

# Deux écoulements diphasiques avec condition limite aval de type non-retour

Michaël BAUDIN\*, Isabelle FAILLE\*, Quang-Huy TRAN\*

4 avril 2002

## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Modèle général</b>	<b>2</b>
1.1 Définition des variables . . . . .	2
1.2 Lois de conservation et de fermeture . . . . .	3
1.3 Conditions aux limites et initiale . . . . .	5
<b>2 Modèle cinématique</b>	<b>6</b>
2.1 Origine . . . . .	6
2.2 Formulation et propriétés . . . . .	7
2.3 Énoncé récapitulatif . . . . .	11
<b>3 Modèle avec glissement nul</b>	<b>12</b>
3.1 Origine . . . . .	12
3.2 Formulation et propriétés . . . . .	12
3.3 Énoncé récapitulatif . . . . .	14
<b>Références</b>	<b>15</b>
<b>Annexe</b>	<b>15</b>

---

\*Division Informatique Scientifique et Mathématiques Appliquées, Institut Français du Pétrole, 1 et 4 avenue de Bois Préau, 92852 Rueil-Malmaison Cedex ;  
Michael.Baudin@ifp.fr, Isabelle.Faille@ifp.fr, Q-Huy.Tran@ifp.fr

## Introduction

Le problème présenté dans ce document provient de la simulation des écoulements diphasiques dans les conduites pétrolières. Afin de mieux illustrer le cœur des difficultés, nous simplifions — sous certaines hypothèses — le modèle le plus « général » pour obtenir deux modèles réduits pour chacune desquelles l'étude analytique exhaustive est possible :

- un modèle scalaire (1 équation), dit **cinématique** ;
- un modèle vectoriel (3 équations), dit à **glissement nul**.

L'aspect qui nous intéresse le plus ici réside dans la condition limite aval, dont l'explication physique est « simple », mais dont la formulation mathématique (en continu) ainsi que le traitement numérique (en discret) sont plutôt délicats et vont parfois à l'encontre des idées reçues.

Nous commençons par présenter, dans la section 1, le système d'équations dans toute sa généralité. À cette occasion, nous introduisons les lois de fermeture thermodynamique et hydrodynamique.

La section 2 décrit le modèle cinématique. Celui-ci est obtenu à partir du système général en supposant les 2 phases incompressibles. La condition limite amont est expliquée dans sa totalité, tandis que la condition limite aval est évoquée volontairement de façon sinon partielle, du moins intuitive, dans le but de susciter réactions et contributions du lecteur.

La section 3 est consacrée au modèle à glissement nul, lequel est obtenu via les hypothèses d'égalité des vitesses de phases et de liquide incompressible. Là encore, nous adoptons la même attitude à l'égard des conditions limites que dans le modèle cinématique.

En annexe, nous détaillons quelques calculs relatifs à la discrétisation du modèle à glissement nul par un schéma explicite. Signalons enfin que *toutes les valeurs numériques fournies dans ce document sont en unité S.I.*

## 1 Modèle général

### 1.1 Définition des variables

Nous nous intéressons aux écoulements diphasiques dans une conduite pétrolière rectiligne. La géométrie d'un pipe (Fig. 1) est caractérisée par la donnée de :

- sa longueur **L**
- son diamètre **D**
- son inclinaison par rapport à l'horizontale  $\theta$

Dans la conduite, ces quantités sont constantes vis-à-vis de la variable d'espace  $x$  qui représente l'abscisse curviligne le long de la conduite.

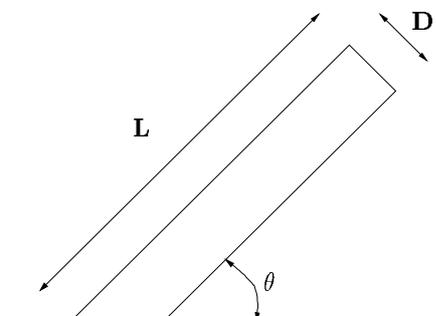


FIG. 1: Une conduite

Il est traditionnel d'introduire les grandeurs suivantes, les indices L et G désignant respectivement les phases liquide et gaz :

