Equation de Burgers avec terme source.

Soit α un nombre réel strictement positif. On introduit la variante suivante de l'équation de Burgers :

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \alpha\, u \;=\; 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0\,,$$

où $u = u(x,\, t)$ est une fonction scalaire inconnue de l'espace x et du temps t. On se donne aussi une fonction $\mathbb{R} \ni x \longmapsto u_0(x) \in \mathbb{R}$ et la condition initiale associée :

$$(2) \qquad u(x,\, 0) \;=\; u_0(x)\;, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

1) On suppose la fonction u_0 régulière et croissante. Montrer en introduisant les courbes caractéristiques $[0,\, +\infty[\, \ni t \longmapsto x(t) \in \mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \;=\; u\big(x(t),\, t\big)\,, \qquad t \geq 0\,,$$

que la solution u de (1)(2) doit être recherchée sous la forme

$$(4) \qquad u(x,\, t) \;=\; u_0(x_0)\exp(-\alpha t)\,,$$

où x_0 est solution d'une équation que l'on précisera. Vérifier que dans les conditions précisées ci-dessus, la fonction donnée en (4) est unique et bien solution du système (1)(2).

2) Proposer pour le problème (1)(2) une extension de la notion de solution faible dans le cas où la fonction u_0 est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. Dans le cas où l'on manipule une solution de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de l'équation (1), écrire la relation de Rankine-Hugoniot qui doit être utilisée.

3) On suppose maintenant que la fonction u_0 est la discontinuité suivante :

$$(5) \qquad u_0(x) \;=\; \begin{cases} 1, & x < 0\,, \\ 0, & x > 0\,. \end{cases}$$

A l'aide de la méthode des caractéristiques (question 1) et de la relation de Rankine-Hugoniot (question 2), proposer une solution faible $u(x,\, t)$ pour le problème (1)(2). Vérifier que la solution ainsi construite est effectivement solution faible du problème de Cauchy (1)(2).

FD, janvier 1995, février 2002.

Equation de Burgers avec terme source.
Proposition de corrigé.

1) Le long d'une caractéristique $t \longmapsto x(t)$ solution de l'équation (3), on a :

$$(6) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\exp(\alpha\,t)\,u\big(x(t),\,t\big)\Big] \;=\; 0$$

car

$$\alpha\exp(\alpha\,t)\,u \,+\, \exp(\alpha\,t)\,\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\,u \,+\, \frac{\partial u}{\partial t}\Big) \;=\; \exp(\alpha\,t)\,\Big(\,\alpha\;u \,+\, u\,\frac{\partial u}{\partial x} \,+\, \frac{\partial u}{\partial t}\,\Big) \;=\; 0\,.$$

Donc $\exp(\alpha\,t)\,u\big(x(t),\,t\big)$ est identiquement égal à $u(x(0),\,0) \,=\, u_0(x(0))$, ce qui montre la relation (4). La courbe caractéristique solution de l'équation (3) vérifie maintenant la relation

$$(7) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \;=\; u_0(x_0)\exp(-\alpha\,t)$$

qui s'intègre sans difficulté :

$$(8) \qquad x(t) \;=\; x_0 \,+\, \frac{1}{\alpha}\,\big(1-\exp(-\alpha\,t)\big)\,u_0(x_0)\;, \qquad x(0) \,=\, x_0\,.$$

Pour calculer $u(x,\,t)$ par la méthode des caractéristiques, il faut d'abord nécessairement résoudre l'équation suivante d'inconnue x_0 :

$$(9) \qquad x_0 \,+\, \frac{1}{\alpha}\,\big(1-\exp(-\alpha\,t)\big)\,u_0(x_0) \;=\; x$$

qui a une solution unique $x_0 \,=\, \psi(x,\,t)$, puisque la fonction

$$(10) \qquad \varphi(y) \;\equiv\; y \,+\, \frac{1}{\alpha}\,\big(1-\exp(-\alpha\,t)\big)\,u_0(y)$$

est continue, strictement croissante, et tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) lorsque y tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$). Il faut ensuite écrire la relation (4). Il reste à vérifier que l'algorithme précédent résout bien le problème de Cauchy (1)(2). En dérivant la relation (9) par rapport à x puis par rapport à t, il vient :

$$(11) \qquad \Big[1 \,+\, \frac{1-\exp(-\alpha\,t)}{\alpha}\,u_0'(x_0)\Big]\,\frac{\partial x_0}{\partial x} \;=\; 1$$

$$(12) \qquad \Big[1 \,+\, \frac{1-\exp(-\alpha\,t)}{\alpha}\,u_0'(x_0)\Big]\,\frac{\partial x_0}{\partial t} \,+\, \exp(-\alpha\,t)\,u_0(x_0) \;=\; 0\,.$$

