Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Applications de l'Analyse à la Géométrie. ED 4, 24 mars 2012.

Calcul d'intégrales doubles

Exercice 1) Domaines rectangulaires
a) Soit D le domaine $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2\}$. Calculer l'intégrale double $\int\int_D x\, y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.
b) Même question avec l'intégrale $\int\int_D x \,\sin(x+y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ dans le domaine $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Exercice 2) Calcul d'aire
Soit $a < b$ et h trois nombres réels strictement positifs. On note A et B les points de coordonnées $(0, a)$ et $(h,\, b)$. On appelle P le parallélogramme bordé par l'axe des abscisses, les droites $x = a$, $x = b$ et la droite AB.
a) A l'aide d'un calcul intégral classique, rappeler la valeur de l'aire de P.
b) Par un calcul d'intégrale double, retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Fubini et une intégration d'abord selon y puis ensuite selon x.

Exercice 3) Echange de l'ordre d'intégration
On se donne une fonction f définie pour x et y réels. Ecrire l'expression de l'intégrale double $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x \; f(x,\, y)$ obtenue après échange de l'ordre des intégrales.

Exercice 4) Calcul d'une aire et d'un centre de gravité
On appelle D le domaine défini par $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.
a) Après l'avoir représenté graphiquement, calculer la surface $\mid D \mid$ du domaine D.
b) On rappelle que le centre de gravité de D est l'unique point G du plan de coordonnés $(X,\, Y)$ tel que

$$(1) \qquad \int\int_D (x - X) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \; = \; \int\int_D (y - Y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \; = \; 0 \, .$$

Calculer les coordonnées du centre de gravité G du domaine D.

Exercice 5) Encadrement
On considère le domaine D défini par $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\, 0 \leq x \leq 2,\, 0 \leq y \leq 2\}$. A l'aide d'inégalités fondamentales valables sur le domaine D, proposer un minorant et un majorant de l'intégrale $\int\int_D (x+1)^{\,y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

Exercice 6) Moments d'inertie
a) Calculer le moment d'inertie $\int\int_D \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ dans le carré $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$.

b) Même question avec l'intégrale double qui s'écrit avec la même expression que celle proposée au a) mais dans le disque unité qu'on peut définir par $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Pensez-vous qu'une méthode de calcul qui utiliserait la représentation polaire $x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$ du disque unité serait plus simple ?