Hyperbolicité des équations d'Euler de la dynamique des gaz.

• Un état W pour les équations de la dynamique des gaz est un triplet $W = (\rho\,,\, q\,,\, \epsilon)^{\rm t}$ composé d'une densité ρ strictement positive ($\rho > 0$), d'une densité d' impulsion q qui permet de définir le champ de vitesse u grâce à la relation $q = \rho\, u$ et d'une énergie totale volumique ϵ définie par la relation $\epsilon = \frac{1}{2}\,\rho\, u^2 + \rho\, e$. De plus, la condition $e > 0$ exprime que l'énergie interne e est strictement positive. L'ensemble de tous les états W de la forme précédente qui vérifient les deux inégalités exprimées ci-dessus définit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ c'est à dire

$$\Omega \;=\; \Big\{\, (\rho\,,\, q\,,\, \epsilon)^{\rm t},\, \rho > 0,\, \epsilon - \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{\rho} > 0 \,\Big\}\,,$$

qui est par définition l'ensemble des états admissibles pour les équations d'Euler. La pression p est ensuite définie comme une fonction de l'état W calculée à l'aide de l'équation d'état $p = (\gamma - 1)\,\rho\, e$. La fonction de flux physique $\Omega \ni W \longmapsto f(W) \in \mathbb{R}^3$ est finalement définie par la relation

$$f(W) \;=\; \big(\,\rho\, u\,,\, \rho u^2 + p\,,\, u\,\epsilon + p\, u\,\big)^{\rm t} \qquad (1)$$

et le système des équations d'Euler de la dynamique des gaz consiste à chercher une fonction $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\, \ni (x\,,\, t) \longmapsto W(x,\, t) \in \Omega$ de l'espace $x \in \mathbb{R}$ et du temps $t \geq 0$ de sorte que

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) \;=\; 0\,. \qquad (2)$$

1) Expliciter la fonction $\Omega \ni W \longmapsto f(W) \in \mathbb{R}^3$.

2) Montrer que si on trouve une forme non conservative du système (2), c'est à dire un changement de variables $\Omega \ni W \longmapsto V(W) \in \mathcal{U}$ bijectif avec une jacobienne ${\rm d}V(W)$ inversible et un champ de matrices $\mathcal{U} \ni V \longmapsto B(V) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à trois lignes et trois colonnes, diagonalisables avec valeurs propres et vecteurs propres réels et tels que le système (2) s'écrit sous la forme équuivalente

$$\frac{\partial V}{\partial t} + B(V)\,\frac{\partial V}{\partial x} \;=\; 0\,, \qquad (3)$$

alors le système (2) est hyperbolique, *i.e.* la matrice jacobienne ${\rm d}f(W)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ avec des valeurs propres et des vecteurs propres réels.

3) Montrer que le système (2) des équations d'Euler est hyperbolique ; on pourra poser

$$s \;=\; \frac{p}{\rho^\gamma} \qquad \text{et} \quad V \;=\; \big(\,\rho\,,\, u\,,\, s\,\big)^{\rm t}\,. \qquad (4)$$

FD, février 1999, septembre 1999, juillet 2002.

Hyperbolicité des équations d'Euler de la dynamique des gaz.
Proposition de corrigé.

1) On a facilement

$$f(W) = \left(q\,,\, \frac{q^2}{\rho} + (\gamma-1)\Big(\epsilon - \frac{q^2}{2\rho}\Big)\,,\, \epsilon\,\frac{q}{\rho} + (\gamma-1)\,\frac{q}{\rho}\Big(\epsilon - \frac{q^2}{2\rho}\Big) \right)^{\rm t} .$$

• Pour montrer que le système (2) est hyperbolique, il suffit (sic !) de calculer la matrice jacobienne

(5) $\qquad A(W) \,=\, {\rm d}f(W)$

puis d'en chercher les valeurs propres et les vecteurs propres. L'exercice propose une méthode indirecte pour mener à bien cette démonstration.

2) On pose $V = \Phi(W)$ au sein du système de lois de conservation (2). Il vient

$\dfrac{\partial W}{\partial V}\,\dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial W}\,\dfrac{\partial W}{\partial V}\,\dfrac{\partial V}{\partial x} \,=\, 0\,,$ ce qui constitue exactement la relation (3), avec

(6) $\qquad B(V) \,=\, \big({\rm d}\Phi(V)\big)^{-1} \bullet {\rm d}f(W) \bullet {\rm d}\Phi(V)\,.$

Compte tenu de la relation (6), les matrices $B(V)$ et $A(W)$, sont semblables, ou conjuguées l'une de l'autre, donc elles ont mêmes valeurs propres et même structure de vecteurs propres. En particulier, si la matrice $B(V)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour la matrice $A(W)$.