- les masses volumiques	$\rho_L, \rho_G$
- les fractions surfaciques <sup>1</sup>	$R_L, R_G$
- les vitesses réelles	$V_L, V_G$
- la pression	$p$
- la vitesse superficielle du gaz	$U_G = R_G V_G$
- la vitesse superficielle du liquide	$U_L = R_L V_L$
- la masse volumique totale	$\rho = \rho_L R_L + \rho_G R_G$
- la vitesse superficielle	$U_S = V_L R_L + V_G R_G$
- la vitesse du mélange	$V = (\rho_L R_L V_L + \rho_G R_G V_G) / \rho$
- la fraction massique de gaz	$Y = \rho_G R_G / \rho \in [0, 1]$

Ces variables dépendent de l'abscisse  $x$  et du temps  $t$ .

## 1.2 Lois de conservation et de fermeture

Le modèle « général » contient deux séries d'équations. La première regroupe trois équations aux dérivées partielles, correspondant aux lois de conservation de :

- la masse du liquide

$$\partial_t(\rho_L R_L) + \partial_x(\rho_L R_L V_L) = 0, \quad (1)$$

<sup>1</sup>Sur une section de tuyau, ces fractions représentent la proportion surfacique de chaque phase par rapport à la surface totale. Ainsi, on a  $R_L + R_G = 1$ .

- la masse du gaz

$$\partial_t(\rho_G R_G) + \partial_x(\rho_G R_G V_G) = 0, \quad (2)$$

- la quantité de mouvement totale

$$\partial_t(\rho_L R_L V_L + \rho_G R_G V_G) + \partial_x(\rho_L R_L V_L^2 + \rho_G R_G V_G^2 + p) = S. \quad (3)$$

En pratique, le second membre de (3) comporte le terme source  $S$  correspondant aux frottements du fluide contre la paroi ainsi que des termes intégrant la gravité.

Ces EDP sont complétées par un jeu de 3 lois de fermeture algébriques, comprenant 2 relations dites **thermodynamiques** et 1 relation dite **hydrodynamique**. Les relations thermodynamiques représentent les équations d'état pour le liquide et pour le gaz. Ici, nous prenons un gaz parfait vérifiant

$$\rho_G(p) = \frac{p}{a_G^2}, \quad (4)$$

$a_G$  étant la vitesse du son dans le gaz, et un liquide soit légèrement compressible, i.e.

$$\rho_L(p) = \rho_L^0 + \frac{p - p^0}{a_L^2}, \quad (5)$$

soit incompressible, c'est-à-dire

$$\rho_L(p) = \rho_L^0. \quad (6)$$

Quant à la loi hydrodynamique, elle exprime une propriété empirique reliant les vitesses des deux phases, laquelle propriété caractérise le régime d'écoulement. Nous considérons dans ce document les deux lois suivantes :

- le glissement nul

$$V_G = V_L \quad (7)$$

- le glissement de Zuber-Findlay

$$V_G = (1 + \mu R_L)U_S + \nu R_L \quad (8)$$

Nous reviendrons en détail sur cette loi par la suite.

### 1.3 Conditions aux limites et initiale

À l'amont, nous supposons connus les débits d'entrée (par unité de section) en liquide et gaz, à savoir

$$\begin{aligned} (\rho_L R_L V_L)(x = 0, t) &= q_L^0(t) \\ (\rho_G R_G V_G)(x = 0, t) &= q_G^0(t). \end{aligned} \quad (9)$$

À l'aval, nous spécifions la pression en sortie, i.e.

$$p(x = \mathbf{L}, t) = p^{\mathbf{L}}(t). \quad (10)$$

De plus, pour des raisons physiques que nous détaillerons dans la suite, nous souhaitons imposer en sortie une condition de **non-retour** de liquide, du type

$$(\rho_L R_L V_L)(x = \mathbf{L}, t) \geq 0. \quad (11)$$

Dans ce modèle, la condition initiale correspond toujours à l'état stationnaire des équations (1)–(3) et des conditions aux limites figées à  $q_L^0(0)$ ,  $q_G^0(0)$  et  $p^{\mathbf{L}}(0)$ .

