Université Paris Nord, Institut Galilée
Ingénieurs "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique"
Cours de Systèmes Hyperboliques (seconde année)

Examen du 21 mai 2010 (3 heures)

Les notes de cours sont autorisées. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies.

Dans ce problème, on étudie le **système de l'acoustique fortement non linéaire**. Les cinq parties sont dans une très large mesure indépendantes.

1) Généralités

On se donne une constante c_0 strictement positive pour l'ensemble du problème. Le système de l'acoustique non linéaire est un système de type Saint Venant d'inconnues ρ (densité), u (vitesse normale) et v (vitesse tangentielle). Il s'écrit

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho\, u) \,=\, 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho\, u) + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho\, u^2 + p) \,=\, 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho\, v) + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho\, u\, v) \,=\, 0\,. \end{array} \right.$$

La pression p est donnée en fonction de la densité grâce à la relation très simple

$$(2) \qquad p \,=\, c_0^2\, \rho\,, \;\; \rho > 0\,.$$

a) En introduisant les variables

$$(3) \qquad q \,\equiv\, \rho\, u\,, \quad r \,\equiv\, \rho\, v\,,$$

et le vecteur W de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$(4) \qquad W \,\equiv\, (\rho\,,\, q\,,\, r)^{\mathrm{t}}\,,$$

montrer que le système (1) peut s'écrire sous la forme

$$(5) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(F(W)\big) \,=\, 0\,,$$

où $F(\bullet)$ est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera.

b) Calculer la jacobienne $A(W) \equiv \mathrm{d}F(W)$ en fonction de c_0, u et v.

c) On introduit les variables "non conservatives" V selon

$$(6) \qquad V \,\equiv\, (\rho\,,\, u\,,\, v)^{\mathrm{t}}\,.$$

Montrer que toute solution régulière $W(x,\, t)$ du système (1), peut s'écrire sous la forme

(7) $$\frac{\partial V}{\partial t} + B(V)\,\frac{\partial V}{\partial x} = 0\,,$$

où $B(V)$ est une matrice d'ordre 3 que l'on précisera en fonction de ρ, u et c_0.

2) Valeurs propres, vecteurs propres et invariants de Riemann
Le système (1) est hyperbolique.

a) Que signifie la phrase précédente ? Démontrer qu'effectivement le système (5) (c'est à dire le système (1)) est hyperbolique. On pourra, après l'avoir justifié, utiliser la forme non conservative (7) qui simplifie les calculs algébriques.

b) Préciser l'expression des trois valeurs propres (que l'on notera λ_j pour j de 1 à 3) en fonction de u et c_0. On supposera dans la suite

(8) $$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3\,.$$

c) Qu'appelle-t-on "j-invariant de Riemann" ou "invariant de Riemann pour le champ numéro j", avec j entier compris entre 1 et 3 ? Pour le champ numéro j, on notera dans la suite β_j^1 et β_j^2 deux invariants de Riemann indépendants.

d) Après avoir calculé une expression des vecteurs propres du système hyperbolique (1) relativement aux variables de votre choix, montrer que les fonctions suivantes

(9) $$\left\{ \begin{array}{llll} \beta_1^1 \equiv u + c_0 \log\rho\,, & & \beta_1^2 \equiv v \\ \beta_2^1 \equiv u\,, & & \beta_2^2 \equiv \rho \\ \beta_3^1 \equiv u - c_0 \log\rho\,, & & \beta_3^2 \equiv v \end{array} \right.$$

sont des invariants de Riemann indépendants pour les champs de numéros exprimés en indice.

