cases}$

m = Nombre de conditions en $x_1 = 0$

(4.21) $$m = r + p$$

r = Rang de $B_{I}^{(1,1)}$

p = Nombre de valeurs propres positive de $A_{II}^{(1)}$.

Cas 2-D :

$x_1 \geq 0, \quad -\infty < x_2 < \infty$

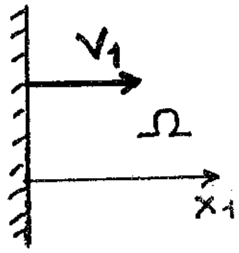
(4.22) $$r = 3$$

$$A_{II}^{(1)} \equiv V_1$$

$V_1 > 0 \qquad p = 1$

(1) $m = r + p = 4$ conditions

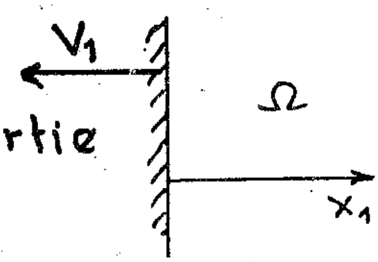
Entrée



$V_1 < 0 \qquad p = 0$

(2) $m = r + p = 3$ conditions

Sortie



CONDITIONS DE GUSTAFFSON & SUNDSTRÖM (1978)

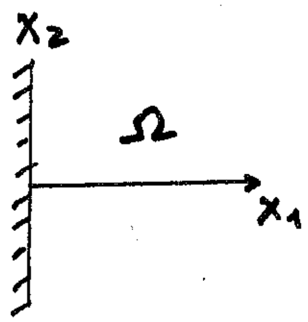
(4.23) $\lambda, \mu, k = \text{const.}, \qquad \Phi = 0$, Cas 2.D.

* Entrée supersonique :

(4.24) V_1 , V_2 , ρ e

* Sortie supersonique :

(4.25) $\dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} \qquad \dfrac{\partial V_2}{\partial x_1} \qquad \dfrac{\partial e}{\partial x_1}$



* Entrée subsonique :

(4.26) V_2

(4.27) $V_1 + 2\left(\dfrac{\gamma e}{\gamma - 1}\right)^{1/2}$: Invariant de Riemann

(4.28) $e\, p^{(1-\gamma)/\gamma}$: Entropie

(4.29) $(2\mu + \lambda)\dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} - \dfrac{k}{P_r}\left(\dfrac{\gamma(\gamma-1)}{e}\right)^{1/2}\dfrac{\partial e}{\partial x_1}$

* Sortie subsonique :

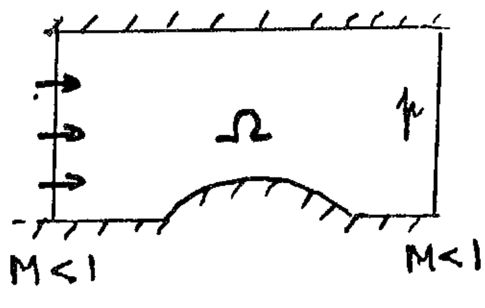
(4.30) $V_1 \qquad \dfrac{\partial V_2}{\partial x_1} \qquad \dfrac{\partial e}{\partial x_1}$

$\Rightarrow$ Problème bien posé même quand $Re \to \infty$

CONDITIONS VIVIAND-VEUILLOT (1978) : (Entrée et Sortie subsoniques)
$Re^{-1} = 0$

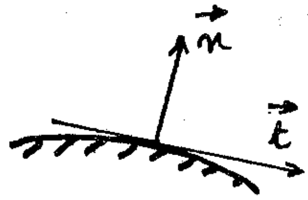
(4.31) $\begin{cases} V_2 = 0 \\ \frac{1}{2} V_1^2 + \gamma e = \text{enthalpie totale} \\ s = \text{entropie} \end{cases}$

[+ Relation de compatibilité]



4.3. CONDITIONS SUR UNE PAROI (IMPERMEABLE)

* FLUIDE VISQUEUX :
  EQUATIONS DE N.-S.



→ Adhérence : $\vec{V}$

(4.32) $$V_n = \vec{V}\cdot\vec{n} = 0$$

(4.33) $$\vec{V}_t = 0$$

→ Température (⇒ énergie interne $e = C_v T$)

ou bien T donné :

(4.34) $$T = T_w$$

ou bien le flux est donné

(4.35) $$k\frac{\partial T}{\partial n} = q_w \qquad q_w = 0 \Rightarrow \text{paroi adiabatique.}$$

* Cas du régime de glissement ("slip flow") :

• $10^{-2} < K_n = \dfrac{\ell}{L} < 10^{-1}$ $\quad K_m = \sqrt{\dfrac{\pi\gamma}{2}}\,\dfrac{M_*}{Re}$

ℓ = libre parcours moyen
L = longueur macroscopique caractéristique des gradients locaux

(4.36) $$\begin{cases} V_n = 0 \\ \vec{V}_t = A\dfrac{\partial \vec{V}_t}{\partial n} + B\,\nabla_t T \\ T - T_w = C\dfrac{\partial T}{\partial n} \end{cases}$$

[KOGAN (1973)]

* FLUIDE PARFAIT : EQUATIONS D'EULER

(4.37) $$Re^{-1} = 0$$

Condition de glissement (unique) :