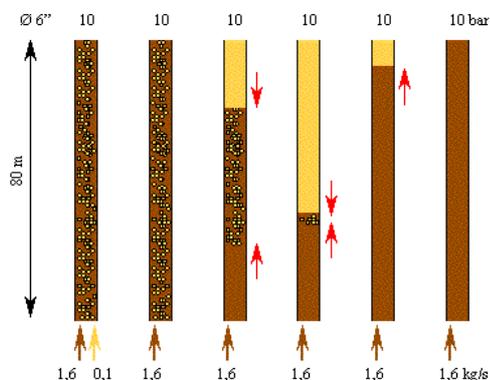


FIG. 2: Un cas typique d'opération sévère

La Figure 2 illustre un cas typique d'opération sévère. Sur une conduite verticale<sup>2</sup>, on annule progressivement le débit de gaz  $q_G^0(t)$ , les valeurs de  $q_L^0(t)$  et  $p^{\mathbf{L}}(t)$  étant maintenues constantes. Si les débits sont « faibles », on observe les deux effets suivants :

<sup>2</sup>Le gaz est représenté en jaune et le pétrole en marron

1. l'amont de la conduite passe en monophasique liquide ;
2. le débit de liquide à l'aval baisse considérablement, jusqu'à un certain moment critique où le gaz rentre.

Les deux états monophasiques vont se rencontrer, provoquant une discontinuité qui va se propager vers la sortie. La fin de l'expérience est alors un état stationnaire monophasique liquide.

C'est ce genre de cas que nous avons en tête lorsque nous nous attelons à concevoir le traitement des conditions aux limites. Le problème étant difficile dans toute sa généralité, examinons deux cas particuliers importants.

## 2 Modèle cinématique

### 2.1 Origine

De précieux enseignements peuvent être obtenus sous l'hypothèse des *deux phases incompressibles*, c'est-à-dire  $\rho_L$  et  $\rho_G$  constants. Cette étude a été réalisée dans [4]. Les équations (1)–(2) deviennent alors

$$\begin{aligned}\partial_t R_L + \partial_x(R_L V_L) &= 0 \\ \partial_t R_G + \partial_x(R_G V_G) &= 0,\end{aligned}\tag{12}$$

de sorte qu'en ajoutant membre à membre, on obtient

$$\partial_x U_S = 0.\tag{13}$$

Autrement dit, la vitesse superficielle totale  $U_S$  est uniforme le long du pipe, et ne dépend que du temps par l'intermédiaire des conditions limites. Ici, nous choisissons  $U_S$  constant, indépendant du temps. Si  $U_S$  est connu, alors les deux équations de (12) ne sont plus indépendantes. Gardons celle du gaz

$$\partial_t R_G + \partial_x U_G(R_G, p, U_S) = 0,\tag{14}$$

avec — rappelons-le —  $U_G = R_G V_G$ . Si  $U_S$  est connu et si de plus, *la pression n'intervient pas explicitement dans le flux*, i.e.

$$\frac{\partial U_G}{\partial p} = 0,\tag{15}$$

alors on est ramené à une loi de conservation scalaire sur  $R_G$ .

Le fait de voir

$$U_G = \Psi(R_G, p, U_S)\tag{16}$$

comme fonction des 3 variables « de base »  $(R_G, p, U_S)$  n'est qu'une autre façon de traduire la fermeture hydrodynamique. La fonction  $\Psi$  doit vérifier

$$\Psi(0, p, U_S) = 0 \quad \text{et} \quad \Psi(1, p, U_S) = U_S \quad (17)$$

conditions qui assurent la cohérence avec les états monophasiques.

Le cas particulier suivant mérite une attention spéciale, car il est fondamental pour le traitement du non retour de liquide à l'aval. Supposons que dans un choc, l'état de gauche est décrit par  $(R_G, p, U_S)$ , tandis que l'état de droite est  $(1, p, U_S)$ . La vitesse de choc vaut alors

$$\sigma = \frac{\Psi(1, p, U_S) - \Psi(R_G, p, U_S)}{1 - R_G} = \frac{U_S - U_G}{1 - R_G} = \frac{U_L}{R_L} = V_L \quad (18)$$

Ainsi, le front de séparation entre les deux états se déplace à  $V_L$ , vitesse du liquide de l'état diphasique gauche. Ce résultat est valable quelle que soit la loi de fermeture  $\Psi$  pourvu qu'elle vérifie les conditions (17).