3) Ondes de détente
On cherche dans cette partie des solutions régulières $V(x,\,t)$ pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ de l'équation (7) (ou, de façon équivalente, des solutions régulières $W(x,\,t)$ de l'équation (5)). On les suppose autosemblables, c'est à dire de la forme :

(10) $$V(x,\,t) = Z\Big(\frac{x}{t}\Big)\,.$$

a) Si on note $\xi \equiv \frac{x}{t}$, montrer que si la fonction $\xi \longmapsto Z(\xi)$ est non constante, on a la double propriété qui suit. D'une part, le vecteur dérivé $\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\xi}$ est proportionnel à l'un des vecteurs propres $r_j(V)$ de la matrice $B(V)$ introduite pour la relation (7) et d'autre part, on a la relation

(11) $$\lambda_j(Z(\xi)) \equiv \xi\,, \quad \forall \xi\,.$$

b) On appelle dans la suite “onde de détente pour le champ numéro j” une fonction $V(x,\,t) \,=\, Z(\xi)$ qui satisfait les conditions de la question précédente. Montrer qu'alors tout invariant β_j pour le champ numéro j est constant :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(\beta_j\big(Z(\xi)\big) \,=\, 0\,, \quad \forall \xi\,. \tag{12}$$

c) On suppose $j = 1$ et on s'intéresse à une onde de détente pour le champ numéro 1. On suppose qu'on a une condition de référence

$$Z(\xi_0) \,=\, (\rho_0,\, u_0,\, v_0)^{\mathrm{t}} \tag{13}$$

pour un certain réel ξ_0. Comment peut-on exprimer ξ_0 en fonction des paramètres du problème ? Montrer que le vecteur $Z(\xi) \equiv (\rho(\xi),\, u(\xi),\, v(\xi))^{\mathrm{t}}$ satisfait aux relations

$$u(\xi) \,\equiv\, u_0 - c_0 \,\log\Big(\frac{\rho}{\rho_0}\Big)\,, \quad v(\xi) \,\equiv\, v_0\,. \tag{14}$$

d) On se donne $\xi_0 \in \mathbb{R}$ et $Z(\xi_0)$ comme à la question précédente. On se donne aussi $\xi_1 > \xi_0$ et $Z(\xi_1) \equiv (\rho_1,\, u_1,\, v_1)^{\mathrm{t}}$ lié à $Z(\xi_0)$ grâce aux résultats de la question précédente. Décrire complètement une onde de détente pour le champ numéro 1 allant de $Z(\xi_0)$ à $Z(\xi_1)$ c'est à dire une solution faible autosemblable continue du système (1) qui satisfaisnt à la condition initiale

$$W(x,\,0) \,=\, \begin{cases} (\rho_0\,,\, \rho_0\, u_0\,,\, \rho_0\, v_0)^{\mathrm{t}}\,, & x < 0 \\ (\rho_1\,,\, \rho_1\, u_1\,,\, \rho_1\, v_1)^{\mathrm{t}}\,, & x > 0\,. \end{cases} \tag{15}$$

4) Ondes de choc

On se donne $\sigma \in \mathbb{R}$ et deux états W_0 et W_1 qui permettent à nouveau d'introduire sans ambiguité les notations ρ_0, u_0, v_0, ρ_1, u_1 et v_1. On cherche maintenant une solution faible du système hyperbolique (7) sous la forme d'une discontinuité de vitesse σ :

$$W(x,\,t) \,=\, \begin{cases} W_0\,, & \dfrac{x}{t} < \sigma \\ W_1\,, & \dfrac{x}{t} > \sigma\,. \end{cases} \tag{16}$$

a) Quelles relations lient les données introduites à la relation (16) ?

b) Montrer que ces relations satisfont à l'invariance de Galilée ; si l'on désigne par $[\psi] \equiv \psi_1 - \psi_0$ le saut d'une grandeur arbitraire ψ entre les états W_0 et W_1, alors on a

$$[\rho\,(u-\sigma)] \,=\, 0\,, \quad [\rho\,(u-\sigma)^2 + p] \,=\, 0\,, \quad [\rho\,(u-\sigma)\,v] \,=\, 0\,. \tag{17}$$

