Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Cours "MVA006". ED 2. 10 mars 2012.

Fonctions de deux variables

Exercice 1) Une solution de l'équation de Laplace
On pose $u(x,\, y) \,=\, \mathrm{Log}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction u ?

b) Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

c) Montrer que $\Delta u(x,\, y) \,\equiv\, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \,=\, 0$.

Exercice 2) Explicitation d'équations aux dérivées partielles
On pose $u(x,\, y) \,=\, \mathrm{Log}\left(e^x + e^y\right)$.

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction u ?

b) Montrer que $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \,=\, 1$.

c) Montrer que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \,=\, 0$.

Exercice 3) Points critiques
On pose $u(x,\, y) \,=\, 2\,x^3 + x\,y^2 + 5\,x^2 + y^2$.

a) Calculer les dérivées partielles d'ordre un $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

a) Même question pour l'ordre deux avec $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

c) Quels sont les points $(x,\, y)$ qui annulent simultanément $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}$?

d) Pour ces points, appelés aussi points critiques ou points stationnaires, déterminer s'il s'agit d'un minimum, d'un maximum ou d'un point selle.

Exercice 4) Distance d'un point à une droite

On considère la fonction de deux variables $f(x,\, y) \;=\; 4-4\,x-8\,y+6\,x^2+4\,x\,y+9\,y^2$.

a) Calculer les dérivées partielles du premier ordre de $f(x,\, y)$. En déduire que la fonction f admet un unique point critique $(x_0,\, y_0)$ qu'on déterminera.

b) Calculer les dérivées partielles du deuxième ordre de la fonction f en ce point. En déduire sa nature : minimum, maximum ou point selle. On admettra que ce point $(x_0,\, y_0)$ est un minimum **absolu** de la fonction f.

c) Soit M un point du plan de coordonnées $(X,\, Y)$ et D la droite du plan d'équation $x + 2\,y - 2 = 0$. Calculer la distance $d(X,\, Y)$ du point M à la droite D.

d) Avec les notations introduites à la question précédente, exprimer la quantité $g \equiv d(X,\, Y)^2 + OM^2$ à l'aide de $f(X,\, Y)$. En déduire la valeur minimale prise par g lorsque le point M parcourt le plan.

Exercice 5) Un minimum

On pose $z(x,\, y) \;=\; x^2 + x\,y + y^2 + \dfrac{a^3}{x} + \dfrac{a^3}{y}$.

a) Pour quelles valeurs de $(x,\, y)$ la fonction $z(x,\, y)$ est-elle définie ?

b) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de la fonction z.

c) Montrer que la fonction z présente un minimum au point $x = y = \frac{a}{3^{1/3}}$.

Exercice 6) Intégration par parties à une variable

Soit φ une fonctions régulière définie sur $[0,\, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'on a : $\quad \varphi(1) \;=\; \varphi(0) + \varphi'(0) + \dfrac{1}{2}\,\varphi''(0) + \displaystyle\int_0^1 \dfrac{(t-1)^2}{2}\,\varphi'''(t)\,\mathrm{d}t\,.$