

Détentes dans le vide et apparition du vide

Bruno Despres ^{*†}

October 21, 2002

1 Présentation du problème

Nous considérons que le vide se caractérise par $\rho = 0$, $p = 0$. Le problème concerne les conditions aux limites de type vide pour les équations d'Euler 1D (physiquement cela correspond à la détente d'un gaz dans le vide) ainsi que les problèmes d'apparition du vide (physiquement on peut parler de cavitation). Ces problèmes recèlent d'importantes difficultés en terme de stabilité (robustesse) et de précision pour les schémas numériques. Cette catégorie de problèmes se rencontre en particulier en rupture de barrage pour les équations de Saint Venant, dans des détentes fortes en aérodynamique pour la dynamique des gaz (cavitation), dans des détentes fortes dans le vide en physique des plasmas.

1.1 Détente dans le vide

Considérons le système de la dynamique des gaz compressibles non visqueux

$$\begin{cases} \partial_t(\rho) + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + pu) = 0, \end{cases}$$

^{*}Commissariat à l'Energie Atomique, 91680, Bruyères le Chatel, France, e-mail : bruno.despres@cea.fr

[†]Laboratoire Jacques Louis Lions, Université de Paris VI, France, e-mail : despres@ann.jussieu.fr

muni d'une loi de gaz parfait $p = (\gamma - 1)\rho(e - .5u^2)$. Les conditions initiales sont

$$\begin{cases} \rho_0 \text{ donné, } u_0 = 0, & p_0 \text{ donné, } c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}, & \text{pour } x < 0 \\ \rho = 0, & u = 0, & p = 0, & c = 0, & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

Les valeurs de droite sont celles du vide. La solution de référence est donnée analytiquement par la loi autosemblable (en reprenant les notations du Landau-Lifchitz, Mécanique des fluides, [1])

$$\begin{cases} u = \frac{2}{\gamma+1}(c_0 + \frac{x}{t}), \\ \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{u}{c_0}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \\ p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{u}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \\ c = c_0 - \frac{\gamma-1}{2}u. \end{cases} \quad (1)$$

Les valeurs indicées ρ_0, u_0, c_0, p_0 sont les valeurs initiales pour $x < 0$. Le domaine de validité de cette solution autosemblable est

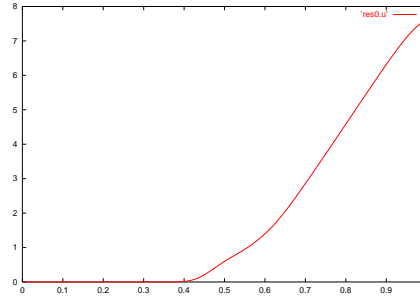
$$|u| \leq \frac{2c_0}{\gamma - 1}.$$

Numériquement on peut remplacer le vide par du quasi-vide

$$\begin{cases} \rho_0 = 1, & u_0 = 0, & p_0 = \frac{1}{\gamma}, & c_0 = 1, & \text{pour } x < 0 \\ \rho = 0.0001, & u = 0, & p = 0.00001, & & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

On note une très grande difficulté à capturer la vitesse de tête de détente $\frac{2c_0}{\gamma-1}$, même pour des schémas d'ordre élevé avec un grand nombre de mailles. Une illustration numérique est proposée figure 1 : ici $\gamma = 1.5$, $c_0 = 1$ et $\frac{2c_0}{\gamma-1} = 4$. La règle générale est que la détente est (très ?) mal calculée pour beaucoup de schémas numériques. La paramétrisation de certains de ces schémas permet dans des cas simples de retrouver les valeurs analytiques, mais cette procédure est le plus souvent artificielle. Les schémas en variable Lagrangienne sont éventuellement meilleurs sur ce cas-test. Notons que la condition $p \approx 0$ apparaît naturellement comme une condition aux limites pour la formulation Lagrangienne.

100 mailles,
le schéma est voisin
d'un schéma de Roe



1000 mailles,
3 degrés de liberté par maille

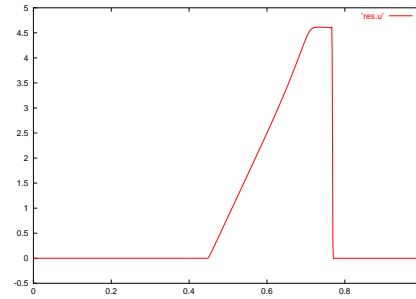


Figure 1: Profils de vitesse par un schéma de Galerkin discontinu, $T = .05$

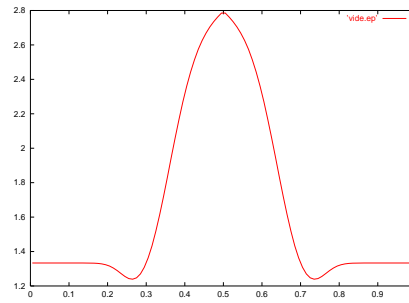
1.2 Apparition du vide

Un cas test de base est donné par les conditions initiales

$$\begin{cases} \rho_0 = 1, & u_0 = -a, & p_0 = \frac{1}{\gamma}, & \text{pour } x < 0 \\ \rho = 1, & u = +a, & p = \frac{1}{\gamma}, & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

La vitesse initiale d'éloignement est $a > 0$. Pour de faibles valeurs de a , on observe une double détente dans laquelle la densité baisse. Pour des valeurs de a plus importantes, la double détente est suffisamment forte pour que le vide $\rho = 0$ apparaisse dans la double détente. A un changement de référentiel près, les expressions analytiques (1) sont valables. La valeur critique de a pour laquelle le vide apparaît est ainsi $a_{cri} = \frac{2c_0}{\gamma-1} = 4$. Pour $a = 4$ on observe les résultats de la figure 2. On observe une énergie interne (c'est à dire une température) élevée là où elle devrait être rigoureusement

100 mailles,
le schéma est voisin
d'un schéma de Roe



5000 mailles, même schéma

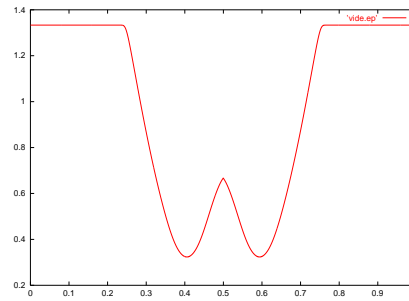


Figure 2: Profils d'énergie interne, $T = .05$

nulle. Des résultats similaires se rencontrent avec beaucoup d'autres schémas voir [2].

References

- [1] Landau et Lifshitz, Mécanique des fluides, MIR, Moscou, 1971
- [2] Liska et Wendroff, Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations, Technical Report LA-UR-01-6225, LANL, Los Alamos, 2001.