Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Cours de "Mathématiques du Signal Déterministe" 08 janvier 2013

Exercices pour la séance numéro 13

Exercice 1) A propos de l'opérateur de translation
Soit $a > 0$. On note τ_a l'opérateur de translation dans le temps défini pour une fonction φ régulière et à décroissance rapide $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ par $(\tau_a \varphi)(t) = \varphi(t-a)$. Soit $f \in \mathrm{L}^\infty$ une fonction bornée. Montrer que l'on a $\int_{\mathbb{R}} (\tau_a f)(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, (\tau_{-a} \varphi)(t)\, \mathrm{d}t$. En déduire que la définition $\tau_a U$ de la translatée d'une distribution $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ grâce à la relation $< \tau_a U\, ,\, \varphi > = < U\, ,\, \tau_{-a}\varphi >$, peut se ramener à la relation démontrée ci-dessus.

Exercice 2) Translatées de la masse de Dirac
Soit $a > 0$ et τ_a l'opérateur introduit à l'exercice précédent. On désigné par δ la masse de Dirac et δ_α la masse de Dirac en un point donné $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\tau_a \delta = \delta_a$ et que de façon plus générale $(\tau_a)^k \delta = \delta_{ka}$ pour k entier positif ou nul. Montrer que $(\tau_a)^{-1} \delta = \delta_{-a}$ et en déduire que la relation $(\tau_a)^k \delta = \delta_{ka}$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3) Translatée d'une distribution
Soit $a > 0$ et τ_a l'opérateur de translation dans le temps. Soit $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ une distribution quelconque. Démontrer que $\delta_a * U = \tau_a U$.

Exercice 4) Filtres classiques
Soit $x \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\, \delta_{na} \in X_a$ un signal discret. On note T_1 le filtre qui à $x \in X_a$ associe le signal $T_1 x = y$ tel que $y_n = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$. De même, on note T_2 le filtre qui à $x \in X_a$ associe le signal $T_2 x = z$ tel que $z_n = \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{4}x_{n-2}$. Calculer les réponses impulsionnelles h_1 et h_2 de ces deux filtes et montrer qu'ils sont causaux. Vérifier que l'on a $T_1 x = h_1 * x$ et $T_2 x = h_2 * x$ pour tout signal $x \in X_a$. Montrer que $h_1 * h_1 = h_2$. En déduire que l'on a $T_1(T_1 x) = T_2 x$ pour tout signal discret $x \in X_a$.

Exercice 5) D'autres filtres classiques
On note T le filtre qui à $x \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\, \delta_{na} \in X_a$ associe le signal $Tx = y \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n\, \delta_{na} \in X_a$ tel que $y_n = \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}x_{n-1}$. Calculer la réponse impulsionnelle h de ce filtre et montrer que le filtre T n'est pas causal (on pourra construire un signal x causal qui se transforme en un signal y non causal).

Exercice 6) Dérivateur
Montrer que le filtre D_a défini par la relation de récurrence $(D_a x)_n = \frac{1}{a}(x_n - x_{n-1})$ est causal et préciser sa réponse impulsionnelle. Montrer que si a tend vers zéro et si le signal discret x est obtenu par restriction d'un signal analogique régulier X (de façon précise, $x_n = X(na)$) alors le signal de sortie $D_a x$ approche la dérivée $X'(t)$. Calculer le résultat itéré $D_a(D_a x)$. Quelle est sa limite si a tend vers zéro ?