Université Paris Nord, Institut Galilée, Ingénieurs "MACS"
Cours de Systèmes Hyperboliques (seconde année)

Examen partiel du 17 février 2014 (1 heure 30)

Les notes de cours ne sont pas autorisées. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies.

Pour ce contrôle des connaissances, on se propose d'étudier les "ondes en forme de N" pour l'équation de Burgers. On s'intéresse à l'équation de Burgers (1) $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{u^2}{2}\big) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, où la fonction $u(x,\, t)$ est à valeurs scalaires. On se donne aussi une fonction $u_0(\bullet)$ qui sera explicitée plus loin. La condition initiale pour la fonction u s'écrit sous la forme (2) $u(x,\, 0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

1) On s'intéresse à une solution faible du problème de Cauchy (1)(2). Quelles hypothèses doivent vérifier la fonction u et la condition initiale u_0 ?

2) Rappeler les relations satisfaites par u et u_0 lorsque u est solution faible du problème de Cauchy (1)(2).

3) Si u et u_0 sont maintenant des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que u soit une solution faible du problème de Cauchy (1)(2) ?

4) On suppose que la fonction u est régulière par morceaux avec une discontinuité $(u_g(t),\, u_d(t))$ de part et d'autre d'une courbe régulière Γ. On précise que $u_g(t)$ (respectivement $u_d(t)$) est limite de la fonction u à t fixé et x tendant vers un point de Γ par valeurs inférieures (respectivement supérieures). On suppose de plus que $u_g(t) \geq u_d(t)$. Montrer que si la discontinuité $(u_g(t),\, u_d(t))$ est admissible au sens proposé à la question précédente, alors elle est entropique.

5) On se donne dans toute la suite un réel strictement positif T. On suppose que la fonction u est régulière et peut s'écrire sous la forme (3) $u(x,\, t) = v\big(\frac{x}{t+T}\big)$, où v est une fonction régulière à une seule variable réelle. Montrer que ou bien la fonction u est constante, ou bien elle est égale à une fonction simple de l'espace et du temps que l'on explicitera.

6) Dessiner dans le plan $(x,\, t)$ de l'espace-temps les isovaleurs typiques d'une solution de l'équation de Burgers trouvée à la question précédente.

7) On cherche à raccorder la solution régulière non constante de la question 5) à l'état constant $z = 0$ le long d'une courbe régulière Γ de la forme $x = \gamma(t)$ où γ est une fonction inconnue de la variable t. Quelle équation différentielle est satisfaite par la fonction γ ?

8) On se donne maintenant un second paramètre réel X strictement positif. Montrer que les fonctions (4) $\gamma_+(t) = \frac{X}{\sqrt{T}}\sqrt{t+T}$ et $\gamma_-(t) = -\frac{X}{\sqrt{T}}\sqrt{t+T}$ sont solutions de l'équation différentielle trouvée à la question précédente.

9) On se donne maintenant la condition initiale u_0 sous la forme d'une "onde en forme de N": (5) $u_0(x) = \frac{x}{T}$ si $|\,x\,| \leq X$ et $u_0(x) = 0$ si $|\,x\,| > X$. A l'aide des questions précédentes, proposer une solution entropique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux du problème de Cauchy (1)(2)(5).

10) La solution précédente est l'unique solution faible entropique du problème de Cauchy (1)(2)(5). Pourquoi ?