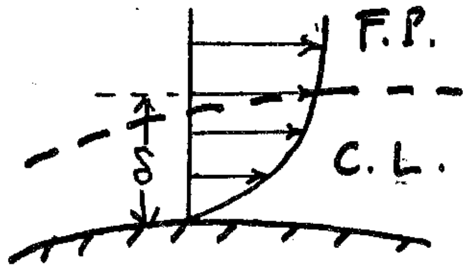
(4.38) $$V_n = 0$$

* LIMITE $Re \rightarrow \infty$

$\Rightarrow$ Perturbation singulière

$\Rightarrow$ Existence de couche-limite

* Eq. Couche-limite : parabolique dans la direction de l'écoulement



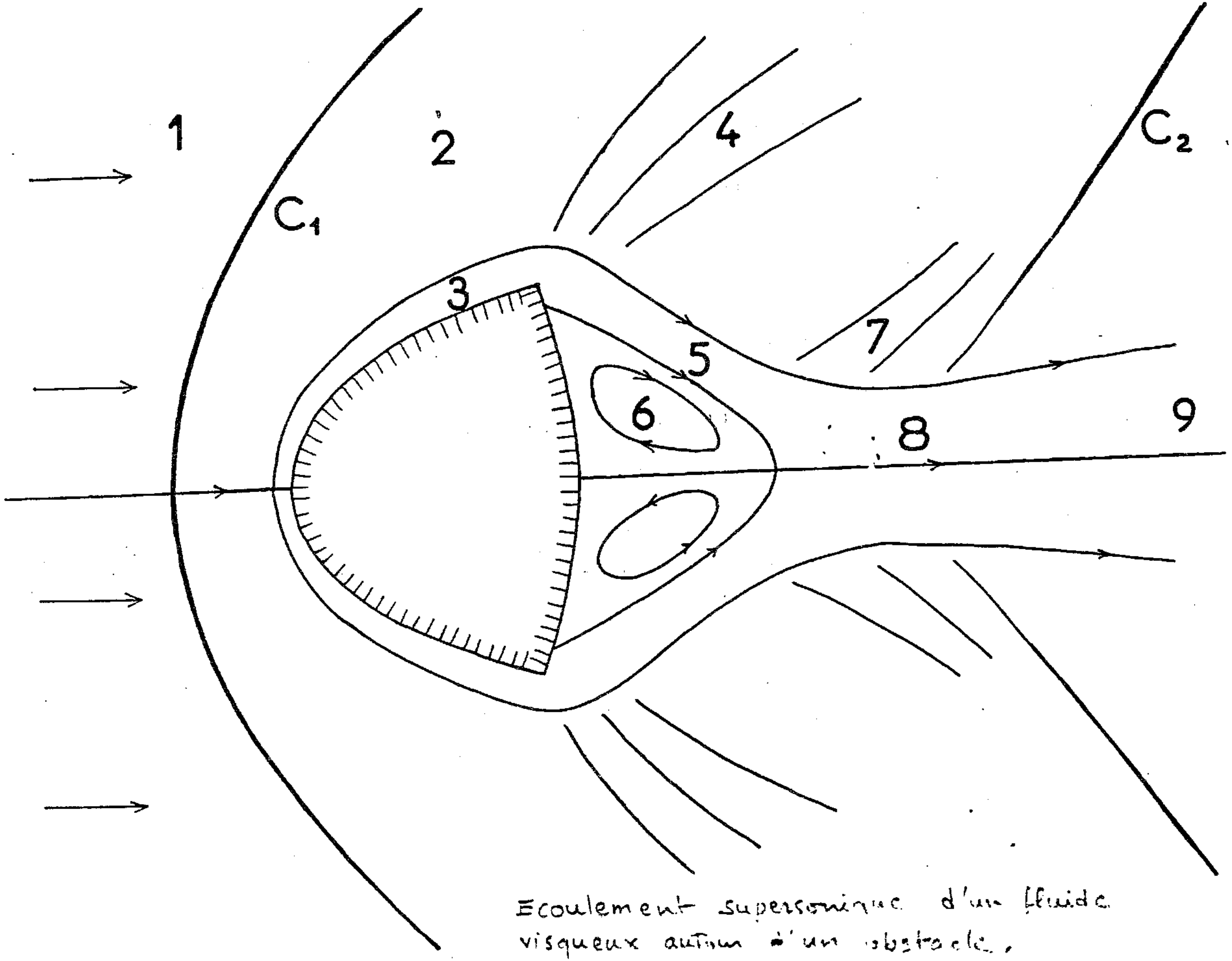
$$\delta = O\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right)$$

[ROSENHEAD 1963, BLOTTNER 1975]