En faisant tendre  $R_G$  vers 1 dans (18), on voit qu'en monophasique gaz, la valeur propre coïncide avec la vitesse du liquide  $V_L$ , celle de la phase qui disparaît. Réciproquement, on montre qu'en monophasique liquide, la valeur propre n'est autre que la vitesse de gaz.

## 2.2 Formulation et propriétés

### Équations à l'intérieur

Désormais, on note  $R \in [0, 1]$  la fraction surfacique de gaz, au lieu de  $R_G$ . Le modèle scalaire que nous proposons est

$$\partial_t R + \partial_x U_G(R, U_S) = 0 \quad (19)$$

où  $U_G$  est une fonction *quadratique concave* de  $R$ , plus précisément

$$U_G(R, U_S) = R \{[(1 + \mu)U_S + \nu] - (\mu U_S + \nu)R\} \quad (20)$$

avec  $\mu = 0.2 |\sin \theta|$ ,  $\nu = 0.35 \sqrt{gD} \sin \theta$ . Ce flux provient du glissement de Zuber-Findlay (8), qui correspond à un régime d'écoulement intermittent dans lequel coexistent des grosses et des petites bulles de gaz.

Par construction, (17) est satisfaite. De plus l'équation  $U_G = U_S$  admet deux solutions en  $R$ , à savoir

