Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Applications de l'Analyse à la Géométrie. ED 3, 17 mars 2012.

Fonctions de deux variables réelles

Exercice 1) Méthode des caractéristiques
Soit a un nombre réel fixé. On considère une fonction $u(x, y)$ régulière solution de l'équation aux dérivées partielles suivante : $\dfrac{\partial u}{\partial x} + a \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.
Soit D la droite d'équation $y = a\,x + b$.
Montrer que la fonction $u(x, y)$ est constante sur la droite D.

Exercice 2) Méthode de d'Alembert
On cherche à déterminer l'expression générale d'une fonction $f(x, y)$ régulière solution de l'équation des ondes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.
On pose $u = x + y$, $v = x - y$ et on introduit la fonction $g(u, v)$ définie par $g(u, v) = f(x, y)$.

a) Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de la fonction g.

b) Exprimer la combinaison $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de la fonction g.

c) Résoudre par intégrations successives l'équation obtenue. En déduire qu'une solution générale $f(x, y)$ de l'équation des ondes peut se décomposer sous la forme

(1) $f(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$

où les fonctions d'une seule variable φ et ψ sont arbitraires.

d) Vérifier que si la fonction f est de la forme (1), elle est bien solution de l'équation des ondes.

Exercice 3) Laplacien radial
Pour un point (x, y) arbitraire du plan, on introduit le rayon $r > 0$ défini par la relation $r^2 = x^2 + y^2$. Soit φ une fonction régulière d'une variable réelle. On introduit une fonction de deux variables $f(x, y)$ grâce à l'expression $f(x, y) = \varphi(r)$.

a) Calculer $\Delta f \equiv \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction de la variable r et des dérivées de la fonction φ.

b) En déduire l'expression d'une solution radiale $f(x,\, y) \,=\, \varphi(r)$ de l'équation de Laplace $\Delta f = 0$.

Exercice 4) Approximation à l'aide de la formule de Taylor

Pour x et y réels positifs strictement, on pose $z(x,\, y) \,=\, x^y$.

a) Proposer un développement au second ordre par rapport au couple $(u,\, v)$ de l'expression $z(1+u,\, 1+v)$.

b) Utiliser cette expression pour calculer de manière approchée le nombre $1{,}01^{\,1{,}02}$. Quel est l'ordre de grandeur de l'erreur numérique commise ?

c) Reprendre l'ensemble de la question précédente avec le nombre $1{,}1^{\,1{,}2}$.

Exercice 5) Développements limités à l'aide de la formule de Taylor

Pour x et y réels positifs strictement, on pose $z(x,\, y) \,=\, (\sin x)\, (\sin y)$.

a) A l'aide de la formule de Taylor, proposer un développement limité à l'ordre deux par rapport au couple $(u,\, v)$ de l'expression $z\Big(\dfrac{\pi}{4} + u,\, \dfrac{\pi}{4} + v\Big)$.

b) Reprendre le même problème en utilisant au départ un simple développement limité de fonctions d'une seule variable réelle.

c) On pose $f(x,\, y) \,=\, e^x \,\mathrm{Log}(1+y)$. Reprendre les deux questions précédentes avec cette fonction autour de $(x_0,\, y_0) \,=\, (0,\, 0)$.

d) On pose $\theta(x,\, y) \,=\, \dfrac{1}{1 - x - y + x\, y}$. Reprendre les deux questions a) et b) avec cette fonction autour de $(x_0,\, y_0) \,=\, (0,\, 0)$.

Exercice 6) Schéma aux différences finies

Pour une fonction régulière $u(x,\, y)$ de deux variables réelles x et y et $h > 0$, on pose

$$(\Delta_h u)(x,\, y) \,\equiv\, \frac{1}{h^2}\,\big(u(x+h,\, y) + u(x,\, y+h) + u(x-h,\, y) + u(x,\, y-h) - 4\, u(x,\, y)\big)\,.$$

a) Montrer que $(\Delta_h u)(x,\, y)$ approche $(\Delta u)(x,\, y)$ avec une précision d'ordre deux : $(\Delta_h u)(x,\, y) - (\Delta u)(x,\, y) \,=\, \mathrm{O}(h^2)$.

b) Préciser la régularité nécessaire sur la fonction u pour que l'estimation précédente soit valable.