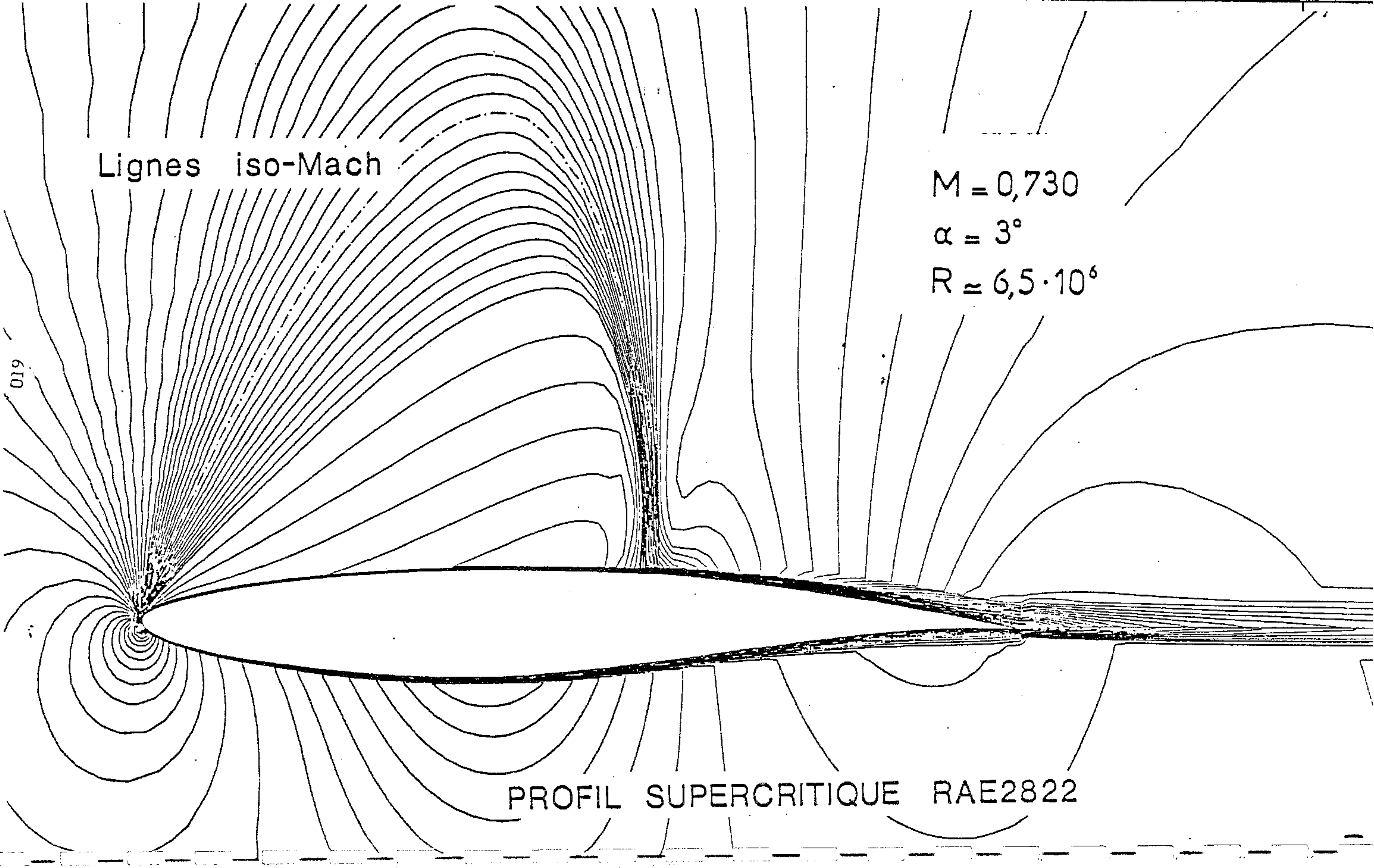
* Eq. Euler

* Couplage Fluide visqueux - Fluide parfait

* Sur les problèmes de Couplage : LE BALLEUR, 1984



Ecoulement supersonique d'un fluide visqueux autour d'un obstacle.


Lignes iso-Mach
M = 0,730
α = 3°
R ≃ 6,5·10⁶
PROFIL SUPERCRITIQUE RAE2822

5. FLUIDE PARFAIT COMPRESSIBLE :

EQUATIONS D'EULER.

(5.1) $$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla . \vec{V} = 0 \qquad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} . \nabla$$

(5.2) $$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} + \nabla p = 0$$

(5.3) $$\rho \frac{De}{Dt} + p \nabla . \vec{V} = 0$$

(5.4) $$p = (\gamma - 1) \rho e$$

5.1. Enthalpie totale - Equation de Bernoulli

(5.5) $$h_0 = h + \frac{V^2}{2} = \text{Enthalpie totale}$$

(5.6) $$h = e + \frac{p}{\rho} = \gamma e = \text{Enthalpie}$$

Eq.(5.2) s'écrit encore :

(5.6) $$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) + (\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0$$

Relation thermodynamique :

(5.7) $$dh = T\, ds + \frac{dp}{\rho}$$

(5.8) $$\nabla h = T \nabla s + \frac{1}{\rho} \nabla p$$

On élimine $\frac{1}{\rho} \nabla p$ d'entre (5.6) et (5.8), on obtient la Relation de CROCCO :

(5.9) $$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla\left(h + \frac{V^2}{2}\right) = T\,\nabla s + \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})$$

* L'équation de l'énergie (5.3) s'écrit encore :

(5.10) $$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{V}.\nabla s = 0$$

* $\vec{V}$. Eq. (5.9) :

(5.11) $$\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial t} + T\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{V}.\nabla\left(h + \frac{V^2}{2}\right) = 0$$

* Si Ecoulement stationnaire $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$
Alors

(5.12) $$\vec{V}.\nabla\left(h + \frac{V^2}{2}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ $h + V^2/2$ reste constant sur une ligne de $c^{\underline{te}}$
$= h_o(s)$ = enthalpie génératrice
: Equation de Bernoulli

* Si $h_o(s) = \text{const.} \Rightarrow$ Ecoulement isoénergétique

(5.13) $$h + \frac{V^2}{2} = h_o = \text{constante}.$$

$\Rightarrow$ L'éq. (5.13) peut remplacer l'équation de l'énergie (5.3) dans le cas stationnaire.

Remarque : fluide visqueux

(5.14) $$\vec{V}.\nabla\left(h + \frac{V^2}{2}\right) = \frac{1}{\rho}\vec{V}.\left(\overleftrightarrow{\tau}.\nabla\vec{V} + \nabla\overleftrightarrow{\tau} - \nabla\vec{q}\right)$$

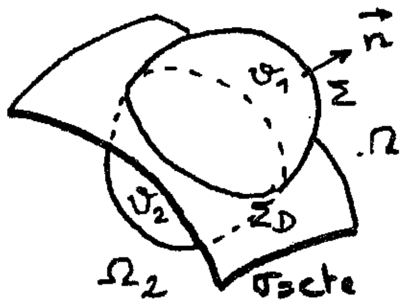
5.2. DISCONTINUITES - ONDES DE CHOC

RELATIONS DE RANKINE-HUGONIOT

* Equations sous forme intégrale :

(5.15) $$\frac{d}{dt}\int_{\vartheta(t)} \varphi \, d\vartheta = \int_{\Sigma(t)} \vec{\Phi}\cdot\vec{n}\, d\Sigma$$

$\vartheta = \vartheta_1 \cup \vartheta_2$



φ = scalaire : $\rho, \rho V_1, \rho V_2, \rho V_3, \rho E$

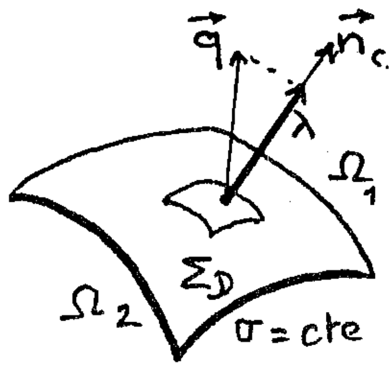
$\vec{\Phi}$ = vecteur.

Σ_D = Surface de discontinuité

(5.16) $$\sigma(\vec{x}, t) = \text{const.}$$

* Equations sous forme différentielle conservative :

(5.17) $$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{F} = 0, \qquad \vec{F} = \varphi\vec{V} - \vec{\Phi}$$



$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt + \nabla\sigma \cdot d\vec{x} = 0$$

(5.18) $$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla\sigma\cdot\vec{q} = 0$$

$\vec{q} = \dfrac{d\vec{x}}{dt}$ = vitesse de Σ_D

$$\vec{n}_c = \frac{\nabla\sigma}{|\nabla\sigma|}$$

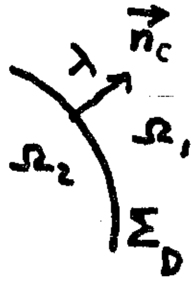
(5.19) $$\vec{q}\cdot\vec{n}_c = \frac{\vec{q}\cdot\nabla\sigma}{|\nabla\sigma|} = \frac{-\partial\sigma/\partial t}{|\nabla\sigma|} = \lambda$$

(5.17) $$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla.\vec{F} = 0$$

formellement :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Rightarrow -\lambda\,[\varphi] \qquad [\varphi] = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\nabla.\vec{F} \Rightarrow +[\vec{F}.\vec{n}_c]$$