$$R = 1 \quad \text{et} \quad R = R^b \in ]0, 1[, \quad (21)$$

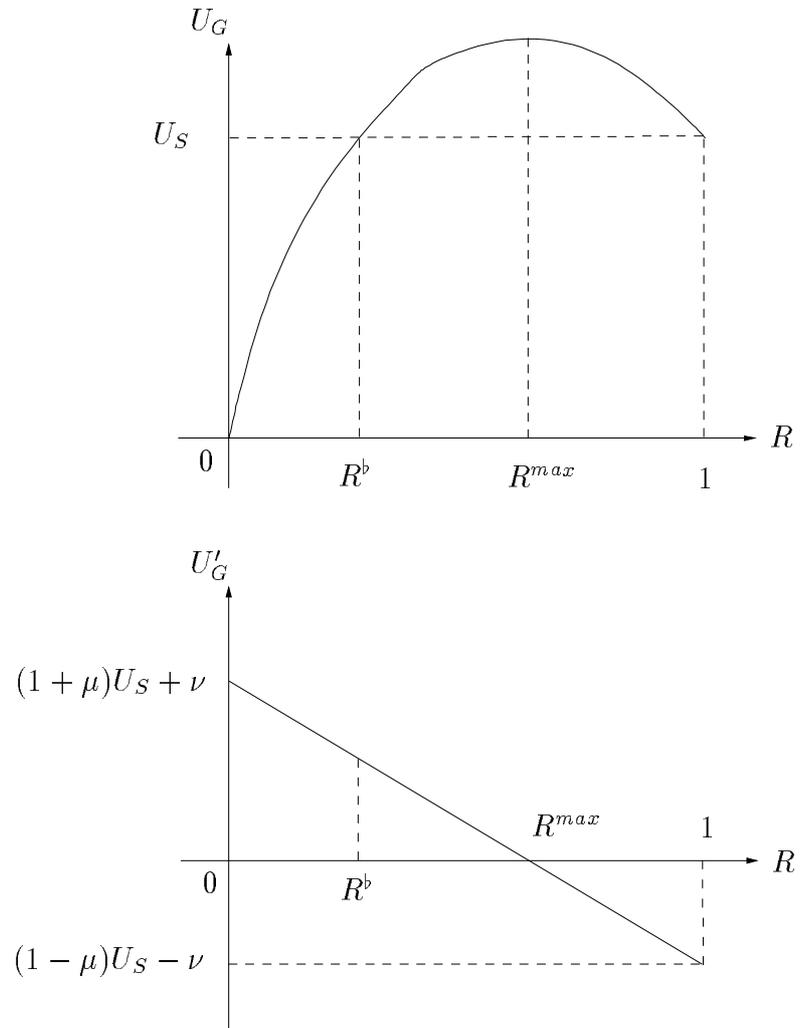


FIG. 3: Flux physique

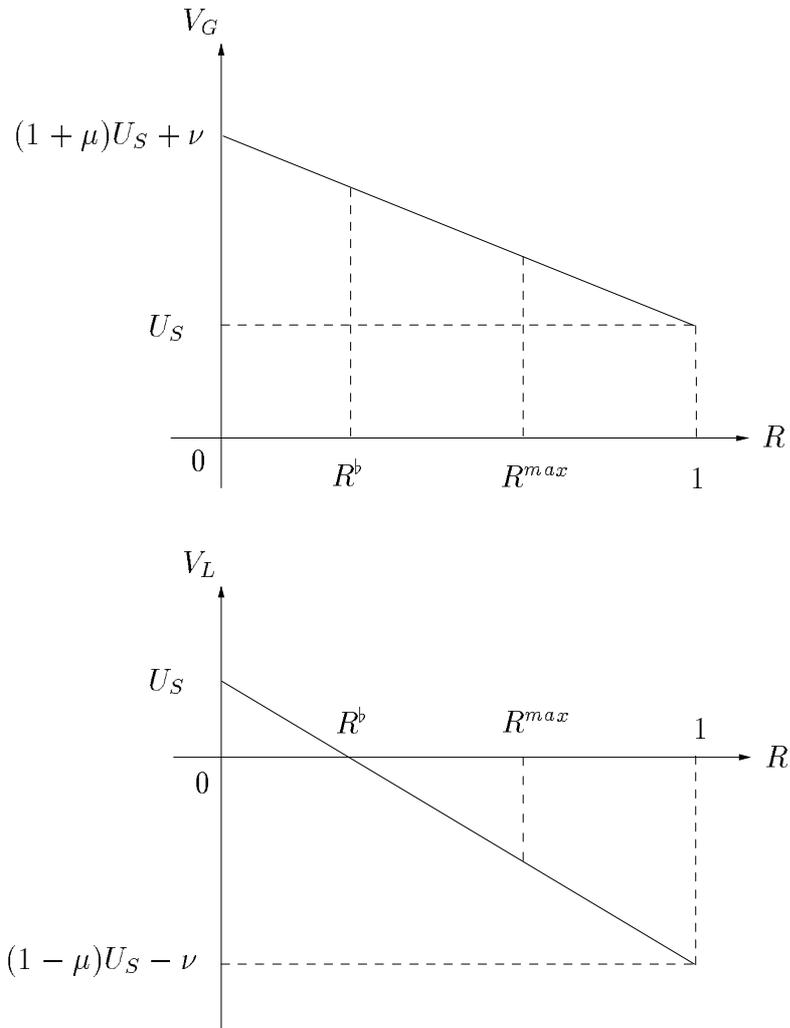


FIG. 4: Vitesses des phases

tant que

$$0 \leq U_S \leq \frac{\nu}{1 - \mu}. \quad (22)$$

Sous cette même condition,  $U_G$  atteint son maximum en

$$R^{\max} = \frac{1}{2}(1 + R^b) = \frac{1}{2} \frac{(1 + \mu)U_S + \nu}{\mu U_S + \nu}. \quad (23)$$

comme le montre la Figure 3.

Il est aisé d'exprimer  $V_G$  et  $V_L$  en fonction de  $R$  et  $U_S$ . La Figure 4 trace l'allure de ces deux vitesses de phase. On dit qu'on est en **co-courant** si  $V_G V_L > 0$  et que l'on est en **contre-courant** si  $V_G V_L < 0$ . On constate (et l'on vérifie sans peine) que le contre-courant apparaît si et seulement si  $R > R^b$ .

Pour les applications numériques, on prend

$$\mathbf{L} = 10, \quad \mathbf{D} = 0.144 \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad g = 9.81 \quad (24)$$

et l'on s'arrange pour que

$$U_S = \frac{0.5 \nu}{1 - \mu}. \quad (25)$$

### Conditions aux limites et initiale

AMONT – Nous imposons la valeur de  $R$  à l'amont  $x = 0$  par

$$R^0(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 0.65 & \text{si } 1 \leq t < 200 \\ 0 & \text{si } 200 \leq t < 300 \end{cases} \quad (26)$$

Il importe de bien choisir  $R^0(t) > R^b$  pour  $1 \leq t < 200$  afin d'amorcer le retour du gaz à l'aval.

