Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Applications de l'Analyse à la Géométrie. ED 5, 31 mars 2012.

Changements de variables lors du calcul d'intégrales doubles

Exercice 1) Domaine circulaire
a) Soit D le domaine $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\; x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Calculer l'intégrale double $\int\int_D x^3\, y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
b) Même question avec l'intégrale qui s'écrit avec la même expression algébrique mais dans le domaine $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\,,\; x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Exercice 2) Domaine elliptique
Soit $a > 0$ et $b > 0$ deux longueurs fixées. On note D l'intersection de l'intérieur de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec le premier quadrant $x \geq 0,\; y \geq 0$.
a) Effectuer un changement de variables non banal pour transformer l'intégrale double $\int\int_D x\, y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
a) Achever le calcul de cette intégrale.

Exercice 3) Un changement de variable non classique
Soit $0 < a < b$ deux longueurs fixées et $0 < \alpha < \beta$ deux autres nombres. On appelle D le domaine du quadrant $x \geq 0,\; y \geq 0$ entre les deux arcs d'hyperboles $x\, y = a$ et $x\, y = b$ d'une part et les droites passant par l'origine et de pentes α et β d'autre part.
a) Dessiner le domaine D.
b) Calculer l'aire de ce domaine, après avoir effectué un changement de variables adapté au problème.

Exercice 4) Changement de variable hyperbolique
Soit $\varphi_0 > 0$ un nombre réel strictement positif et D le domaine $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,$ $x \geq 0,\; y \geq 0,\, x^2 - y^2 \leq 1,\, y \leq x\, \tanh \varphi_0\}$.
a) Dessiner le domaine D.
b) Calculer l'aire de ce domaine, après avoir effectué un changement de variables adapté au problème.
c) Calculer l'intégrale double $\int\int_D \left(x^2 - y^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Exercice 5) Calcul d'une intégrale Gaussienne
Soit R un réel strictement positif, C_R le carré $[0,\, R] \times [0,\, R]$ et D_R le quart de disque centé à l'origine et de rayon R: $D_R = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2 + y^2 \leq R^2\}$. On introduit la fonction de deux variables

$$f(x,\, y) = \exp\big(-(x^2 + y^2)\big).$$

a) Montrer qu'on a les inégalités suivantes :

$$\int\!\!\int_{D_R} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \,\leq\, \int\!\!\int_{C_R} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \,\leq\, \int\!\!\int_{D_{R\sqrt{2}}} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{1}$$

b) Montrer à l'aide du théorème de Fubini que l'intégrale $\int\!\int_{C_R} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ fait apparaître le carré d'une intégrale simple.
c) Montrer à l'aide d'un changement de variable classique que si R tend vers l'infini, l'intégrale double $\int\!\int_{D_R} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ converge vers une valeur numérique précise que l'on explicitera.
d) Montrer que si elles existent, les limites pour R tendant vers l'infini de $\int\!\int_{C_R} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et $\int\!\int_{D_R} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ sont égales.
e) En déduire l'expression, avec une formule algébrique "exacte" de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.