$\Rightarrow$ Relations de Rankine - Hugoniot

(5.20) $$\lambda\,[\varphi] - [\vec{F}.\vec{n}_c] = 0$$

$$\lambda = \vec{q}.\vec{n}_1$$

Exemple :

(5.21) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\rho\vec{V} = 0$$

(5.22) $$\lambda\,[\rho] - [\rho\vec{V}.\vec{n}_c] = 0$$

$\vec{U} = \vec{V} - \vec{q}$ = Vitesse relative $/\Sigma_D$

$$\lambda[\rho] - [\rho(\vec{U}.\vec{n}_c) + \rho\lambda] = 0$$

(5.23) $$-[\rho\vec{U}.\vec{n}_c] = 0 \qquad U_n = \vec{U}.\vec{n}_c$$

Si $m = \rho_1 U_{n1} = \rho_2 U_{n2} \neq 0 \Rightarrow$ Choc

Si $m = 0 \Rightarrow$ Discontinuité de Contact

RELATIONS DE R.-H. :

* Masse :

(5.24) $$\rho_1 U_{n1} = \rho_2 U_{n2}$$

* Quantité de Mouvement :

(5.25) $$\vec{V}_{t1} = \vec{V}_{t2}$$

(5.26) $$p_1 + \rho_1 U_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 U_{n2}^2$$

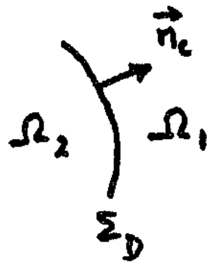
* Energie :

(5.27) $$h_1 + \frac{1}{2} U_{n1}^2 = h_2 + \frac{1}{2} U_{n2}^2$$

- Ces conditions ne sont pas suffisantes

⇒ Condition d'entropie : l'entropie ne peut que croître à travers un choc (2nd Principe Thermo.)

(5.28) $$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho s \, dv \geq 0$$



(5.29) $$[\rho (\vec{U} \cdot \vec{n}_c) s] \geq 0$$

(5.30) $$[AB] = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)[B] + \frac{1}{2}(B_1 + B_2)[A]$$

(5.31) $$m \, [s] \geq 0 \Rightarrow s_2 \geq s_1$$

Remarque : l'enthalpie totale se conserve à travers un choc (Eq. (5.27))

5.3. VECTEUR TOURBILLON

(5.32) $$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V}$$

* hypothèses :

s = constante partout (Eclt homentropique)

(5.33) $p = f(\rho) = k\rho^{\gamma}$ (fluide barotrope)

$\Rightarrow$ l'équation de l'énergie n'est plus nécessaire.

* Equations d'Euler :

(5.34) $$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

(5.35) $$\frac{D\vec{V}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0$$

Eq. (5.35) :

(5.36) $$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{\vec{V}^2}{2} + (\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V} + \frac{\nabla p}{\rho} = 0$$

$\nabla \times$ Eq. (5.36)

(5.37) $$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{V}) + \nabla \times (\nabla p / \rho) = 0$$

or
$$\nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\nabla \times (\nabla p) + \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times (\nabla p)$$
$$= -\frac{1}{\rho^2}(\nabla \rho) \times (\nabla p) = 0$$

Et

(5.38) $$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{V}) = 0$$

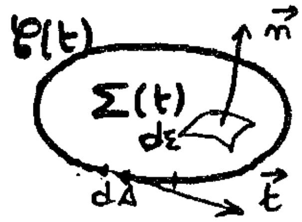
Vraie en fluide barotrope

— en fluide incompressible

* THEOREME DE KELVIN : "Le flux du vecteur tourbillon, à travers une surface que l'on suit dans son mouvement est constant au cours du temps."

$$\frac{d}{dt}\int_{\Sigma(t)} \vec{\Omega}.\vec{n}\, d\Sigma = \int_{\Sigma(t)} \left[\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \nabla\times(\vec{\Omega}\times\vec{V}) + \vec{V}(\nabla.\vec{\Omega})\right].\vec{n}\, d\sigma$$

$$= 0$$



$$\int_{\Sigma(t)} \vec{\Omega}.\vec{n}\, d\Sigma = \text{Const.} \qquad (5.39)$$

$$\int_{\Sigma(t)} \vec{\Omega}.\vec{n}\, d\Sigma = \int_{\Sigma(t)} (\nabla\times\vec{V}).\vec{n}\, d\Sigma = \int_{\mathscr{C}(t)} \vec{V}.\vec{t}\, ds = \Gamma = \text{Const.} \qquad (5.40)$$

$\Rightarrow$ La circulation Γ du vecteur vitesse le long d'une courbe fermée que l'on suit dans son mouvement est constante.

* THEOREME DE LAGRANGE : " Si à un instant particulier t_0, l'écoulement est irrotationnel dans un domaine $\mathcal{V}$, il reste irrotationnel aux instants ultérieurs lorsqu'on suit $\mathcal{V}$ dans son mouvement"

* Ecoulement irrotationnel :

$$\vec{\Omega} = \nabla\times\vec{V} = 0 \qquad (5.41)$$

* Equation du Tourbillon.

(5.42) $$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{V}) = 0$$

$$\nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{V}) = (\nabla \vec{\Omega}).\vec{V} - (\nabla \vec{V}).\vec{\Omega} + \vec{\Omega}(\nabla.\vec{V}) - \vec{V}\underbrace{(\nabla.\vec{\Omega})}_{=0}$$

(5.43) $$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\nabla \vec{A}).\vec{V} = \frac{D\vec{A}}{Dt}$$

(5.44) $$\frac{D\vec{\Omega}}{Dt} - (\nabla \vec{V}).\vec{\Omega} + \vec{\Omega}(\nabla.\vec{V}) = 0$$

Eq. Masse :

$$\nabla.\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$$

Eq. (5.44) :

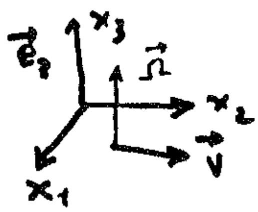
$$\frac{D\vec{\Omega}}{Dt} - (\nabla \vec{V}).\vec{\Omega} - \frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}\vec{\Omega} = 0$$

soit

(5.45) $$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{\Omega}}{\rho}\right) = (\nabla \vec{V}).\left(\frac{\vec{\Omega}}{\rho}\right)$$

$\Rightarrow$ Le vecteur $\vec{\Omega}/\rho$ est "transporté" par le mouvement.