On posera dans la suite

(18) $\quad m \equiv \rho\,(u-\sigma)\,.$

c) Démontrer que si la discontinuité n'est pas triviale, c'est à dire si $W_0 \neq W_1$, on a

(19) $\quad m^2 \;=\; c_0^2\,\rho_0\,\rho_1$

(20) $\quad m\,[v] \;=\; 0\,.$

d) En déduire que si $m > 0$, on a les relations

(21) $$m \;=\; c_0\,\sqrt{\rho_0\,\rho_1}\,, \quad u_1 \;=\; u_0 - c_0\,\frac{\rho_1-\rho_0}{\sqrt{\rho_0\,\rho_1}}\,, \quad v_1 \;=\; v_0\,.$$

Quelle est alors la limite de la vitesse σ de la discontinuité si la discontinuité $\rho_1 - \rho_0$ tend vers 0 ?

5) Entropie mathématique

On rappelle qu'une entropie mathématique $\eta(W)$ pour un système de lois de conservation tel que (5) est une fonction scalaire strictement convexe de W de sorte qu'il existe une fonction de flux d'entropie $\zeta(W)$ telle que

(22) $\quad \mathrm{d}\eta(W)\bullet \mathrm{d}F(W) \equiv \mathrm{d}\zeta(W)\,, \quad \forall W\,.$

a) En utilisant l'expression de la matrice jacobienne $A(W)$ calculée à la question 1-b), montrer que si l'on choisit

(23) $$\eta(W) \equiv \frac{q^2+r^2}{2\,\rho} + c_0^2\,\rho\,\log(\rho)\,, \quad \zeta(W) \equiv (\eta(W)+p)\,\frac{q}{\rho}\,,$$

la relation (22) est satisfaite.

b) Achever de démontrer que la fonction $\eta(W)$ introduite à la relation (23) est effectivement une entropie mathématique pour le système hyperbolique de l'acoustique fortement non linéaire.

c) On se demande si les ondes de chocs introduites à la quatrième partie satisfont ou pas à la condition d'entropie. Rappeler l'inégalité d'entropie de Rankine et Hugoniot qui doit être satisfaite par les états W_0 en amont et W_1 en aval d'une telle discontinuité.

d) Montrer que cette inégalité d'entropie de Rankine et Hugoniot peut aussi s'écrire

(24) $$\frac{1}{2}\big(\rho_1\,(u_1-\sigma)^3 - \rho_0\,(u_0-\sigma)^3\big) + c_0^2\,\big(\rho_1\,(u_1-\sigma)\,\log\rho_1 - \rho_0\,(u_0-\sigma)\,\log\rho_0\big) \;\leq\; 0\,.$$

e) En déduire que si le flux de masse m introduit à la relation (18) est strictement positif, le choc entre W_0 en amont et W_1 en aval est entropique si et seulement si

(25) $\quad \rho_1 \;\geq\; \rho_0\,.$

Université Paris Nord, Institut Galilée
Ingénieurs "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique"
Cours de Systèmes Hyperboliques (seconde année)

Proposition de corrigé de l'examen du 21 mai 2010.

1) a) On a clairement

$$ \text{(C1)} \qquad f(W) \,=\, \begin{pmatrix} \rho\, u \\ \rho\, u^2 + p \\ \rho\, u\, v \end{pmatrix} \,=\, \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{\rho} + p \\ \frac{q\, r}{\rho} \end{pmatrix} \,. $$

1) b) Donc

$$ \text{(C2)} \qquad A(W) \,=\, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_0^2 - u^2 & 2\, u & 0 \\ -u\, v & v & u \end{pmatrix} $$

par dérivation par rapport à ρ, q et q successivement de la relation (C1), et compte tenu de la relation (2) qui lie la pression p et la densité ρ.

