Contraintes "égalité".

• Pour $(x,\, y) \in \mathrm{I\!R}^2$, on pose

(1) $J_1(x,\, y) \;=\; \dfrac{1}{4}\,\big(\, x^4 \,+\, y^2 \,\big)$

(2) $J_2(x,\, y) \;=\; x^2 \,+\, 2\,x\,y \,+\, 5\,y^2$

et pour $(x,\, y,\, z) \in \mathrm{I\!R}^3$, on introduit

(3) $J_3(x,\, y,\, z) \;=\; \dfrac{1}{2}\,\big(\, x^2 \,+\, y^2 \,+\, z^2 \,\big)\,.$

On définit aussi les ensembles suivants :

(4) $K_1 \;=\; \{\, (x,\, y) \in \mathrm{I\!R}^2 \,,\quad x + y \,=\, 3 \,\}\,,$

(5) $K_2 \;=\; \{\, (x,\, y) \in \mathrm{I\!R}^2 \,,\quad x^2 \,+\, y^2 \,=\, 1 \,\}\,,$

(6) $K_3 \;=\; \{\, (x,\, y,\, z) \in \mathrm{I\!R}^3 \,,\quad x + y + z = 8 \,,\quad x + 2y - z = 10 \,\}\,.$

1) Pour $1 \leq m \leq 3$, la fonction J_m est-elle convexe ? Est-elle strictement convexe ? Est-elle $\alpha-$convexe ?

2) Pour $1 \leq m \leq 3$, l'ensemble K_m est-il convexe ? Est-il fermé ? Est-il non vide ?

3) Pour $1 \leq m \leq 3$, le problème (P_m) défini par

$(P_m)\qquad u_m \in K_m \,,\quad J_m(u_m) \,\leq\, J_m(v)\;, \qquad \forall\, v \in K_m$

admet-il au moins une solution ? Cette solution, si elle existe, est-elle unique a priori ?

4) En utilisant la méthode de votre choix, et après l'avoir justifiée, expliciter toutes les solutions éventuelles u_m de chacun des problèmes (P_m) $(1 \leq m \leq 3)$.

FD, juillet 2003.

Contraintes "égalité".
Proposition de corrigé.

1) La fonction J_1 est convexe, strictement convexe, mais n'est pas $\alpha-$convexe car sa dérivée seconde en zéro a une valeur propre nulle. La fonction J_2 est deux fois dérivable. Sa dérivée seconde est représentée par la matrice suivante :

$$(S1) \qquad A \;=\; 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont strictement positives. Donc J_2 est $\alpha-$convexe. Enfin, la fonction J_3 est 1-convexe.

2) L'ensemble K_1 est une droite affine. C'est un convexe fermé non vide. L'ensemble K_2 est le cercle unité du plan. C'est un fermé borné non vide, donc compact, mais ce n'est pas un ensemble convexe. L'ensemble K_3 est l'intersection de deux plans affines non parallèles, donc c'est une droite affine qui est un convexe fermé non vide.

3) La fonction J_1 est convexe et est infinie à l'infini ; de plus l'ensemble K_1 est convexe fermé et non vide. On a donc existence d'une solution pour le problème (P_1) et l'unicité résulte de la stricte convexité de la fonction J_1. L'ensemble K_2 est compact et la fonction J_2 est continue sur K_2. Donc elle admet un minimum sur l'ensemble K_2 et celui-ci est affectivement atteint. On en déduit que le problème (P_2) admet au moins une solution. Par contre, rien ne garantit l'unicité et nous verrons qu'elle n'est pas réalisée dans ce cas. La fonction J_3 est alpha convexe et on veut la minimiser sur un ensemble K_3 qui est convexe, fermé et non vide. L'existence et l'unicité du problème de minimisation corrrespondant est donc classique et le problème (P_3) admet une unique solution.