* Cas plan : $\vec{V} = (V_1, V_2, 0)$



(5.46) $$\vec{\Omega} = \omega \vec{e}_3$$

eq. (5.45)

(5.47) $$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\omega}{\rho}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ ω/ρ reste constant sur une trajectoire.

* Cas de révolution : Même résultat $\left(\frac{\omega}{r\rho}\right)$

* ECOULEMENT IRROTATIONNEL

* Ecoulement stationnaire, isoénergétique

(5.48) $$h_0 = h + \frac{V^2}{2} = \text{const.}$$

Relation de Crocco :

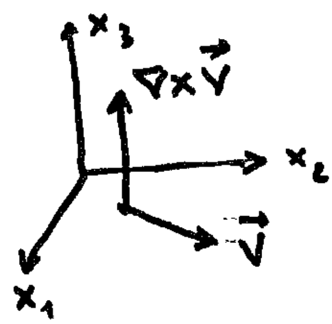
(5.49) $$T \nabla s = (\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V}$$

* Ecoulement homentropique : $s = \text{const.}$

(5.50) $$(\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V} = 0$$

Conséquences :

- Ecoulement plan (ou de révolution)



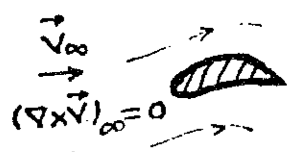
(5.51) $$\nabla \times \vec{V} = 0$$

- Ecoulement 3.D :

Eq. (5.44) $\Rightarrow$

(5.52) $$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V} = \lambda \vec{V} \quad , \quad \lambda = \text{constante}$$

Exemple



si $\nabla \times \vec{V} = 0$ à l'infini

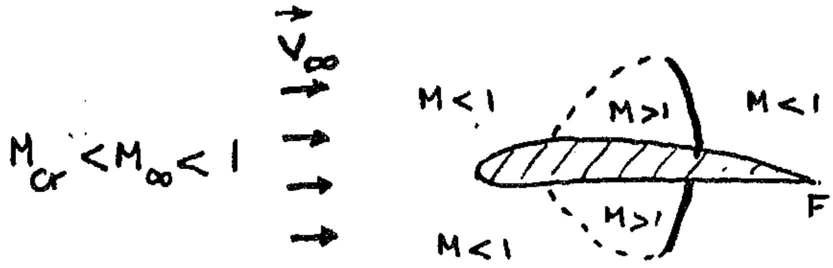
Alors $\lambda = 0$ et

(5.53) $$\nabla \times \vec{V} = 0 \quad \text{partout.}$$

6. ECOULEMENT AUTOUR D'UN PROFIL

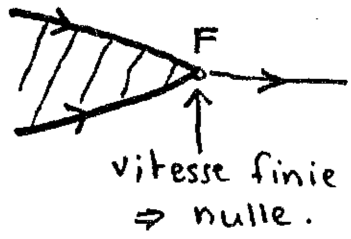
- Fluide incompressible (ρ = const.)
- Ecoulement subsonique ou transsonique ($M_\infty < 1$)

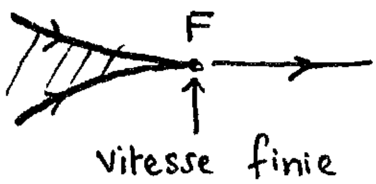
} "Globalement" elliptique.



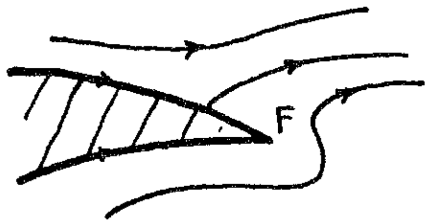
* Unicité de la solution : Condition de Kutta-Joukovsky (au bord de fuite F).

  " La circulation Γ autour du profil est telle que la vitesse au bord de fuite est finie "





* Si la condition de K.-J. n'est pas vérifiée :



contournement du bord de fuite
⇒ Vitesse infinie

* La viscosité joue un rôle important au voisinage de F en empêchant le contournement.

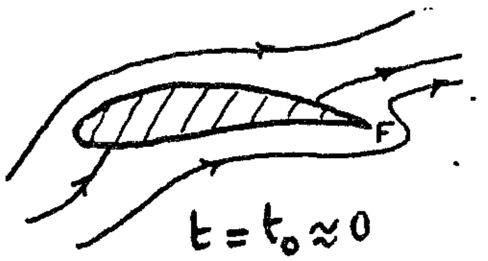
* Etablissement de la circulation.

$t = 0$, fluide au repos $\Rightarrow \Gamma = 0$

$t > 0$, $\Gamma \neq 0$: Condition de K.J.

or TH. LAGRANGE $\Rightarrow \Gamma = 0$?

- Explication : Effet de la viscosité.

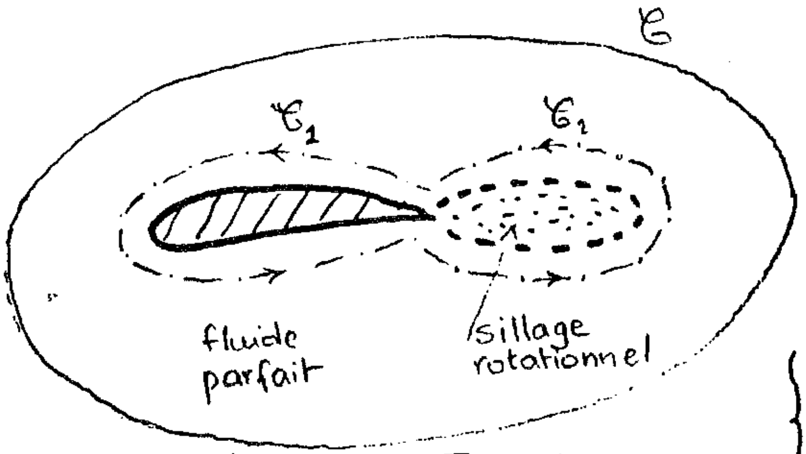


$t = t_0 \approx 0$

* Gradients très grands au voisinage de F.