1) c) Le calcul a été fait de nombreuses fois dans le cours. On a après quelques lignes d'algèbre,

$$ \text{(C3)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} \,+\, u\, \dfrac{\partial \rho}{\partial x} \,+\, \rho\, \dfrac{\partial u}{\partial x} \,=\, 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \,+\, u\, \dfrac{\partial u}{\partial x} \,+\, \dfrac{1}{\rho}\, \dfrac{\partial p}{\partial x} \,=\, 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} \,+\, u\, \dfrac{\partial v}{\partial x} \,=\, 0 \,, \end{array} \right. $$

ce qui établit la relation (7) avec la matrice $B(V)$ extraite de la relation (C3) :

$$ \text{(C4)} \qquad B(V) \,=\, \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{c_0^2}{\rho} & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \,. $$

2) a) C'est une définition fondamentale. Le système (5) est hyperbolique si et seulement si la matrice jacobienne $A(W) \equiv \mathrm{d}F(W)$ est diagonalisable sur le corps des nombres réels. Dans ce cas, on a vu (en cours) que cette propriété est invariante par changement bijectif régulier de fonction inconnue. C'est bien entendu le cas pour la transformation $W \longmapsto V$ lorsque $\rho > 0$. Il suffit donc de démontrer que la matrice $B(V)$ présentée à la relation (C4) est diagonalisable. Compte tenu de sa structure particulière qui met en évidence une valeur propre égale à u, il suffit de démontrer que le bloc "en haut à gauche"

$$ \text{(C5)} \qquad \widetilde{B}(V) \,=\, \begin{pmatrix} u & \rho \\ \frac{c_0^2}{\rho} & u \end{pmatrix} $$

est diagonalisable. Ce qui est clair car $c_0 \neq 0$.

2) b) Compte tenu de l'expression (C5), les valeurs propres s'écrivent :

(C6) $$\lambda_1 \equiv u - c_0 \; < \; \lambda_2 \equiv u \; < \; \lambda_3 \equiv u + c_0 \, .$$

2) c) Appelons $r_j(V)$ un vecteur propre de la matrice $B(V)$ relativement à la valeur propre $\lambda_j(V)$. Un invariant de Riemann pour le champ numéro j est une fonction $\beta_j(V)$ telle que

(C7) $$\mathrm{d}\beta_j(V) \bullet r_j(V) \, \equiv \, 0 \, .$$

Si on explicite les composantes $r_j^k(V)$ du j-ième vecteur propre (et pour k entier compris entre 1 et 3) le relation (C7) s'écrit aussi

(C8) $$r_j^1(V) \, \frac{\partial \beta_j}{\partial \rho} \, + \, r_j^2(V) \, \frac{\partial \beta_j}{\partial u} \, + \, r_j^3(V) \, \frac{\partial \beta_j}{\partial v} \, = \, 0 \, .$$

2) d) On explicite de façon élémentaire trois vecteurs propres pour la matrice $B(V)$:

(C9) $$r_1(V) \, = \, \begin{pmatrix} \rho \\ -c_0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad r_2(V) \, = \, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad r_3(V) \, = \, \begin{pmatrix} \rho \\ c_0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Alors un invariant de Riemann β_j pour le champ numéro 1 satisfait à l'équation aux dérivées partielles linéaire

(C10) $$\rho \, \frac{\partial \beta_1}{\partial \rho} \, - \, c_0 \, \frac{\partial \beta_1}{\partial u} \, = \, 0 \, .$$

Le choix $\beta_1^2 \equiv v$ est bien solution de (C10). Un autre choix indépendant peut être obtenu en cherchant β_1^1 sous la forme

(C11) $$\beta_1^1 \, = \, u \, + \, g(\rho) \, .$$

Alors la relation (C10) devient $\rho \, \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\rho} \, - \, c_0 \, = \, 0$, ce qui conduit sans difficulté à la première ligne de la relation (9). La troisième ligne de la relation (9) s'obtient de la même façon. Compte tenu de l'expression (C9), il suffit de changer c_0 en $-c_0$ dans toutes les expressions. Pour le second champ, la forme particulière simple du vecteur propre $r_2(V)$ conduit à

(C12) $$\frac{\partial \beta_2}{\partial v} \, = \, 0 \, .$$

Toute fonction $\beta_2(V)$ qui ne dépend pas de la vitesse tangentielle v est un invariant de Riemann pour le champ numéro 2. On peut donc parfaitement choisir $\beta_2^1 \equiv u$ et $\beta_2^2 \equiv \rho$ comme proposé à la relation (9).