3) Il faut d'abord trouver la relation (3) qui exprime les équations d'Euler avec les variables V proposées à la relation (4), c'est à dire exprimer les dérivées en temps

$\dfrac{\partial \rho}{\partial t},\, \dfrac{\partial u}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial s}{\partial t}$ en fonction des dérivées en espace $\dfrac{\partial \rho}{\partial x},\, \dfrac{\partial u}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial s}{\partial x}$.

La première équation s'écrit

(7) $\qquad \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\,\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\,\dfrac{\partial u}{\partial x} \,=\, 0$

et la seconde donne lieu au calcul suivant :

$$\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\, u\,\frac{\partial u}{\partial x} + u\,\frac{\partial}{\partial x}(\rho\, u) + \frac{\partial p}{\partial x} \quad =$$

$$= \; \rho\Big(\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} \Big) + u\Big(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\, u) \Big)$$

qui conduit à la seconde équation relative au champ de vitesse :

(8) $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial p}{\partial x} \,=\, 0\,.$

• On introduit classiquement la célérité du son :

(9) $\qquad c^2 \,\equiv\, \dfrac{\partial p}{\partial \rho}(\rho,\, s) \,=\, \dfrac{\gamma\, p}{\rho} \quad > 0$

et pour passer de l'équation pour l'énergie totale ϵ à l'équation pour l'entropie spécifique s, il convient de dériver avec soin la variable ϵ. On introduit l'opérateur de dérivation D le long de la ligne de courant :

(10) $$\mathrm{D} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$$

qui satisfait bien entendu à la règle de Leibniz : $\mathrm{D}\big(\varphi\,\psi\big) = \varphi\,(\mathrm{D}\psi) + (\mathrm{D}\varphi)\,\psi$.
Il vient alors

(11) $$\mathrm{D}\epsilon = \frac{u^2}{2}\,\mathrm{D}\rho + \rho\,u\,(\mathrm{D}u) + \rho\,(\mathrm{D}e) + (\mathrm{D}\rho)\,e$$

et comme $e \equiv \dfrac{1}{\gamma-1}\,s\,\rho^{\gamma-1}$, on a $\mathrm{D}e = \dfrac{1}{\gamma-1}\,\rho^{\gamma-1}\,(\mathrm{D}s) + s\,\rho^{\gamma-2}\,(\mathrm{D}\rho)$.
On tire enfin des relations (7) et (8) les relations suivantes
$\mathrm{D}\rho = -\rho\,\dfrac{\partial u}{\partial x}$; $\mathrm{D}u = -\dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial p}{\partial x}$ qu'on introduit ensuite au sein de la relation (11). Il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\epsilon &= \frac{\epsilon}{\rho}\,\mathrm{D}\rho + \rho\,u\,(\mathrm{D}u) + \frac{1}{\gamma-1}\,\rho^{\gamma}\,(\mathrm{D}s) + s\,\rho^{\gamma-1}(\mathrm{D}\rho) \\
&= -\epsilon\,\frac{\partial u}{\partial x} - u\,\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\gamma-1}\,\rho^{\gamma}\,(\mathrm{D}s) + \frac{p}{\rho}\left(-\rho\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
&= -\epsilon\,\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(p\,u) + \frac{1}{\gamma-1}\,\rho^{\gamma}\,(\mathrm{D}s)\,.
\end{aligned}$$

Si on remarque que l'équation de conservation de l'énergie peut aussi s'écrire
$\mathrm{D}\epsilon + \epsilon\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial x}(p\,u) = 0$, le calcul qui précède montre que l'on a $\mathrm{D}s = 0$ *i.e.*

(12) $$\frac{\partial s}{\partial t} + u\,\frac{\partial s}{\partial x} = 0\,.$$

• La matrice $B(V)$ associée aux variables non conservatives V définies à la relation (4) s'écrit donc directement à partir des relations (7), (8) et (12). Il vient

(13) $$B(V) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \dfrac{c^2}{\rho} & u & \dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial p}{\partial s} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ puisque ses valeurs propres, simples, s'écrivent $\lambda(V) = (\,u - c\,,\,u\,,\,u + c\,)$. Le système (2) des équations d'Euler de la dynamique des gaz est hyperbolique et la propriété demandée est établie.

FD, février 1999, septembre 1999, août 2002.
Correction d'Estelle Hauteville, avril 2003.