Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Cours de "Mathématiques du Signal Déterministe" 30 septembre 2014

D'autres exercices pour la séance numéro 01

Exercice 1) Logarithme
A partir de la dérivée d'une fonction réciproque, montrer que l'on a
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{Log} x = \frac{1}{x}$.

Exercice 2) Formule de Taylor avec reste intégral
On se donne une fonction deux fois dérivable $\varphi\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que l'on a

(1) $$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\, \varphi''(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Montrer à l'aide d'une nouvelle intégration par parties à partir de la relation (1) que l'on a

(2) $$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(0) + \frac{1}{2}\, \varphi''(0) + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^2\, \varphi'''(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

On se donne deux réels $a < b$ et une fonction trois fois dérivable $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On pose $h \equiv b - a$ et pour $0 \leq t \leq 1$, $\varphi(t) = f(a + t\, h)$. Calculer $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$ et $\varphi'''(t)$ en fonction de la fonction f et de ses dérivées. Que valent en particulier $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$?
Etablir une formule de Taylor pour f avec reste intégral :

(3) $$f(b) = f(a) + f'(a)\, h + \frac{1}{2}\, f''(a)\, h^2 + \frac{h^3}{2}\, R(a, b\, ;\, f)\,.$$

On donnera une expression exacte du terme $R(a, b\, ;\, f)$ présent dans le "reste" de la formule de Taylor (3).

Exercice 3) Equations différentielles
Calculer la solution $u(t)$ de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = t$ qui satisfait à la condition initiale $u(0) = 1$. Reprendre la question si on change le second membre de l'équation différentielle : la fonction $v(t)$ est maintenant solution de $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v(t) = \exp(-t)$ associée à la même condition initiale $v(0) = 1$.