3) a) Cette question est traitée en cours. On introduit la représentation (10) au sein de la relation (7). Il vient : $-\frac{x}{t^2} \, \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\xi} \, + \, \frac{1}{t} \, B(V) \, \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\xi} \, = \, 0$, c'est à dire

(C13) $$B(V) \, \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\xi} \, = \xi \, \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\xi} \, .$$

Si le vecteur dérivé $\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\xi}$ n'est pas nul, il est vecteur propre de la matrice $B(V)$ et il existe un entier j entre 1 et 3 de sorte que d'une part $\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\xi}$ et $r_j(Z)$ soient proportionnels :

$$\text{(C14)} \qquad \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\xi} \,=\, \alpha_j(\xi)\; r_j(Z(\xi))$$

pour une certaine fonction scalaire $\alpha_j(\xi)$ et d'autre part, compte tenu de la relation (C13), la valeur propre $\lambda_j(Z)$ est nécessairement égale au nombre ξ, ce qu'exprime la relation (11).

3) b) Si $Z(\xi)$ satisfait à la relation (C14), on calcule le membre de gauche de la relation (12) simplement :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\big(\beta_j\big(Z(\xi)\big) \,&=\, \mathrm{d}\beta_j\big(Z(\xi)\big) \bullet \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\xi} \,=\, \mathrm{d}\beta_j\big(Z(\xi)\big) \bullet \big(\alpha_j(\xi)\; r_j(Z(\xi))\big) \\ &=\, \alpha_j(\xi)\; \mathrm{d}\beta_j\big(Z(\xi)\big) \bullet r_j(Z(\xi))\,, \end{aligned}$$

expression qui est identiquement nulle compte tenu de la définition (C7) d'un invariant de Riemann pour le champ numéro j.

3) c) Pour une onde de détente relative au champ numéro 1, la relation (11) lie fortement le paramètre de vitesse ξ et la valeur propre. On a ici $u - c_0 = \xi$ pour tout ξ, ce qui entraîne $u_0 - c_0 = \xi_0$. Par ailleurs, on exprime que les invariants de Riemann β_1^1 et β_1^2 sont constants le long de l'onde de détente. Compte tenu des expressions (9), on a : $u + c_0 \log \rho \,=\, u_0 + c_0 \log \rho_0$ d'une part et $v \,=\, v_0$ d'autre part, ce qui démontre la relation (14).

3) d) Une telle onde a été décrite de multiples fois dans le cours. On cherche une fonction $\mathbb{R} \ni \xi \longmapsto Z(\xi) \in \mathbb{R}^3$ constante pour $\xi < \xi_0$ et pour $\xi > \xi_1$. Pour ξ compris entre ξ_0 et ξ_1, on peut résoudre complètement les équations vues à la question précédente, c'est à dire

$u(\xi) - c_0 = \xi\,,\ u(\xi) = \, u_0 - c_0 \, \log\Big(\dfrac{\rho}{\rho_0}\Big)\,,\ v(\xi) \,=\, v_0$. On a alors sans peine :

$$\text{(C15)} \qquad \rho(\xi) = \rho_0 \, \exp\Big(\frac{u_0 - c_0 - \xi}{c_0}\Big)\,,\ u(\xi) = \xi + c_0\,,\ v(\xi) = v_0\,, \quad \xi_0 < \xi < \xi_1.$$