$\Rightarrow$ Effets de viscosité importants

$\Rightarrow$ Existence d'un sillage rotationnel

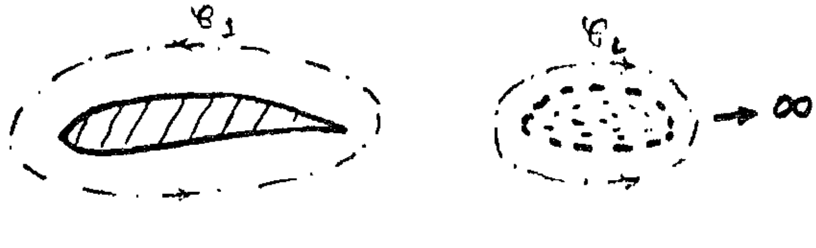


$t_0 < t < T < \infty$

$$\int_{\mathscr{C}} V.t \, ds = 0$$

$$\int_{\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2} V.t \, ds = 0$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathscr{C}_2} V.t \, ds = -\Gamma \neq 0 \\ \displaystyle\int_{\mathscr{C}_1} V.t \, ds = \Gamma \neq 0 \end{cases}$$



$t = \infty$

7. ECOULEMENT POTENTIEL

. Si Eclt irrotationnel $\nabla \times \vec{V} = 0$

. Alors $\exists$ Potentiel des vitesses Φ

(7.1) $$\vec{V} = \nabla \Phi$$

* Equation du Potentiel. Cas stationnaire.

- Equation de la Masse :

(7.2) $$\nabla . \rho \vec{V} = 0$$

s'écrit

(7.3) $$\nabla . (\rho \nabla \Phi) = 0$$

- Equation de Bernoulli :

(7.4) $$\rho = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 (V^2 - 1) \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \qquad V^2 = (\nabla \Phi)^2$$

Remarques.

1. Nappes tourbillonnaires

MURMAN - STREMEL, 1982

STEINHOFF - SURYANARAYANAN, 1983

2. Chocs. Condition d'entropie "artificielle"

MURMAN - COLE, 1971 - JAMESON, 1975

HAFEZ - SOUTH - MURMAN, 1979

3. Non-Unicité de la solution

- Condition de K. J. non suffisante en transsonique ?
- Forme conservatique (7.3) non adéquate ?

STEINHOFF - JAMESON, 1981

SALAS - JAMESON - MELNIK, 1983.

II. ECOULEMENTS D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE

1. EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

* Condition d'incompressibilité :

(1.1) $$\nabla . \vec{V} = 0$$

L'équation de conservation de la masse :

(1.2) $$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

$\Rightarrow$ ρ reste constant sur une trajectoire.

* Si $\rho(\vec{x}, t_0) = \text{const.} = \rho_0$

  Alors $\rho(\vec{x}, t) = \rho_0$ pour $t > t_0$

  $\Rightarrow$ fluide homogène

* Si $\rho(\vec{x}, t_0) \neq \text{const.} \Rightarrow \rho(\vec{x}, t)$ variable

  $\Rightarrow$ fluide non homogène (stratifié)
  Approximation de Boussinesq.

* on supposera désormais

(1.3) $$\rho = \text{const.}$$

Le tenseur des contraintes

(1.4) $$\overleftrightarrow{\sigma} = (-p + \lambda \nabla . \vec{V}) \overleftrightarrow{I} + \mu [\nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T]$$

s'écrit

(1.5) $$\overleftrightarrow{\sigma} = -p \overleftrightarrow{I} + \mu [\underbrace{\nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T}_{2\overleftrightarrow{D}}]$$

Hypothèse

(1.6) $$\mu = \text{const.}$$

EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

(1.7) $$\nabla . \vec{V} = 0$$

(1.8) $$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla . (\vec{V}\vec{V}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \, \Delta \vec{V} \, , \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

(1.9) $$\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{V} . \nabla e = \frac{1}{\rho}\left[\Phi - \nabla . \vec{q} \right]$$

(1.10) $$e = e(T) \, , \quad \vec{q} = -k \nabla T \, , \quad \Phi = 2 \overleftrightarrow{D} : \nabla \vec{V}$$

Remarques :

1. L'équation de l'énergie (1.9) est découplée des autres équations (1.7) et (1.8).

2. La loi d'état du fluide est

(1.11) $$\rho = \text{const.}$$

3. La pression p apparaît comme le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $\nabla . \vec{V} = 0$.

p n'a plus de signification thermodynamique (elle est définie à une fonction de t près et peut être négative).

4. Les équations sont (1.7) - (1.8)
les inconnues sont $\vec{V}$ et p.

* FORME ADIMENSIONNELLE

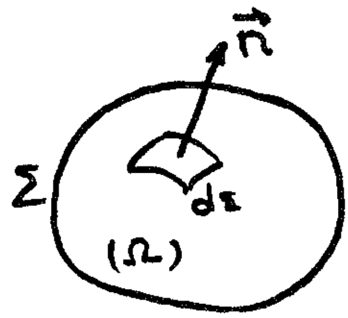
(On utilise les mêmes symboles)

(1.12) $$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

(1.13) $$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V}\vec{V}) + \nabla p = \frac{1}{Re} \Delta \vec{V}$$

(1.14) $$Re = \frac{\rho V_* L}{\mu}$$

* CONDITIONS INITIALE ET AUX LIMITES



(1.15) $$\vec{V}(\vec{x}, 0) = \vec{V}^{\circ} \qquad \nabla \cdot \vec{V}^{\circ} = 0$$

(1.16) $$\vec{V}(\vec{x}, t) = \vec{\alpha} \qquad \vec{x} \in \Sigma = \partial \Omega$$

(1.17) $$\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\Sigma = 0$$

2. EQUATION DE POISSON POUR LA PRESSION

∇ . Eq. (1.13) :

(2.1) $$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{V} + \nabla \cdot [\nabla \cdot (\vec{V}\vec{V})] + \Delta p = \frac{1}{Re} \Delta (\nabla \cdot \vec{V})$$

(2.2) $$\Delta p = \nabla \cdot [\nabla \cdot (\vec{V}\vec{V})$$

* Conditions aux limites pour p ?

* $\nabla \cdot \vec{V} = 0$?

