Permuter les points d'un triangle

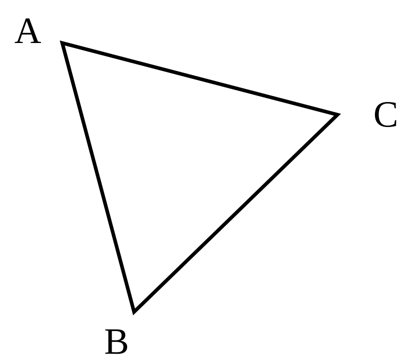
François Dubois

Enseignant-chercheur en mathématiques

Avril 2009 [□]

A partir d'un exemple très simple, nous découvrons les transformations qui laissent inchangé un triangle équilatéral. Nous définissons une opération sur ces transformations et remarquons que l'ordre des facteurs est important pour le résultat de cette opération. Puis nous évoquons la structure de groupe de l'ensemble ainsi obtenu.

• On désigne par $(A,\, B,\, C)$ un triangle équilatéral. On note $s_{\rm A}$ la symétrie axiale qui échange les points B et C et laisse inchangé (on dit aussi invariant) le point A. On peut donc écrire les propriétés précédentes avec les relations suivantes : $s_{\rm A}(A) = A$, $s_{\rm A}(B) = C$, $s_{\rm A}(C) = B$. De même, on introduit la symétrie axiale $s_{\rm B}$ qui échange les points A et C et laisse invariant le point B. On peut donc écrire maintenant : $s_{\rm B}(A) = C$, $s_{\rm B}(B) = B$, et $s_{\rm B}(C) = A$.



Triangle équilatéral $(A,\, B,\, C)$

[□] Conçu pour une intervention dans la classe de cinquième de Zohra Mahiou à Stains le 7 avril 2009.

• On effectue successivement la symétrie $s_{\rm A}$ puis la symétrie $s_{\rm B}$ sur le triangle $(A,\, B,\, C)$. On regarde comment le point A est transformé par ces deux opérations successives. On a d'abord $s_{\rm A}(A) = A$ puis $s_{\rm B}(A) = C$. Donc $s_{\rm B}(s_{\rm A}(A)) = C$. De même, on transforme le point B d'abord par la symétrie $s_{\rm A}$: $s_{\rm A}(B) = C$ puis ensuite on transforme le résultat obtenu (ici le point C) à l'aide de la symétrie $s_{\rm B}$: $s_{\rm B}(C) = A$. En définitive, $s_{\rm B}(s_{\rm A}(B)) = A$. De même, le point C se transforme d'abord en le point B par la symétrie $s_{\rm A}$ puis le point B reste invariant par la symétrie $s_{\rm B}$. On en déduit : $s_{\rm B}(s_{\rm A}(C)) = B$. On a donc

(1) $$s_{\rm B}(s_{\rm A}(A)) = C\,, \quad s_{\rm B}(s_{\rm A}(B)) = A\,, \quad s_{\rm B}(s_{\rm A}(C)) = B.$$

• Avant d'interpréter géométriquement les relations précédentes, nous introduisons la notation $s_{\rm B} \circ s_{\rm A}$ avec le symbole $\circ$ qui est effectivement un petit rond. On pose $(s_{\rm B} \circ s_{\rm A})(A) = s_{\rm B}(s_{\rm A}(A))$, $(s_{\rm B} \circ s_{\rm A})(B) = s_{\rm B}(s_{\rm A}(B))$ et $(s_{\rm B} \circ s_{\rm A})(C) = s_{\rm B}(s_{\rm A}(C))$. Ce faisant, nous sommes en train de définir une nouvelle transformation $s_{\rm B} \circ s_{\rm A}$ du triangle. On peut écrire les relations précédentes en introduisant un point M arbitraire dans le triangle :

(2) $$(s_{\rm B} \circ s_{\rm A})(M) = s_{\rm B}(s_{\rm A}(M)), \qquad M \text{ point arbitraire du triangle } (A,\, B,\, C).$$

Il faut faire attention que même si on écrit $s_{\rm B} \circ s_{\rm A}$, on **commence** par la symétrie $s_{\rm A}$ **puis** on effectue ensuite la symétrie $s_{\rm B}$. La notation est bien commode car dans la relation (2), les lettres $s_{\rm B}$ et $s_{\rm A}$ restent écrites dans le même ordre de part et d'autre du signe d'égalité. Et la notation $\circ$ est tout à fait classique ! D'une certaine façon, les mathématiciens aiment bien lire les formules de droite à gauche... Un peu comme les nombres entiers dans la numération décimale usuelle, qui se lisent de droite à gauche, comme la langue Arabe !