L'onde de détente pour le champ numéro 1 se décrit alors selon

$$\text{(C16)} \qquad Z(\xi) \,=\, \begin{cases} Z(\xi_0)\,, & \dfrac{x}{t} \leq \xi_0 \\ \text{donné par les relations (C15) pour } \ \xi_0 \leq \dfrac{x}{t} \leq \xi_1 & \\ Z(\xi_1)\,, & \dfrac{x}{t} \geq \xi_1\,. \end{cases}$$

On peut vérifier que c'est une solution régulière du système (7) pour ξ différent de ξ_0 et ξ_1. Comme elle est continue par construction, les relations de Rankine et Hugoniot sont automatiquement satisfaites et on a bien construit de cette façon une solution faible du système (1) satisfaisant à la condition initiale (15).

4) a) Les relations de Rankine et Hugoniot s'écrivent pour un système hyperbolique quelconque (5) sous la forme

(C17) $\quad [\, F(W) \,] \,=\, \sigma \,[\, W \,] \,.$

Dans le cas du système (1) de l'acoustique fortement non linéaire, on a

(C18) $\quad [\, \rho \, u \,] \,=\, \sigma \,[\, \rho \,] \,, \; [\, \rho \, u^2 + p \,] \,=\, \sigma \,[\, \rho \, u \,] \,, \; [\, \rho \, u \, v \,] \,=\, \sigma \,[\, \rho \, v \,] \,.$

4) b) Comme la quantité σ caractérise la discontinuité, on peut aussi la voir comme une fonction continue à travers cette disontinuité. Il vient alors :

(C19) $\quad [\, \rho \; (u - \sigma) \,] \,=\, 0 \,,$

qui exprime la première des trois relations (17) et permet d'introduire la grandeur m selon la relation (18), puisque c'est un scalaire **continu** à travers la discontinuité. Si on calcule ensuite la seconde quantité présente au sein de (17), on trouve

$$\begin{aligned} [\rho \,(u - \sigma)^2 + p] \,&=\, [\rho \,(u^2 - 2 \,\sigma \, u + \sigma^2) + p] \,=\, [\rho \, u^2 + p] - 2 \,\sigma \,[\rho \, u] + \sigma^2 \,[\rho] \\ &=\, \sigma \,[\rho \, u] - 2 \,\sigma \,[\rho \, u] + \sigma \,[\rho \, u] \,=\, 0 \,. \end{aligned}$$

Enfin, la dernière relation de (17) est une conséquence immédiate de la troisième relation de (C18).

4) c) De la définition (18), de la seconde relation de (17) et de la définition (2) de la pression, il vient $[\, \frac{m^2}{\rho} + c_0^2 \, \rho \,] \,=\, 0,$ c'est à dire $m^2 \,[\, \frac{1}{\rho} \,] + c_0^2 \,[\, \rho \,] \,=\, 0 \,.$ Sans difficulté, $\Big(- \dfrac{m^2}{\rho_1 \, \rho_0} + c_0^2 \Big) \big(\rho_1 - \rho_0 \big) \,=\, 0 \,,$ ce qui établit la relation (19). Pour démontrer la relation (20), on part de la troisième relation de (17) et on introduit m compte tenu de la relation (18).

4) d) Si $m > 0 \,,$ la première relation de (21) est conséquence immédiate de la relation (19). De la relation (18), on tire $u \,=\, \sigma + \dfrac{m}{\rho}$ puis par différence entre les états W_1 et W_0, $u_1 - u_0 \,=\, m \Big(\dfrac{1}{\rho_1} - \dfrac{1}{\rho_0} \Big) \,=\, - \dfrac{c_0}{\sqrt{\rho_0 \, \rho_1}} \, (\rho_1 - \rho_0)$ compte tenu de la relation (19). La seconde relation de (21) est établie. Enfin, si m n'est pas nul, la troisième relation de (21) résulte immédiatement de la relation (20). Si la discontinuité est faible, m est aux environs de $c_0 \, \rho_0$ et σ aux environs de $u_0 - c_0$, c'est à dire de la première valeur propre λ_1 .

