Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Cours de "Mathématiques du Signal Déterministe"

octobre 2012, novembre 2015

Exercices pour la séance numéro 02

Exercice 1) Coefficients de Fourier

Soit g un polynome trigonométrique de la forme

$$g(t) \,=\, \alpha_0 \,+\, \sum_{k=1}^{N} \Big[\alpha_k \, \cos\Big(2\,k\,\pi \frac{t}{T} \Big) \,+\, \beta_k \, \sin\Big(2\,k\,\pi \frac{t}{T} \Big) \Big] \,. \qquad (1)$$

Montrer que le coefficient de Fourier β_k est donné par la relation

$\beta_k = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \, \sin\big(2\,k\,\pi \frac{t}{T} \big) \, {\rm d}t \,.$

Exercice 2) Série de Fourier de la dent de requin

On se donne $T > 0$. La "dent de requin" est une fonction f périodique de période T, discontinue pour les valeurs de la forme $k\,T$ avec k entier, affine sur l'intervalle $]0,\, T[$ où l'on a $f(t) = \frac{t}{T}$. Montrer que le développement en série de Fourier de f s'exprime sous la forme

$f(t) \,=\, \frac{1}{2} \,-\, \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \, \sin\big(2k\pi \frac{t}{T} \big) \,.$

Exercice 3) Série de Fourier de la corde pincée

Soit β un réel non nul. Montrer qu'on a

$$\int_0^1 \theta \, \exp(i\,\beta\,\theta) \, {\rm d}\theta \,=\, \big[\tfrac{1}{\beta^2} (\cos\beta \,-\, 1) \,+\, \tfrac{1}{\beta} \sin\beta \big] \,+\, i \, \big[\tfrac{1}{\beta^2} \sin\beta - \tfrac{1}{\beta} \cos\beta \big] \,. \qquad (2)$$

On se donne α de sorte que $0 < \alpha < 1$. On définit la "corde pincée" comme la fonction c périodique de période 1, continue sur $\mathbb{R}$, affine sur les intervalles $[0,\, \alpha]$ et $[\alpha,\, 1]$ de sorte que $c(0) = c(1) = 0$ et $c(\alpha) = 1$. Après avoir vérifié que $c(\theta) = \min(\frac{\theta}{\alpha},\, \frac{1-\theta}{1-\alpha})$, déduire de la relation (2) que le développement en série de Fourier de la corde pincée est donné par la relation

$$c(\theta) \,=\, \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\,\alpha\,(1-\alpha)\,\pi^2} \displaystyle\sum_{k \geq 1} \dfrac{1}{k^2} \Big[\big(\cos(2k\pi\alpha) - 1 \big) \, \cos(2k\pi\theta) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \sin(2k\pi\alpha) \, \sin(2k\pi\theta) \Big] \,. \end{array} \right. \qquad (3)$$

Exercice 4) Théorème de Parseval

On approche un signal f périodique de période T et d'énergie finie, c'est à dire une fonction $f \in {\rm L}^2(0,\, T)$ de carré intégrable, par une série de Fourier à l'aide d'une relation analogue à (1). Montrer qu'on a l'égalité suivante, dite de Parseval :

$\alpha_0^2 \,+\, \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \big(\alpha_k^2 + \beta_k^2 \big) \,=\, \frac{1}{T} \int_0^T \, |\,f\,|^2 \, {\rm d}t \,.$