KLEISER - SCHUMANN (1980)

3. FORMULATION VECTEUR COURANT-TOURBILLON

* Elimination de la pression :

$$(1.13)' \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla . \frac{V^2}{2} + (\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V} + \nabla p = \frac{1}{Re} \Delta \vec{V}$$

$\nabla \times$ Eq. (1.13)' :

$$(3.1) \quad \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{V}) = \frac{1}{Re} \Delta \vec{\Omega}$$

$$(3.2) \quad \vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V}$$

* Elimination de la contrainte $\nabla . \vec{V} = 0$

$\vec{\Psi}$: Vecteur-courant (Potentiel vecteur)

φ : potentiel scalaire

$$(3.3) \quad \vec{V} = \nabla \times \vec{\Psi} + \nabla \varphi$$

$$\nabla . \vec{V} = \nabla . (\nabla \times \vec{\Psi}) + \Delta \varphi = 0$$

$$(3.4) \quad \Delta \varphi = 0$$

$$(3.5) \quad \vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V} = \nabla \times (\nabla \times \vec{\Psi} + \nabla \varphi) = \nabla (\nabla . \vec{\Psi}) - \Delta \vec{\Psi}$$

Hypothèse : $\vec{\Psi}$ est à divergence nulle

$$(3.6) \quad \nabla . \vec{\Psi} = 0$$

Eq. (3.5) :

$$(3.7) \quad \Delta \vec{\Psi} = - \Omega$$

* EQUATIONS VECTEUR COURANT-TOURBILLON

(3.8) $$\vec{V} = \nabla \times \vec{\Psi} + \nabla \varphi$$

(3.9) $$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{V}) = \frac{1}{Re} \Delta \vec{\Omega}$$

(3.10) $$\Delta \vec{\Psi} = - \vec{\Omega} \qquad (\nabla . \vec{\Psi} = 0)$$

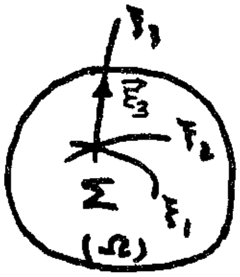
(3.11) $$\Delta \varphi = 0$$

– Conditions aux limites pour φ et $\vec{\Psi}$:

(3.12) $$\vec{V}(\vec{x}, t) = \vec{\alpha}, \quad \vec{x} = \Sigma = \partial \Omega \quad , \int_\Sigma \vec{\alpha} . \vec{n} \, d\Sigma = 0$$

Coordonnées curvilignes (ξ_1, ξ_2, ξ_3) telles que :

$$\Sigma \Leftrightarrow \xi_3 = \text{const.}$$



1. Ω simplement connexe

(3.13) $$\nabla \varphi . \vec{\varepsilon}_3 = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

Eq. (3.21) nécessite $(\nabla \times \vec{\Psi}) . \vec{\varepsilon}_3 = 0$ vérifié si

(3.14) $$\Psi_1 = \Psi_2 = 0$$

On montre que $\nabla . \vec{\Psi} = 0$ dans Ω

si $\nabla . \vec{\Psi} = 0$ sur Σ

Soit

(3.15) $$\frac{\partial}{\partial \xi_3} (h_1 h_2 \Psi_3) = 0 \qquad \left(ds^2 = \sum_i h_i^2 d\xi_i^2\right)$$

Les équations (3.13) – (3.14) et (3.15) sont les conditions aux limites pour φ et $\vec{\Psi}$

2. Ω non simplement connexe

(RICHARDSON - CORNISH, 1977)

(3.13) $$\nabla\varphi \cdot \vec{\varepsilon}_3 = 0$$

Eqs. (3.14) et (3.15) remplacées par

(3.16a) $$-\frac{1}{h_3 h_2}\frac{\partial}{\partial\xi_3}(h_2\Psi_2) = \alpha_1 - \frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}$$

(3.16b) $$\frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial}{\partial\xi_3}(h_1\Psi_1) = \alpha_2 - \frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_2}$$

(3.17) $$\Psi_3 = 0$$

- Conditions aux limites pour $\vec{\Omega}$:

(3.18) $$\vec{\Omega}\big|_\Sigma = (\nabla\times\vec{V})_\Sigma$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_2}(h_3\alpha_2) - \frac{\partial}{\partial\xi_3}(h_2 V_2)\right]$$

(3.19) $$\Omega_2 = \frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_3}(h_1 V_1) - \frac{\partial}{\partial\xi_1}(h_3\alpha_3)\right]$$

$$\Omega_3 = \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}(h_2\alpha_2) - \frac{\partial}{\partial\xi_2}(h_1\alpha_1)\right]$$

Remarque :

(3.20) $$\varphi \equiv 0 \quad \text{si} \quad \alpha_3 = 0$$

Réf : HIRASAKI - HELLUMS, 1970
RICHARDSON - CORNISH, 1977
S. MAS GALLIC, 1982
Dominguez, Bendali

- Conditions initiales

$$\vec{V}(\vec{x},0) = \vec{V}^{\circ} \qquad \nabla.\vec{V}^{\circ} = 0 \tag{3.21}$$

$$\Omega(\vec{x},0) = \nabla\times\vec{V}^{\circ} \qquad (\vec{V}^{\circ} = \vec{\alpha} \text{ sur } \Sigma) \tag{3.22}$$

* ECOULEMENT PLAN : $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{V} = (V_1, V_2)$

$$\vec{\Psi} = \psi\,\vec{e}_3 \,, \quad \psi = \psi(x_1,x_2,t) = \text{Scalaire} = \text{fonction de courant} \tag{3.23}$$

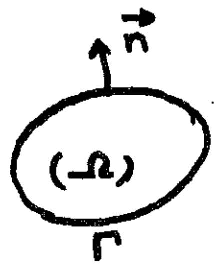
$$\varphi = 0 \tag{3.24}$$

$$\vec{V} = \nabla\times(\psi\,\vec{e}_3) \tag{3.25}$$

$$\vec{\Omega} = \omega\,\vec{e}_3 = \nabla\times\vec{V} \qquad \omega = \omega(x_1,x_2,t) = \text{Scalaire} = \text{tourbillon} \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \nabla.(\vec{V}\omega) = \frac{1}{Re}\,\Delta\omega \tag{3.27}$$

$$\Delta\psi = -\,\omega \tag{3.28}$$



- Conditions aux limites

$$\vec{V} = \nabla\times(\psi\,\vec{e}_3) = \vec{\alpha} \quad \text{sur } \Gamma \tag{3.29}$$

$\Rightarrow$ conditions de la forme

$$\psi = f \quad \text{sur } \Gamma \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = g \quad \text{sur } \Gamma \tag{3.31}$$

- Conditions pour ω ?

1. $\omega = -\Delta\psi$ sur Γ

2. GLOWINSKI - PIRONNEAU, 1979
   QUARTAPELLE - VALGRIZ, 1981
   CEA - LHOMME - PEYRET, 1981
   DENNIS - QUARTAPELLE, 1983

* ECOULEMENT DE REVOLUTION
  - Formulation analogue au cas plan.