5) a) On cherche l'entropie η sous la forme

(C20) $\quad \eta(W) \,=\, \dfrac{q^2 + r^2}{2 \, \rho} + \varphi(\rho) \,.$

On a alors $\quad {\rm d}\eta(W) \,=\, \Big(- \dfrac{1}{2} \big(u^2 + v^2 \big) + \dfrac{{\rm d}\varphi}{{\rm d}\rho} \,, \, u \,, \, v \Big) \quad$ et

$$\begin{aligned} {\rm d}\eta(W) \bullet {\rm d}F(W) \,&=\, {\rm d}\eta(W) \bullet A(W) \\ &=\, \Big(- \frac{1}{2} \big(u^2 + v^2 \big) + \frac{{\rm d}\varphi}{{\rm d}\rho} \,, \, u \,, \, v \Big) \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_0^2 - u^2 & 2 \, u & 0 \\ -u \, v & v & u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \Big(u \, (c_0^2 - u^2 - v^2) \,,\; \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\rho} + \frac{3}{2} u^2 + \frac{1}{2} v^2 \,,\; u \, v \Big) .$$

Par ailleurs, avec un flux d'entropie $\zeta(W)$ tel que proposé à la relation (23) et une expression (C20) pour l'entropie, on a :

$$\mathrm{d}\zeta(W) \,=\, \bigg(u \Big(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\rho} - \frac{\varphi}{\rho} - u^2 - v^2 \Big) \,,\; c_0^2 + \frac{\varphi}{\rho} + \frac{3}{2} u^2 + \frac{1}{2} v^2 \,,\; u \, v \bigg) .$$

Les deux expressions précédentes sont compatibles avec la condition (22) si et seulement si

$$\text{(C21)} \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\rho} - \frac{\varphi}{\rho} \,=\, c_0^2 \,.$$

On peut aussi écrire cette relation sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \Big(\dfrac{\varphi}{\rho} \Big) \,=\, \dfrac{c_0^2}{\rho}$ relation qui justifie le terme en densité proposé dans l'expression (23) de l'entropie.

5) b) On démontre que l'entropie $\eta(W)$ est strictement convexe en calculant la matrice hessienne correspondante et en démontrant que c'est une matrice définie positive. On a vu à la question précédente que

$$\text{(C22)} \qquad \mathrm{d}\eta(W) \,=\, \Big(c_0^2 \big(\log \rho + 1 \big) - \frac{q^2 + r^2}{2 \, \rho^2} \,,\; \frac{q}{\rho} \,,\; \frac{r}{\rho} \Big) .$$

On dérive la relation (C22) relativement à W, c'est à dire au triplet $(\rho, \, q, \, r)$. Il vient

$$\text{(C23)} \qquad \mathrm{d}^2\eta(W) \,=\, \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} c_0^2 + u^2 + v^2 & -u & -v \\ -u & 1 & 0 \\ -v & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Si on note I_3 la matrice identité d'ordre 3, le déterminant

$$\Delta(x) \,\equiv\, \det \big(\rho \, \mathrm{d}^2\eta(W) - x \, \mathrm{I}_3 \big)$$

se calcule avec des arguments tout à fait élémentaires qui ne sont pas détaillés ici :

$$\Delta(x) \,=\, (1 - x) \Big(x^2 - \big(u^2 + v^2 + c_0^2 + 1 \big) \, x + c_0^2 \Big) .$$

Il est alors clair que l'équation $\Delta(x) = 0$ a trois racines réelles strictement positives. En conséquence, la matrice hessienne $\mathrm{d}^2\eta(W)$ calculée à la relation (23) est définie positive.