4)(i) On peut remplacer y par sa valeur en fonction de x et minimiser sur la droite réelle la fonction

$$(S2) \qquad \varphi_1(x) \;\equiv\; \tfrac{1}{4}\left(x^4 \,+\, (3-x)^2\right).$$

Une condition nécesaire d'optimum (et ici suffisante pour le minimum compte tenu de la convexité de J_1) consiste à annuler la dérivée de la fonction φ_1. Or

$$(S3) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi_1(x) \;=\; x^3 + \frac{1}{2}(x-3) \;\equiv\; \frac{1}{2}(x-1)\,(2x^2+2x+3)$$

qui s'annule en $x = 1$ seulement. La solution du problème (P_1) est donc

$$(S4) \qquad u_1 \;=\; (1,\,2)\,, \quad J_1(u_1) \;=\; \frac{5}{4}\,.$$

4)(ii) Sur l'ensemble K_2, le gradient de la fonction $F_2(x,\,y) \equiv x^2+y^2-1$ n'est jamais nul. Les conditions d'optimalité dans le cas de contraintes d'égalité peuvent donc être utilisées, ce qui assure de l'existence d'un multiplicateur de Lagrange λ de sorte que

$$(S5) \qquad \nabla J_2 \,+\, \lambda\,\nabla F_2 \;=\; 0\,.$$

Quand on prend la composante selon x de la relation (S5), il vient $x+y-\lambda\,x = 0$, et avec la seconde composante, on a $x + 5\,y - \lambda\,y = 0$. Le rapport $\xi \equiv \frac{y}{x}$ est donc solution de l'équation

$$(S6) \qquad \xi^2 - 4\,\xi - 1 = 0$$

et on a aussi compte tenu de (4) : $x^2\,(1 + \xi^2) = 1$. Dans le premier cas où $\xi = 2 + \sqrt{5}$, on a $x^2 = \frac{\sqrt{5}-2}{2\,\sqrt{5}}$ et la valeur correspondante de la fonction J_2 est donnée par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} J_2(x,\,y) &= x^2\,(1 + 2\,\xi + 5\,\xi^2) \\ &= \frac{\sqrt{5}-2}{2\,\sqrt{5}}\Big(1 + 2\,(2+\sqrt{5}) + 5\,(2+\sqrt{5})^2\Big) \quad = 3+\sqrt{5}\,. \end{aligned}$$

Dans le second cas où $\xi = 2 - \sqrt{5}$, on a à l'optimum $x^2 = \frac{\sqrt{5}+2}{2\,\sqrt{5}}$ et la valeur en ce point de la fonction J_2 est donnée par :

$$\begin{aligned} J_2(x,\,y) &= x^2\,(1 + 2\,\xi + 5\,\xi^2) \\ &= \frac{\sqrt{5}+2}{2\,\sqrt{5}}\Big(1 + 2\,(2-\sqrt{5}) + 5\,(2-\sqrt{5})^2\Big) \quad = 3-\sqrt{5}\,. \end{aligned}$$

Cette dernière valeur est donc minimale. Elle est atteinte pour

$$(S7) \qquad u_2 \in \left\{ \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2\,\sqrt{5}}}\,,\, -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\,\sqrt{5}}}\right),\, \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2\,\sqrt{5}}}\,,\, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\,\sqrt{5}}}\right) \right\}.$$

Pour ce problème non convexe, on n'a pas l'unicité de la solution optimale.

4) (iii) On peut à nouveau utiliser les multiplicateurs de Lagrange car les gradients des deux fonctions qui donnent les contraintes de l'ensemble K_3 (voir la relation (6)) valent respectivement $(1,\,1,\,1)^{\rm t}$ et $(1,\,2,\,-1)^{\rm t}$, donc sont linéairement indépendants. Il existe donc λ et μ de sorte que

$$(S8) \qquad x - \lambda - \mu = 0\,, \quad y - \lambda - 2\,\mu = 0\,, \quad z - \lambda + \mu = 0\,.$$

Le système (S8) définit naturellement un paramétrage de la solution du problème (P_3) en fonction des multiplicateurs λ et μ. Quand on reporte les équations qui définissent l'ensemble K_3, il vient :

$$(S9) \qquad 3\,\lambda + 2\,\mu = 8\,, \qquad 2\,\lambda + 6\,\mu = 10\,,$$

dont on déduit $\lambda = 2$ et $\mu = 1$. Quand on reporte ces valeurs au sein de la relation (S8), on en déduit que la solution u_3 du problème (P_3) ainsi que la valeur optimale $J_3(u_3)$ sont donnés par

$$(S10) \qquad u_3 = (3,\,4,\,1)\,, \quad J_3(u_3) = 13\,.$$

FD, juillet 2003.