Donc pour $u(x,\,t)$ donné par les relations (9) et (4), on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \,+\, \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{u^2}{2}\Big) \,+\, \alpha\,u \;=\; -\alpha\,u_0\exp(-\alpha\,t) \,+\, \exp(-\alpha\,t)\,u_0'(x_0)\,\frac{\partial x_0}{\partial t} \,+$$

$$+\, \exp(-\alpha\,t)\,u_0(x_0)\,\big(\exp(-\alpha\,t)\,u_0'(x_0)\,\frac{\partial x_0}{\partial x}\big) \,+\, \alpha\,u_0(x_0)\exp(-\alpha\,t)$$

$$= \quad \exp(-\alpha\, t)\, u_0'(x_0) \left[\frac{\partial x_0}{\partial t} \,+\, \exp(-\alpha\, t)\, u_0(x_0)\, \frac{\partial x_0}{\partial x} \right]$$

$$= \quad 0$$

compte tenu des relations (11) et (12), ce qui établit la propriété demandée.

2) On multiplie l'équation (1) par une fonction test φ à support compact dans $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et on intègre par parties les termes différentiels. Il vient :

$$\int_{\mathbb{R}\times[0,\,+\infty[} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \left[-u\, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \,-\, \frac{u^2}{2}\, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \,+\, \alpha\, u\, \varphi \right] \,-\, \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, u_0(x)\, \varphi(x,\, 0) \;=\; 0$$

ce qui permet d'étendre la notion de solution faible sous la forme : chercher une fonction u localement bornée de sorte que la relation suivante

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{R}\times[0,\,+\infty[} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \left[u\, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \,+\, \frac{u^2}{2}\, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \,+\, \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, u_0(x)\, \varphi(x,\, 0) \;= \\ \displaystyle\qquad\qquad\qquad\qquad = \int_{\mathbb{R}\times[0,\,+\infty[} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \;\; \alpha\, u\, \varphi \end{array} \right.$$

a lieu pour toute fonction test φ de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact dans $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. Quand on écrit la relation (13) avec une fonction inconnue u de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et une fonction test φ à support compact autour d'un point de discontinuité le long d'une courbe Γ de la forme

$$(14) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \;=\; \sigma\,,$$

le membre de droite de la relation (13) donne une quantité infiniment petite de surface et le membre de gauche une intégrale sur la courbe Γ. On en déduit que la relation de Rankine Hugoniot demeure **inchangée** malgré l'introduction du terme source dans l'équation de Burgers. On a donc pour une discontinuité u_g, u_d :

$$(15) \qquad \sigma \;=\; \frac{1}{2} \big(u_g \,+\, u_d \big)\,.$$

3) Si on suit la méthode des caractéristiques, la valeur candidate pour la solution u est donnée par la relation (4). Comme la fonction $\mathbb{R} \ni y \longmapsto u_0(y) \in \mathbb{R}$ est constante pour $y < 0$ et pour $y > 0$, on a comme valeur candidate $u_g = \exp(-\alpha\, t)$ à gauche de la discontinuité et $u_d = 0$ à droite de celle-ci. Compte tenu des relations (14) et (15), l'équation de la ligne de discontinuité $x = X(t)$ s'écrit dans notre cas particulier :

$$(16) \qquad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{1}{2} \exp(-\alpha\, t)\,, \qquad X(0) \;=\; 0\,,$$

et cette relation s'intègre sans difficulté :

$$(17) \qquad X(t) \;=\; \frac{1}{2\alpha} \Big(1 - \exp(-\alpha\, t) \Big)\,.$$

Il reste à vérifier que la fonction $u(x,\, t)$ définie par les relations :

$$(18) \qquad u(x,\, t) \;=\; \begin{cases} \exp(-\alpha\, t), & x < X(t)\,, \\ 0, & x > X(t)\,. \end{cases}$$

vérifie la relation (13) pour tout choix d'une fonction test φ. Cette étape n'offre pas de difficulté compte tenu de l'emploi de la méthode des caractéristiques dans les zones régulières et de la relation de Rankine-Hugoniot le long de la discontinuité.

FD, août 2002.