Notes de la gamme

Do, ré, mi, fa, sol, la, si, do, gratte moi la puce que j'ai dans le dos ! Les sept notes de la gamme s'enchaînent les unes à la suite des autres avec tellement d'habitude... Et sol, ré, la, mi ? C'est une suite de notes moins habituelle mais bien familière pour le joueur de violon que je suis à mes heures. Le principe du violon consiste, à partir de ces quatre notes élémentaires, à fabriquer les autres notes en réduisant la longueur de corde qui permet la vibration. En fait, il faut savoir trois choses : d'abord, une note de musique est essentiellement caractérisée par un mouvement vibratoire de fréquence bien définie (440 vibrations par seconde pour le "la" officiel), ensuite pour une corde comme celle du violon, la fréquence de vibration est inversement proportionnelle à la longueur de corde qui entre en vibration et enfin l'oreille humaine est sensible en première approximation aux rapports entre les fréquences.

Soyons plus précis. Entre le "do" du bas (d'où part la puce) et le "dos" du haut (où elle arrive), le rapport entre la fréquence de la note la plus aiguë et celle de la note la plus grave est exactement égal à deux. Et je peux le démontrer expérimentalement avec mon violon. En effet, la fréquence de vibration d'une corde de violon n'est en fait pas unique : si on pose très légèrement un doigt au milieu de la corde, on obtient un harmonique de la corde jouée, donc sur la corde de "la", on joue en fait un "la" mais une octave au dessus du précédent. Ce résultat est bien classique et les physiciens, depuis d'Alembert au 18^0 siècle, savent qu'une corde peut vibrer avec toute une famille de fréquences ω_k numérotées par la lettre k qui désigne un nombre entier : 1, 2, etc... De plus, toutes les fréquences ω_k sont proportionnelles à la fréquence de départ que l'on qualifie pour cette raison de "fondamentale" et il est possible d'établir la relation mathématique suivante : $\omega_k = k\,\omega_0$ qui relie la $k$ième fréquence de vibration à son numéro k, en fonction de la fréquence fondamentale ω_0. On peut également montrer assez facilement que chaque fréquence ω_k correspond à la fréquence fondamentale d'une longueur de corde k fois plus petite que la corde de départ. La fréquence ω_0 est la fréquence de la corde à vide, c'est à dire la note fondamentale associée à la longueur complète de la corde ($k=1$), le second harmonique voit la moitié de la longueur de corde ($k=2$), et ainsi de suite ; le nombre k désigne la situation de l'harmonique. Vous avez bien compris : quand on prend un harmonique au milieu de la corde de la, on entend une fréquence deux fois plus élevée, qui est encore un la, mais une octave plus haut.

Et si on force la corde à vibrer sur le troisième harmonique, c'est à dire en posant son doigt au tiers de la longueur utile de la corde ? Faites le sur la corde de "la" comme je me suis amusé à le faire il y a quelques jours. Le violon émet alors un magnifique "mi" bien étonnant (il est à une octave et une quinte du "la" de départ c'est à dire une octave au dessus du "mi" de la corde de mi !) et il faut aller jusqu'au quatrième harmonique (celui qui s'obtient en plaçant son doigt au quart de la longueur de la corde, ce qui devient assez difficile sur un violon, au moins pour moi !) pour entendre à nouveau un "la", à deux octaves au dessus de la corde à vide. On peut recommencer sur les autres cordes : si on se force à faire vibrer la corde de sol sur son troisième harmonique, on entend un ré ; pour la corde de ré, c'est un la et pour la corde de mi, c'est un si !

Résumons : un intervalle d'une octave revient à multiplier par deux la fréquence de la note initiale et un intervalle d'une octave plus une quinte revient à multiplier par trois la fréquence de la fondamentale. On est alors tenté d'en savoir un peu plus à partir de cette observation très simple et de s'interroger sur les rapports de fréquence entre le do du bas (celui d'où part la puce) et toutes les autres notes de la gamme : ré, mi, fa, sol, la, si, do. C'est ce que nous allons faire maintenant et j'en indique les grandes lignes dans les paragraphes suivants.

