Caractéristiques.

On considère l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(H(x)\,u\big) \;=\; 0$$

où la fonction de Heaviside $H(\bullet)$ vaut 0 pour $x < 0$ et 1 pour $x > 0$.

1) Déterminer les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \;=\; H(x)\,.$$

On dispose de plus de la condition initiale

$$(3) \qquad u(x,\,0) \;=\; u_0(x)\;, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

où u_0 est une fonction continue fixée.

2) Calculer les valeurs $u(x,\,t)$ de la solution du système (1)(3) obtenues à l'aide de la méthode des caractéristiques. Pour quelles valeurs de l'argument $(x,\,t)$ cette représentation est-elle valable ?

3) Si $u_0(0) = 0$, proposer à partir de la question précédente une solution possible $u(x,\,t)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$. Vérifier que c'est bien une solution au sens des distributions de l'équation (1), c'est à dire

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}\times]0,\,+\infty[} \Big[\, u(x,\,t)\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} \;+\; H(x)\,u(x,\,t)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} \,\Big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \;=\; 0 \\ &\hspace{20em} \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}\times]0,\,\infty[)\,. \end{aligned} \right.$$

4) Si $u_0(0) = 0$, donner des conditions sur la condition initiale pour que la fonction étudiée à la question précédente soit une solution classique (de classe $\mathcal{C}^1$) du problème de Cauchy (1)(3).

5) Si $u_0(0) \neq 0$, montrer à l'aide de la relation de Rankine et Hugoniot que la solution faible du problème de Cauchy (1)(3) n'est pas continue. Déterminer $u(x,\,t)$ pour toutes les valeurs de $(x,\,t)$ dans ce cas général.

Caractéristiques.
Proposition de corrigé.

1) On a $x(t) = x_0 + t$ si $x_0 > 0$ et $x(t) = x_0$ si $x_0 < 0$. Donc l'ensemble des points $(x(t),\, t)$ atteints par le flot de l'équation (2) ignore le cône d'espace-temps défini par

$$(5) \qquad (x,\, t)\,, \qquad t > 0\,, \quad 0 < x < t\,.$$

2) On construit facilement une solution par caractéristiques dans le complémentaire de l'ensemble défini par la relation (4). Il vient

$$(6) \qquad \begin{cases} u(x,\, t) \;=\; u_0(x_0) & \text{si } x = x_0 < 0 \\ u(x,\, t) \;=\; u_0(x_0) & \text{si } x = x_0 + t\,, \quad x_0 > 0\,. \end{cases}$$

3) Si $u_0(0) = 0$, il est naturel d'étendre la solution (6) par $u(x,t) = u_0(x_0) = 0$ si le point $(x,\, t)$ appartient au cône défini en (5). On vérifie qu'on a une solution au sens des distributions. On coupe l'intégrale du membre de gauche de l'égalité (4) en trois parties, selon que $x < 0, t > 0$ $(x,\, t)$ appartient à la région (5), ou $x > t > 0$. Il vient :

$$\int_{x\,<\,0,\; t\,>\,0} \Big[u(x,\, t)\, \frac{\partial \varphi}{\partial t} + H(x)\, u(x,\, t)\, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \;=\; \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x\, u_0(x_0) \int_0^{\infty} \mathrm{d}t\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, \mathrm{d}t$ est nulle car le support de la fonction φ est inclus dans l'ouvert $\mathbb{R}\times]0,\, \infty[$. On a aussi

$$\int_{t\,>\,0,\; 0\,<\,x\,<\,t} \Big[u(x,\, t)\, \frac{\partial \varphi}{\partial t} + H(x)\, u(x,\, t)\, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \;=\; 0$$

car $u \equiv 0$ par hypothèse dans la région (5). On fait enfin le changement de variables $x = y + \theta,\ t = \theta$ dans l'intégrale correspondant au domaine $x > t > 0$. Compte tenu des relations claires $y = x - t$ et $\theta = t$, il vient

$$\begin{aligned}
&\int_{x\,>\,t\,>\,0} \Big[u(x,\, t)\, \frac{\partial \varphi}{\partial t} + H(x)\, u(x,\, t)\, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \;= \\
&\quad = \int_{x\,>\,t\,>\,0} u(x,\, t)\, \Big[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \\
&\quad = \int_{\theta\,>\,0,\; y\,>\,0} u(y + \theta,\, \theta)\, \Big[\frac{\partial y}{\partial t}\, \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial t}\, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial x}\, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big] (y + \theta,\, \theta)\; \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\theta \\
&\quad = \int_{\theta\,>\,0,\; y\,>\,0} u(y + \theta,\, \theta)\, \frac{\partial \theta}{\partial t}\, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} (y + \theta,\, \theta)\; \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\theta \\
&\quad = \int_{y\,>\,0} \mathrm{d}y\, u_0(y) \int_{\theta\,>\,0} \mathrm{d}\theta\, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \;=\; 0 \qquad \text{car} \int_{\theta\,>\,0} \mathrm{d}\theta\, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \;=\; 0.
\end{aligned}$$

La solution construire en adjoignant la relation $u(x,\, t) = u_0(x_0) = 0$ dans la région (5) où la solution par caractéristiques (6) est bien solution de (1) au sens des distributions.

4) Pour passer d'une solution au sens des distributions à une solution classique, il suffit de chercher dans quelles conditions la fonction $u(\bullet, \bullet)$ définie par

$$(7) \qquad u(x,\, t) \;=\; \begin{cases} u_0(x) & x < 0\,, \quad t > 0 \\ u_0(0) \;=\; 0 & 0 < x < t \\ u_0(x - t) & t > 0, \quad x > t \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$. Il est facile de voir qu'il suffit que $u_0(\bullet)$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie

$$(8) \qquad u_0(0) \;=\; 0\,, \qquad u'(0) \;=\; 0\,.$$

5) On peut être tenté de chercher une solution faible par continuité, c'est à dire poser

$$(9) \qquad u(x,\, t) \;=\; u_0(0) \;\neq 0 \qquad \text{si} \quad 0 < x < t\,.$$

Ecrivons ce que fournit la relation de Rankine-Hugoniot le long d'une discontinuité de vitesse σ :

$$(10) \qquad \big[\, H(x)\, u \,\big] \;=\; \sigma \,\big[\, u \,\big]\,.$$

La solution (6)(9) est continue, mais le flux $H(x)\, u$ ne l'est pas ! La relation (10) le long de l'axe $x = 0$ pour lequel σ est nul implique que $u(0+,\, t) = 0.$ Une solution faible du problème (1)(3) est donc nécessairement nulle dans la région définie par les relations (5), donc **discontinue** à la traversée de l'axe $x = 0,$ même si $u_0(0) \neq 0\,!$ On vérifie que la relation (10) est réalisée pour la droite $x = t,$ ce qui achève la construction

FD, avec les contributions de Laurence Halpern et Bruno Després,
février 1999, avril 2003.