• Intéressons-nous maintenant au résultat $s_{\rm B} \circ s_{\rm A}$ d'un point de vue géométrique. L'opération $s_{\rm B} \circ s_{\rm A}$ transforme le triangle et nous pouvons, à l'aide de la définition (2), écrire le résultat (1) sous la forme :

(3) $$(s_{\rm B} \circ s_{\rm A})(A) = C\,, \quad (s_{\rm B} \circ s_{\rm A})(B) = A\,, \quad (s_{\rm B} \circ s_{\rm A})(C) = B.$$

Cette transformation qui laisse inchangé le triangle $(A,\, B,\, C)$ n'a pas de point invariant. Ce n'est donc **pas** l'une des symétries axiales $s_{\rm A}$, $s_{\rm B}$ ou même $s_{\rm C}$ (que nous n'avons même pas pris le temps de définir !). Mais en examinant avec attention la figure, on se rend compte que cette transformation fait tourner le triangle $(A,\, B,\, C)$ dans le sens des aiguilles d'une montre. Les mathématiciens ont beaucoup de petites habitudes. Ce sens des aiguilles d'une montre est dit "rétrograde", contrairement au sens contraire des aiguilles d'une montre, qui est appelé "direct". Mais les horlogers ne vont pas changer le sens de rotation de leurs aiguilles pour faire plaisir aux mathématiciens. Et les mathématiciens ne sauraient pas forcément lire facilement sur des montres dont les aiguilles tourneraient à l'envers ! Toutes ces précautions oratoires pour introduire une notation. On pose donc $r_- = s_{\rm B} \circ s_{\rm A}$; c'est une rotation d'un tiers de tour, dans le sens rétrograde.

• Que se passe-t-il si on effectue la symétrie $s_{\rm B}$ et puis ensuite seulement la symétrie $s_{\rm A}$, c'est à dire qu'on cherche la composée $s_{\rm A} \circ s_{\rm B}$? Le calcul s'effectue simplement pour les trois points du triangle : $(s_{\rm A} \circ s_{\rm B})(A) = s_{\rm A}(s_{\rm B}(A)) = s_{\rm A}(C) = B$, $(s_{\rm A} \circ s_{\rm B})(B) = s_{\rm A}(s_{\rm B}(B)) = s_{\rm A}(B) = C$ et $(s_{\rm A} \circ s_{\rm B})(C) = s_{\rm A}(s_{\rm B}(C)) = s_{\rm A}(A) = A$. La composée $s_{\rm A} \circ s_{\rm B}$ vérifie donc

(4) $\qquad (s_{\rm A} \circ s_{\rm B})(A) = B\,, \quad (s_{\rm A} \circ s_{\rm B})(B) = C\,, \quad (s_{\rm A} \circ s_{\rm B})(C) = A.$

On constate d'abord que cette transformation n'est pas une symétrie axiale et que ce n'est pas non plus la rotation r_- introduite plus haut. C'est une rotation d'un tiers de tour dans le sens direct. Nous donnons le nom de r_+ à cette nouvelle rotation : $r_+ = s_{\rm A} \circ s_{\rm B}$. Nous avons donc deux résultats différents pour la composée $s_{\rm B} \circ s_{\rm A}$ et pour la composée $s_{\rm A} \circ s_{\rm B}$:

(5) $\qquad s_{\rm B} \circ s_{\rm A} \neq s_{\rm A} \circ s_{\rm B}.$

On dit que les symétries $s_{\rm A}$ et $s_{\rm B}$ **ne commutent pas**. C'est une propriété très étrange qui n'est pas vérifiée par les opérations usuelles (addition, multiplication) sur les nombres entiers. En effet, chacun sait que $2+3 = 3+2$ et $4 \times 5 = 5 \times 4$ par exemple. La non-commutativité est pourtant une propriété qui apparaît naturellement dans cet exemple très simple de la composition de deux symétries axiales d'un triangle.

• Faisons un point. Nous disposons au départ de trois symétries axiales $s_{\rm A}$, $s_{\rm B}$ et $s_{\rm C}$. Nous avons introduit dans le cas particulier où $s = s_{\rm A}$ et $s' = s_{\rm B}$ la composée $s \circ s'$. Nous généralisons (à peine !) la relation (2) en écrivant maintenant

(6) $\qquad (s \circ s')(M) = s(s'(M)), \qquad M$ point arbitraire du triangle $(A,\, B,\, C)$.