5) c) L'inégalité de Rankine et Hugoniot s'écrit

$$\text{(C24)} \qquad \mathcal{D} \,\equiv\, \big(\zeta(W_1) - \zeta(W_0) \big) \,-\, \sigma \, \big(\eta(W_1) - \eta(W_0) \big) \,\leq\, 0 \,.$$

5) d) Compte tenu de la forme particulière du flux d'entropie ζ (*c.f.* (23)), on a le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \,&=\, \big[\eta \, u + p \, u \big] \,-\, \sigma \, \big[\eta \big] \\ &=\, \big[\eta \, (u - \sigma) \big] + \big[p \, u \big] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big[\frac{1}{2}\rho \left(u^2+v^2\right)(u-\sigma) \Big] \,+\, \big[\big(c_0^2\,\rho\,\log\rho\big)\,(u-\sigma) \big] \,+\, \big[c_0^2\, q \big] && \text{au vu de (2)} \\
&= \Big[\frac{1}{2}\rho\, u^2\,(u-\sigma) \Big] \,+\, \big[\big(c_0^2\,\rho\,\log\rho\big)\,(u-\sigma) \big] \,+\, \big[c_0^2\, q \big] && \text{compte tenu de (20)} \\
&= \Big[\frac{m}{2}\,\big((u-\sigma)^2 + 2\,\sigma\,(u-\sigma) + \sigma^2 \big) \Big] \,+\, c_0^2\, m\,\big[\log\rho\big] \,+\, c_0^2\,\sigma\big[\rho\big] && \text{grâce à (C18)} \\
&= \big[\frac{1}{2}\rho\,(u-\sigma)^3 \big] \,+\, \sigma\,\Big[\frac{m^2}{\rho} \Big] \,+\, c_0^2\,\big[\rho\,(u-\sigma)\log\rho\big] \,+\, c_0^2\,\sigma\big[\rho\big] \\
&= \Big[\frac{1}{2}\rho\,(u-\sigma)^3 \,+\, c_0^2\,\rho\,(u-\sigma)\log\rho \Big] \,-\, \sigma\,\big[p\big] \,+\, c_0^2\,\sigma\big[\rho\big] && \text{(voir (17))} \\
&= \Big[\frac{1}{2}\rho\,(u-\sigma)^3 \,+\, c_0^2\,\rho\,(u-\sigma)\log\rho \Big] && \text{car } p \equiv c_0^2\,\rho.
\end{aligned}
$$

La relation (24) est établie.

5) e) On poursuit l'explicitation de la production d'entropie $\mathcal{D}$ en introduisant le flux de masse m au sein de la relation (24) et le rapport $y \equiv \frac{\rho_1}{\rho_0}$. Il vient

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathcal{D}}{m} &= \frac{m^2}{2}\,\Big[\frac{1}{\rho^2} \Big] \,+\, c_0^2\,\big[\log\rho\big] \\
&= \frac{m^2}{2}\Big(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_0^2} \Big) \,+\, c_0^2\,\log y \\
&= -\frac{c_0^2\,\rho_0\,\rho_1}{2}\,\frac{\big(\rho_1^2-\rho_0^2\big)}{\rho_0^2\,\rho_1^2} \,+\, c_0^2\,\log y && \text{au vu de la relation (19)} \\
&= c_0^2\Big(\log y - \frac{\big(y^2-1\big)}{2\,y} \Big) \,\equiv\, c_0^2\, f(y)\,.
\end{aligned}
$$

L'étude du signe de la fonction $f(\bullet)$ pour $y>0$ est élémentaire :

$$
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} \,=\, \frac{1}{y} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\,y^2}\,, \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(1) \,=\, 0\,, \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y^2} \,=\, -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} \,=\, \frac{1-y}{y^3}\,.
$$

Donc $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}$ croît de 0 à 1 puis décroît de 1 à l'infini. Comme elle est nulle en $y=1$, la dérivée première est toujours négative et la fonction f est décroissante dans l'intervalle $]0\,,\,+\infty[$. Comme $f(1)=0$, la fonction $f(\bullet)$ prend des valeurs négatives pour $y \geq 1$, ce qui montre la relation (25) pour satisfaire à l'inégalité d'entropie (24).

FD, mai 2010.