Sous-différentiel.

• On désigne par V un espace de Hilbert réel, U une partie convexe non vide de V et J une fonction convexe de U à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le dual V' de l'espace V est formé de toutes les formes linéaires φ continues de V à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit x un point de U. Le sous-différentiel de J en u, noté $\partial J(u)$, est défini par

(1) $\quad \partial J(u) \;=\; \{\, p \in V', \quad \forall\, v \in U, \;\; J(v) \;\geq\; J(u) + < p, v - u > \}.$

Intuitivement, le sous-différentiel est formé par toutes les directions des hyperplans qui passent par le point $(u,\, J(u))$ et restent "sous" le graphe de la fonction J.

1) Montrer que si J est dérivable au sens de Gâteaux au point u, alors le sous différentiel de J existe et est formé du singleton $\{J'(u)\}$.

2) Une fonction convexe localement bornée est continue. Soit u un point de l'intérieur de U, W un voisinage de u et M un réel tel que J soit bornée sur $U \cap W$:

(2) $\quad J(v) \;\leq\; M\,, \qquad \forall\, v \in U \cap W\,.$

Montrer qu'alors J est continue au point u.

3) Une fonction convexe continue admet un sous-différentiel. Soit u un point de l'intérieur de U tel que J soit continue au point u. Montrer qu'alors le sous-différentiel $\partial J(u)$ est non vide.

4) Inégalité d'Euler. Soit u un point du convexe U qui minimise J sur U :

(3) $\quad J(u) \;\leq\; J(v)\,, \qquad \forall\, v \in U.$

Montrer que si le sous-différentiel $\partial J(u)$ existe, on a

(4) $\quad \exists\, p \in \partial J(u),\; \forall\, v \in U\,, \quad < p,\, v - u > \;\geq\; 0.$

Montrer que réciproquement, si la relation (4) est satisfaite en un point u appartenant à U, ce point réalise le minimum de J sur U :

(5) $\quad J(u) \;\leq\; J(v)\;, \quad \forall\, v \in U\,.$

Pierre Bernard, 1993.

FD, novembre 1993, avril 1995, août 2002.

Sous-différentiel.
Proposition de corrigé.

1) Rappelons que si J est dérivable au sens de Gâteaux au point u, quel que soit v non nul appartenant à V, la dérivée au point u dans la direction du vecteur v existe. On pose

$$\text{(S1)} \qquad J'(u)\bullet v \;=\; \lim_{\theta \longrightarrow 0} \frac{1}{\theta}\big(J(u+\theta\, v) - J(u)\big)$$

et de plus, l'application $V \ni v \longmapsto J'(u)\bullet v \in \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue. La forme linéaire $J'(u)$ appartient clairement au sous-différentiel car l'inégalité de convexité au point $(1-\theta)\,u + \theta\, v$ s'écrit pour $0 < \theta < 1$:

$$J(v) - J(u) \;\geq\; \frac{1}{\theta}\big(J(u+\theta\, v) - J(u)\big)$$

ce qui montre la propriété en passant à la limite dans l'expression précédente. Réciproquement, si p appartient au sous-différentiel $\partial J(u)$, on écrit la relation de la définition (1) au point $u + \theta\, w$ et on obtient

$$\frac{1}{\theta}\big(J(u+\theta\, w) - J(u)\big) \;\geq <p,\, w>$$

et en passant à la limite lorsque θ tend vers zéro, il vient

$$\text{(S2)} \qquad J'(u)\bullet w \;\;\geq\;\; <p,\, w>$$

pour toute direction w de l'espace V. En changeant w en $-w$ dans l'inégalité (S2) et compte tenu de la linéarité de la fonctionnelle J, il vient $J'(u)\bullet w \;\leq$ $\leq <p,\, w>$ pour toute direction test w, ce qui montre, compte tenu de (S2), que le sous-différentiel p est nécessairement égal à $J'(u)$.

2) On suppose que J est bornée par M sur la boule $u + r\,B$, où B est la boule fermée de rayon unité centrée sur l'origine. Pour v dans la boule $u + \frac{r}{2}\,B$ et différent de u, on peut lui associer le point w appartenant à la demi-droite issue de v, passant par u et tel que $\|\, w - u \,\| = r$. Il vient simplement :

$$u \;=\; (1-\theta)\,v + \theta\, w \quad \text{et} \qquad \theta \;=\; \frac{\|\, v-u\,\|}{r + \|\, v-u\,\|} \;<\; 1\;; \qquad \frac{\theta}{1-\theta} \;=\; \frac{\|\, v-u\,\|}{r}$$

et w a été choisi de sorte que $J(w) \leq M$. L'inégalité de convexité écrite au point u décomposé à la ligne précédente entraîne

$$J(u) \;\leq\; \theta\, M + (1-\theta)\, J(v),$$

donc $\qquad (1-\theta)\, J(u) \;\leq\; \theta\, M + (1-\theta)\, J(v) - \theta\, J(u), \qquad$ ce qui entraîne

$$\text{(S3)} \qquad J(u) \;\leq\; \frac{M - J(u)}{r}\;\|\, v-u\,\| \;+ J(v).$$

De même, considérons le point z appartenant à la demi-droite issue de u, passant par v et tel que $\| z-u \| = r$, ce qui permet d'écrire

$$v \;=\; (1-\xi)\,u+\xi\,z \qquad \text{et} \quad \xi \;=\; \frac{\| v-u \|}{r} \;<\; 1.$$