Bibliographie générale

Milieux Continus

P. GERMAIN, Cours de Mécanique des Milieux Continus. I. Théories Générales, Masson, Paris 1973.

P. GERMAIN et P. MULLER, Introduction à la Mécanique des Milieux Continus, Masson, Paris 1980

Fluide incompressible.

J.S. DARROZES et C. FRANÇOIS, Mécanique des Fluides incompressibles, Lecture Notes in Physics, Vol. 163, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1982

G.K. BATCHELOR, An introduction to Fluid Dynamics Cambridge University Press, 1967

Fluide compressible.

R. COURANT and K.O. FRIEDRICHS, Supersonic flow and Shock waves, Interscience Publ. 1956

L. BERS, Mathematical Aspects of subsonic and transonic gas dynamics, John - Wiley, 1958.

F.K. MOORE (ed.). Theory of laminar flow - High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, vol. IV, Princeton Univ. Press 1964

A. JEFFREY, Quasilinear hyperbolic systems and waves, Pitman Publ., London 1976.

Couche limite.

L. ROSENHEAD (ed.), Laminar boundary layer - Oxford University Press, 1963

F.G. BLOTTNER, Computational techniques for boundary layers, AGARD, Lecture series No. 73, 1975

Bibliographie

sur les conditions aux limites en fluide compressible.

H.O. KREISS, " Initial boundary value problems for hyperbolic systems ". Comm. Pure Appl. Math., vol. 23, p. 277-298, 1970.

J. OLIGER and A. SUNDSTRÖM, " Theoretical and pratical aspects of some initial boundary value problems in Fluid Dynamics. SIAM J. Appl. Math. vol.35, p.419-446, 1978.

M. GILES, " Eigenmode analysis of unsteady one-dimensional Euler equations". NASA CR-172217, ICASE, August 1983.

J.C. STRIKWERDA, " Initial boundary value problems for incompletely parabolic systems". Comm. Pure Appl. Math., vol. 30, p. 797-822, 1977.

B. GUSTAFFSON and A. SUNDSTRÖM, " Incompletely parabolic problems in Fluid Dynamics" SIAM J. Appl. Math., vol. 35, p. 343-357, 1978

H. VIVIAND et J.P. VEUILLOT, " Méthodes pseudo-instationnaires pour le calcul des écoulements transsoniques. Publication ONERA 1978-4, 1978.

M.N. KOGAN, " Molecular Gas Dynamics " in "Annual Review of fluid mechanics", Vol. 5, 1973, p. 384-404

sur les problèmes d'interaction visqueux - non visqueux.

J.C. LE BALLEUR, " Numerical Flow calculation and viscous - inviscid interaction techniques" in "Recent Advances in Numerical Methods in Fluids, Vol. III, Pineridge Press, 1984.

BIBLIOGRAPHIE

Sur les écoulements potentiels en fluide compressible.

E.M. MURMAN and P.M. STREMEL, "A vortex wake capturing method for potential flow calculation". AIAA paper 82-0947, 1982.

J. STEINHOFF and K. SURYANARAYANAN, "The treatment of vortex sheets in compressible potential flow". AIAA paper 83-1881, 1983.

E.M. MURMAN and J.D. COLE, "Calculation of plane steady transonic flows." AIAA J., vol.9, 1971, p.

A. JAMESON, "Transonic potential flow calculation using conservation form." Proc. AIAA 2nd Comput. Fluid Dynamics Conf., 1975

M. HAFEZ, J. SOUTH and E.M. MURMAN, "Artificial compressibility methods for numerical solution of transonic full potential equation". AIAA J., vol. 17, 1979, p. 838-844.

J. STEINHOFF and A. JAMESON, "Multiple solutions of the transonic potential flow equations", AIAA paper 81-1019, 1981.

M.D. SALAS, A. JAMESON and R.E. MELNIK, "A Comparative study of the nonuniqueness problem of the potential equation", AIAA paper 83-1888, 1983.

BIBLIOGRAPHIE

Sur les écoulements d'un fluide incompressible

L. KLEISER and U. SCHUMANN, "Treatment of incompressibility and boundary conditions in 3-D numerical spectral simulations of plane channel flows", Proc. 3rd GAMM Conf. Numer. Meth. in Fluids, Vieweg-Verlag, p. 165-173, 1980.

S.M. RICHARDSON and A.R. CORNISH, "Solution of three-dimensional incompressible flow problems." J. Fluid Mech., vol. 82, 1977, p. 309-319.

G.J. HIRASAKI and J.D. HELLUMS, "Boundary conditions on the vector and scalar potentials in viscous three-dimensional hydrodynamics", Quart. Appl. Math., vol. 28, 1970, p. 293-297.

S. MAS GALLIC, "Système de Stokes en dimension 3 : Formulation en $\tilde{\Psi}$ et formulation en u, p dans le cas axisymétrique." Thèse de 3ème Cycle, Mathématiques - Analyse numérique, Université Paris VI, 1982.

R. GLOWINSKI and O. PIRONNEAU, "Numerical methods for the first biharmonic equation and for the two-dimensional Stokes problem", SIAM Review, vol. 21, 1979, p. 167-212.

L. QUARTAPELLE and F. VAZ-GRIS, "Projection conditions on the vorticity in viscous incompressible flows". Intern. J. Numer. Methods in Fluids, vol. 1, 1981, p. 129-144

S.C.R. DENNIS and L. QUARTAPELLE, "Direct solution of the vorticity-stream function ordinary differential equations by a Chebyshev approximation", J. Comp. Phys., vol. 52, 1983, p. 448-463.

J. CEA, B. LHOMME et R. PEYRET, "The use of Green's formula for vorticity boundary values", Rapport IMAN, P-28, Université de Nice, juin 1981.

R. TEMAM, Navier-Stokes equations, North-Holland 1977

BIBLIOGRAPHIE

P.J. ROACHE, Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publ, Albuquerque 1972.

R.D. RICHTMYER and K.W. MORTON, Difference Methods for initial-value problems, Interscience, 1967.

M. HOLT, Numerical Methods in Fluid Dynamics, Springer Verlag 1977.

R. PEYRET and T.D. TAYLOR, Computational methods for fluid flow, Springer Verlag 1983.

F. THOMASSET, Implementation of finite element Methods for Navier-Stokes equations, Springer Verlag 1981.

R. GLOWINSKI, Numerical Methods for nonlinear variational problems, Springer Verlag, A paraître.