Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Applications de l'Analyse à la Géométrie. Devoir numéro 2, 24 mars 2012.

Droite des moindres carrés

A rendre le 7 avril 2012. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies.

On se propose de justifier l'existence et l'unicité d'une droite qui approche "mieux que toute autre" au sens des moindres carrés un ensemble fini de points quasiment arbitraire dans le plan.

• On se donne un entier N supérieur ou égal à 2 et deux familles $(x_j)_{1 \leq j \leq N}$ et $(y_j)_{1 \leq j \leq N}$ de nombres réels. On introduit les notations

$$(1) \qquad < x > = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j \,, \qquad < x^2 > = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j^2$$

et pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$(2) \qquad f(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \big(x_j - \theta\big)^2 \,.$$

a) Démontrer que la fonction $f(\bullet)$ est une fonction réelle polynomiale de degré deux par rapport à la variable réelle θ. Préciser son expression algébrique en fonction de la moyenne $< x >$ et de la moyenne des carrés $< x^2 >$.

b) Après avoir remarqué que la fonction $f(\bullet)$ est toujours positive, démontrer l'inégalité

$$(3) \qquad < x >^2 \, \leq \, < x^2 > \,.$$

c) On suppose qu'il existe une valeur de θ pour laquelle on a $f(\theta) = 0$. En déduire qu'alors tous les x_j sont égaux.

d) Démontrer que si deux au moins des x_j sont différents, c'est à dire si l'on a

$$(4) \qquad \exists \; j, \, k \in \{1, \, 2, \, \dots N\}, \; x_j \neq x_k \,,$$

alors la variance $\sigma \equiv < x^2 > - < x >^2$ est strictement positive :

$$(5) \qquad < x^2 > - < x >^2 > 0 \,.$$

• On cherche à approcher l'ensemble des N points $(x_j,\, y_j)_{1 \leq j \leq N}$ par un "modèle linéaire" de la forme

(6) $\qquad y \,=\, \alpha\, x \,+\, \beta\,.$

Dans la relation (6), les coefficients α et β sont inconnus. Pour les fixer de façon raisonnable, on introduit l'écart entre les données $(x_j,\, y_j)_{1 \leq j \leq N}$ et le modèle (6) avec une fonction quadratique. On pose

(7) $$J(\alpha,\, \beta) \,=\, \frac{1}{2\,N} \sum_{j=1}^{N} \big(y_j - \alpha\, x_j - \beta \big)^2$$

et on cherche à minimiser cette fonction de deux variables.

e) Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial J}{\partial \alpha}$ et $\dfrac{\partial J}{\partial \beta}$.

f) Montrer que si la fonction $J(\bullet)$ est minimale au point $(a,\, b)$, les nombres réels a et b sont solution d'un système linéaire de deux équations que l'on précisera ; on pourra poser

(8) $$< y >= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} y_j\,, \qquad < xy >= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j\, y_j\,.$$

g) On fait pour toute la suite du problème l'hypothèse (4) que deux au moins des abscisses x_j sont différentes. Montrer qu'alors on peut calculer a en fonction des données et préciser son expression.

h) En déduire une expression de b en fonction des données et de la pente a calculée à la question précédente.

i) On fixe $(a,\, b)$ comme étant la solution unique du système défini à la question **f)** et résolu lors des deux questions précédentes. Montrer que si $(\alpha,\, \beta)$ est un point arbitraire du plan, alors on a l'inégalité

(9) $\qquad J(\alpha,\, \beta) \,-\, J(a,\, b) \,\geq\, 0\,.$

j) A quelle condition a-t-on égalité dans la relation (9) ?

• Le point $(a,\, b)$ et la relation $y = a\, x + b$ issue de (6) définissent la droite des moindres carrés qui approche "au mieux" le nuage de points $(x_j,\, y_j)_{1 \leq j \leq N}$, au sens où la fonction $J(\bullet)$ y est minimale.