Nous avons considéré la relation (6) dans le cas particuier où $s = s_{\rm B}$ et $s' = s_{\rm A}$. En faisant le calcul de composition des symétries $s_{\rm A}$ et $s_{\rm B}$, nous avons introduit deux rotations r_+ et r_-. La question naturelle est alors d'effectuer le produit de composition $s \circ s'$ pour s et s' égales à l'une quelconque des trois symétries $s_{\rm A}$, $s_{\rm B}$ et $s_{\rm C}$. Saurons-nous faire le calcul de $s \circ s'$ pour les $3 \times 3 = 9$

cas cas différents ? Commençons par le cas (facile !) où $s = s' = s_{\rm A}$. On établit sans peine que $(s_{\rm A} \circ s_{\rm A})(M) = M$ pour tout point M du triangle $(A,\, B,\, C)$. La composée $s_{\rm A} \circ s_{\rm A}$ est donc une transformation du triangle qui ne change aucun des points ! Cela semble sans intérêt. Mais cette transformation qui laisse identique les trois points du triangle apparaît comme le produit de deux symétries particulières, donc mérite d'être nommée. Nous l'appelons "identité", la notons i, et l'on a simplement $i(A) = A$, $i(B) = B$ et $i(C) = C$. Surtout, nous venons d'établir la relation

(7) $\qquad s_{\rm A} \circ s_{\rm A} = i\,.$

• Faisons un second point. Nous disposons maintenant de **six** transformations toutes différentes qui modifient le triangle $(A,\, B,\, C)$ sans le changer dans sa globalité. Trois symétries, deux rotations et une identité. Il est utile d'introduire encore une nouvelle lettre et de noter t (par exemple... en fait le choix d'une notation laisse toujours une liberté infinie !) l'une quelconque des six opérations précédentes. La question naturelle qui se pose alors est de savoir si la composition $t \circ t'$ a un sens pour toutes les transformations t et t' dans la famille des six transformations géométriques qui laissent le triangle $(A,\, B,\, C)$ globalement inchangé. Nous généralisons la relation (6) et nous définissons le produit de composition $t \circ t'$ de façon analogue :

(8) $\qquad (t \circ t')(M) = t(t'(M)), \qquad M$ point arbitraire du triangle $(A,\, B,\, C)\,.$

• La question qui se pose maintenant est la suivante : si on effectue la transformation t' puis la transformation t ensuite, obtient-on une transformation $t \circ t'$ qui laisse toujours inchangé le triangle $(A,\, B,\, C)$ qui nous est familier ? En d'autres termes, si t et t' sont deux transformations qui laissent globalement inchangé le triangle $(A,\, B,\, C)$, si on effectue t' puis ensuite t, a-t-on laissé inchangé le triangle $(A,\, B,\, C)$? Et surtout, connaît-on avec la liste des six transformations $\{s_{\rm A},\, s_{\rm B},\, s_{\rm C},\, r_+,\, r_-,\, i\}$ **toutes** les transformations géométriques qui laissent globalement inchangé le triangle $(A,\, B,\, C)$? Attention. Le calcul complet de tous les résultats des opérations obtenues à la relation (8) pour t et t' arbitraires est long. Nous disposons de six choix possibles pour t, puis de six choix encore pour t' pour chacun de ces choix, soit 36 composées de la forme $t \circ t'$. Et pour chacun de ces calculs (nous en avons effectué exactement trois jusqu'ici), il faut déterminer la nouvelle position de chaque sommet du triangle, ce qui donne $36 \times 3 = 108$ calculs élémentaires en tout ! Je laisse le lecteur faire lui-même la calcul de la "table de composition" des transformations qui laissent globalement invariantes le triangle.