On a comme plus haut une estimation de J mais au point courant v cette fois :

$$J(v) \;\leq\; \xi\,M+(1-\xi)\,J(u)$$

et un calcul analogue à celui aboutissant à la relation (S3) montre que

$$\text{(S4)} \qquad J(v) \;\leq\; \frac{M-J(u)}{r}\;\| v-u \| \;+J(u).$$

Les inégalités (S3) et (S4) montrent que J est est continue en u, ce qui établit la propriété.

3) Comme la fonction J est continue au point u, elle est localement bornée au voisinage de u et, compte tenu de la seconde question, elle est continue en tout point d'un voisinage de u que nous supposerons ouvert et noterons W dans la suite. L'ensemble $\mathcal{E}$ (épigraphe strict) défini par

$$\mathcal{E} \;=\; \{\,(v,\,y) \in W \times \mathbb{R}, \quad J(v) < y\,\}$$

est convexe (et non vide) car la fonction J est convexe. L'ensemble $\mathcal{E}$ et est ouvert car J est continue sur W. Par ailleurs, le point $(u,\,J(u))$ n'appartient pas à $\mathcal{E}$ et constitue à lui tout seul une partie convexe non vide du produit $V \times \mathbb{R}$. Le théorème de Hahn-Banach sous forme géométrique [si A et B sont deux convexes non vides disjoints de l'espace métrique et que A est ouvert, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large; les fanas pourront consulter la démonstration, par exemple dans Brézis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications,* Masson, Paris, 1983] montre qu'il existe une forme linéaire continue q sur l'espace V et deux nombres réels α et β de sorte que $(q,\,\beta)$ soit non nul dans $V' \times \mathbb{R}$ et que l'on ait

$$\text{(S5)} \qquad <q,\,v>+\beta\,y \;\leq\; \alpha \;\leq\; <q,\,u>+\beta\,J(u)\,, \qquad \forall\,(v,\,y) \in \mathcal{E}.$$

Le nombre β est nécessairement négatif ou nul car dans le cas contraire, en choisissant $v=u$ et $y>J(u)$ dans la relation (S5), on contredit la définition de l'ensemble $\mathcal{E}$. Par ailleurs, β ne peut être nul, car alors la relation (S5) considérée avec $v=u \pm r\,w$ (w arbitraire de norme unité et r réel assez petit) entraîne finalement que la forme linéaire q est identiquement nulle, ce qui contredit la conclusion du théorème de Hahn-Banach. Donc β est strictement négatif et on peut réécrire la relation (S5) après division par β, en posant $p=-\frac{1}{\beta}\,q$:

$$\text{(S6)} \qquad y \;\geq\; J(u)+<p,\,v-u> \qquad \text{quel que soit } \; y \;\geq\; J(v),\, v \in W.$$

Ceci montre que la relation (1) est réalisée pour les points v au voisinage de u. Dans le cas général, il existe $\xi > 0$ assez petit de sorte que

(S7) $\qquad w \;=\; u + \xi\,(v - u) \quad$ appartienne à W

et l'inégalité de convexité écrite au point w, jointe à la propriété précédente montre que

$$< p,\, \xi(v-u) > + J(u) \;\leq\; J(w) \;\leq\; (1-\xi)\,J(u) + \xi\,J(v)$$

c'est à dire établit le résultat désiré après division par ξ. L'existence du sous-différentiel au point u est donc établie.

4) On suppose d'abord que le point u réalise le minimum de J sur U. Alors en comparant les relations (1) et (3), on voit clairement que la forme linéaire nulle appartient au sous-différentiel de J en u, *i.e.*

(S8) $\qquad 0 \in \partial\, J(u)$

et la relation (S8) est connue sous le nom de "règle de Fermat". La conclusion (4) est alors une conséquence directe de la relation (S8). Réciproquement, si la relation (4) est vérifiée, on écrit que p appartient au sous-différentiel, c'est à dire

$$J(v) \;\geq\; J(u) + < p,\, v - u >$$

et on en déduit que J est effectivement minimale sur U au point u. Les lecteurs "fanas" pourront consulter avec profit les ouvrages classiques suivants d'Ivar Ekeland et Roger Temam : *Analyse convexe et problèmes variationnels,* Dunod, Paris, 1974, et de Jean-Pierre Aubin : *L'analyse non linéaire et ses motivations économiques*, Masson, Paris, 1984.

Pierre Bernard, 1993.
FD, novembre 1993, avril 1995, août 2002.