Quel est le rapport de fréquences de l'intervalle de quinte juste do-sol, c'est à dire entre la fréquence du sol divisée par celle du do (du bas, bien sûr) ? Quand on multiplie ce nombre, noté sol/do [attention ! la notation sol/do désigne le rapport des fréquences de l'intervalle do-sol, où do est la note la plus grave et sol la plus élevée] par deux, on obtient l'intervalle entre le do (du bas) et le sol qui est une octave plus haut, et on sait en vertu des observations précédentes (faites en toute rigueur sur un alto ou un violoncelle) qu'entre ce nouveau sol et le do de départ, le rapport des fréquences est égal à trois. Dans la séquence do-ré-mi-fa-sol, le rapport de fréquences sol/do est donc égal à la moitié d'un facteur trois, c'est à dire 3/2 ou 1,5 si l'on préfère. Et nous avons vu avec le violon qu'il en est de même des rapports ré/sol, la/ré, mi/la et si/mi relatifs aux intervalles sol-ré, ré-la , la-mi et mi-si repectivement, et plus généralement de tous les intervalles de quinte juste, c'est à dire en plus des précédents, du rapport des fréquences do/fa de l'intervalle fa-do.

Donc l'intervalle do-fa (il s'agit bien sûr du "do" du bas cette fois) est tel que lorsqu'on le multiplie le rapport associé fa/do par le rapport do/fa (qui vaut 3/2), on trouve l'intervalle do/do, c'est à dire 2. On en déduit tout de suite que l'intervalle de quatre juste do-fa représente un rapport de fréquences égal à 4/3 (quatre tiers multipliés par trois demis donnent exactement deux). Mais des intervalles de quarte juste (qui par définition complètent à une octave un intervalle de quinte juste), nous en connaissons d'autres : ré-sol, mi-la, fa-si, sol-do et la-ré ! Entre la plus haute de ces notes (celle de droite dans notre convention) et la plus basse (celle de gauche), le rapport des fréquences est uniformément de 4/3.

Nous avons presque gagné : le rapport de fréquences sol/do de l'interval-le do-sol vaut 3/2 et sol/ré de l'intervalle ré-sol vaut 4/3. Par une simple division de la première expression par la seconde, le rapport ré/do des fréquences de l'intervalle do-ré vaut 3/2 divisé par 4/3, c'est à dire 9/8. Et le rapport de fréquences la/do de l'intervalle do-la est égal au produit ré/do multiplié par la/ré soit 9/8 multiplié par une quinte juste 3/2, c'est à dire 27/16. Il ne faut pas être effrayé par ces nombres qui deviennent grands de part et d'autre du trait de fraction : il ne s'agit que de puissances de deux et de puissances de trois. Pour l'intervalle do-mi, le calcul du rapport mi/do, on passe par le "la" : mi/do est le quotient de la/do par la/mi, soit 27/16 que nous venons de calculer divisé par une quarte valant 4/3 et tous calculs faits, les deux notes do et mi sont dans un rapport de fréquences mi/do égal à 81/64. Il ne reste que l'intervalle do-si (do du bas !) qui n'est pas encore connu mais la note intermédiaire "mi" que nous venons de découvrir s'impose : le rapport si/do est le produit de si/mi par mi/do soit 3/2 (une quinte juste) multiplié par 81/64, c'est à dire 243/128 pour toutes les bonnes calculettes.

Nous avons terminé notre programme de travail. Le rapport des fré-quences entre le do (du bas) et les autres notes de la gamme est donné dans le tableau suivant.

do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

Rapport à do des fréquences des notes de la gamme.

Les choses ne nous paraissent pas encore simples. Regardons en détail les rapports de fréquences ré/do, mi/ré, sol/fa, la/sol, si/la des intervalles do-ré, ré-mi, fa-sol, sol-la et la-si : ils ont tous la même valeur de 9/8 (c'est un bon exercice sur les fractions !) qui représente donc le rapport naturel des fréquences pour caractériser ce que les musiciens appellent un "ton". Et pour les intervalles mi-fa et si-do, on trouve une valeur commune 256/243 (deux puissance huit sur trois puissance cinq) différente de la précédente. Nous retrouvons le "demi-ton" qui, tous les enfants des collèges le savent bien, prend sa place dans la gamme entre mi-fa et si-do.

Dernier mystère pour terminer : deux demi-tons font moins d'un ton ! (256/243 au carré est peu différent de 1,1098 alors que 9/8 vaut 1,125) mais l'écart de fréquence entre un ton et deux demi-tons (trois puissance douze sur deux puissance dix-neuf égale $1,125$ divisé par $1,1098$, soit environ 1,013) est-il toujours perceptible par l'oreille humaine ? Qui peut entendre un coma ?

Versailles, janvier 1994.

Jean François Gonzales m'a appris ensuite (juin 1994) que ce texte décrit la gamme de Pythagore. Cette édition a été corrigée en septembre 2000 avec l'aide de Maurice Rosset.

FD, 02 septembre 2002, édition 02 septembre 2005.