• Il se trouve que la composée $t \circ t'$ de deux transformations arbitraires qui laissent globalement inchangé le triangle (A, B, C) est toujours une des six transformations de la liste $\{s_{\rm A}, s_{\rm B}, s_{\rm C}, r_+, r_-, i\}$ introduite plus haut. De plus, si on s'intéresse seulement à ce qui peut arriver aux sommets du triangle (A, B, C) par des transformations géométriques assez régulières, la liste précédente est complète. Nous avons au départ introduit un triangle équilatéral (A, B, C). Remarquons maintenant que nous travaillons avec l'ensemble des six transformations qui laissent globalement invariantes ce triangle. Nous notons $\mathcal{G}$ cette famille, que les mathématiciens appellent un ensemble :

(9) $\qquad \mathcal{G} = \{\, i,\ r_+, r_-, s_{\rm A}, s_{\rm B}, s_{\rm C}\,\}.$

L'ensemble $\mathcal{G}$ est aussi composé des transformations géométriques qui permutent les trois points d'un triangle. Ce **n'est pas** le triangle (A, B, C). D'ailleurs l'ensemble $\mathcal{G}$ a six éléments alors que le triangle initial n'a que trois sommets ! La famille $\mathcal{G}$ constitue un ensemble abstrait sur lequel nous avons une "loi de composition". Nous savons **calculer** le produit de composition $t \circ t'$ pour deux transformations t et t' appartenant à l'ensemble $\mathcal{G}$.

• Une fois construite la table de composition qui à deux transformations t et t' de l'ensemble $\mathcal{G}$, associe la composée $t \circ t'$, on peut démontrer les trois propriétés qui suivent.

1) La loi de composition $\circ$ est **associative**.

(10) $\qquad (t \circ t') \circ t'' = t \circ (t' \circ t''), \quad t,\, t',\, t''$ arbitraires dans l'ensemble $\mathcal{G}$.

Attention. La preuve de cette propriété une fois la table de composition construite est très longue si on passe en revue tous les cas de figure ! Il faudrait *a priori* calculer $6 \times 6 \times 6 \times 2 = 432$ résultats différents et vérifier la propriété (10) dans les 216 cas de figure ! On peut aussi aller beaucoup plus vite en utilisant deux fois de suite la définition (8) de la loi de composition.

2) La loi de composition $\circ$ admet l'identité i comme **élément neutre**.

(11) $\qquad t \circ i = i \circ t = t\,, \quad t$ transformation quelconque dans l'ensemble $\mathcal{G}$.

La transformation identité ne fait rien quand on la compose avec une rotation ou une symétrie arbitraire. C'est évident, mais cela mérite d'être dit !

3) Toute transformation de $\mathcal{G}$ a un **inverse**.

(12) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } t \text{ est une transformation de } \mathcal{G}, \text{ il existe } t^* \text{ appartenant aussi à } \mathcal{G} \\ \qquad \text{de sorte que } t \circ t^* = t^* \circ t = i\,. \end{array} \right.$

Si on a fait une transformation t du triangle, on peut toujours "revenir en arrière" avec la transformation inverse t^*. Ainsi, la relation (7) nous montre que l'inverse de la symétrie $s_{\rm A}$ est la symétrie $s_{\rm A}$ elle-même ! On établit aussi sans peine que les rotations r_+ et r_- sont inverses l'une de l'autre.

• La loi de composition $\circ$ donne à l'ensemble $\mathcal{G}$ toute une série de propriétés : c'est une loi interne, elle est associative, elle admet un élément neutre et toute transformation a un inverse. Dans ce cas, on dit que le couple $(\mathcal{G}, \circ)$ a une structure de **groupe**. La notion de groupe est fondamentale en mathématiques. Elle peut s'introduire très simplement comme nous l'avons fait ici comme l'ensemble des transformations qui laissent globalement invariante une figure donnée. Elle introduit des opérations spécifiques avec des règles de calcul qui n'ont *a priori* rien à voir avec les opérations habituelles de l'arithmétique. L'idée de faire des opérations algébriques sur autre chose que les nombres habituels est maintenant classique mais elle est apparue assez tard dans l'histoire des mathématiques. En effet, les travaux incontournables sur le sujet sont dus à Evariste Galois (un mathématicien mort en duel à l'âge de vingt et un ans !) vers 1830 et à Félix Klein à la fin du 19$^{\rm o}$ siècle avec l'introduction d'un groupe fini à quatre éléments. L'étude des groupes de transformations géométriques a connu des développements majeurs au début du 20$^{\rm o}$ siècle avec les travaux de Sophus Lie et d'Elie Cartan. Sachons que la connaissance complète des groupes n'ayant qu'un nombre fini d'éléments, comme le groupe de permutations du triangle (qui a six éléments) étudié ici, s'est achevée dans les années 1980. Fait d'actualité mathématique pour terminer : l'un des groupes "exceptionnels" introduits par Sophus Lie (le groupe appelé "E8") a une structure qui a été complètement décrite en mars 2007 par une équipe d'une vingtaine de mathématiciens aidés d'un puissant ordinateur.