AVAL – Regardons la Figure 5, qui schématise une conduite se déversant dans un séparateur<sup>3</sup>. Dès que le liquide du mélange sort de la conduite, il « tombe » dans le séparateur et par conséquent ne peut plus « revenir » dans le riser, à la différence du gaz qui, lui, reste présent en l'air, « autour » de la sortie, et susceptible de pénétrer à nouveau dans le riser.

C'est pourquoi on souhaite se réserver le droit d'imposer en aval une condition limite qui empêche tout retour de liquide. Cette condition sert à modéliser le comportement du séparateur. L'information qu'elle véhicule est donc un supplément par rapport à la pure « propagation hyperbolique » à l'intérieur du riser. Autrement dit, le moment où le gaz rentre dans la

---

<sup>3</sup>On parle alors de riser

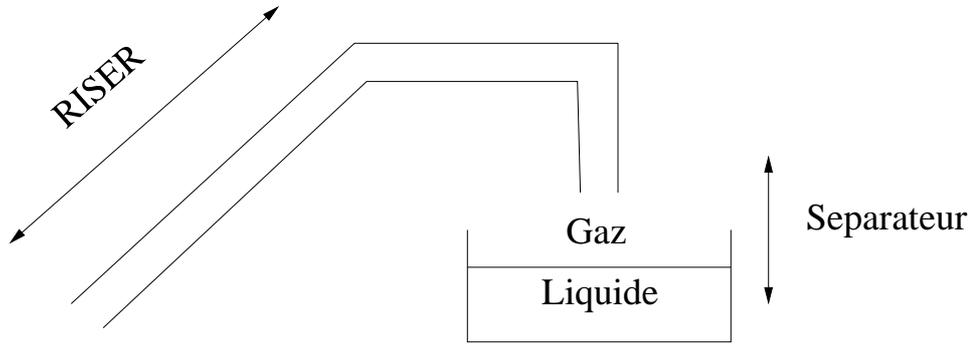


FIG. 5: Riser se déversant dans un séparateur

conduite n'est pas nécessairement celui où la valeur propre  $U_G'(x = \mathbf{L}, t)$  change de signe, comme l'on a souvent l'habitude de penser !

Mathématiquement, cela se traduit par l'implication

$$V_L(x = \mathbf{L}, t) < 0 \implies R_L(x = \mathbf{L}, t) = 0 \quad (27)$$

ou, de façon équivalente,  $R_L V_L =: U_L(x = \mathbf{L}, t) \geq 0$ , soit encore

$$U_G(x = \mathbf{L}, t) \leq U_S. \quad (28)$$

Tout le problème est de donner un sens théorique à (28) et à lui trouver un traitement numérique approprié.

INITIALE – À l'instant  $t = 0$ , on impose la condition uniforme

$$\forall x \in [0, \mathbf{L}], R(x, 0) = R^0(0). \quad (29)$$

### 2.3 Énoncé récapitulatif

Sur le domaine  $(x, t) \in [0, \mathbf{L}] \times [0, T]$ , on cherche  $R(x, t) \in [0, 1]$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t R + \partial_x U_G(R, U_S) = 0, & \forall (x, t) \\ R(0, t) = R^0(t), & \forall t \\ U_G(\mathbf{L}, t) \leq U_S, & \forall t \\ R(x, 0) = R^0(0), & \forall x \end{array} \right. \quad (30)$$

où  $U_G$  est défini par (20),  $R^0$  par (26), les valeurs numériques par (24)–(25),  $T = 300$ .

1. Peut-on montrer que ce problème est bien posé en un certain sens à préciser ?

2. Trouver un traitement numérique pour la condition limite aval, sachant que dans le domaine intérieur, on utilise
  - (a) un schéma de Godunov exact (pour commencer);
  - (b) un schéma de Lax-Friedrichs modifié (relaxation).
3. Prouver la convergence éventuelle du schéma d'ensemble proposé.

### 3 Modèle avec glissement nul

#### 3.1 Origine

Appliquons au modèle général (1)–(3) les hypothèses suivantes :

- On est en présence d'un *liquide incompressible* et d'un *gaz parfait*. En d'autres termes, les relations thermodynamiques sont données par (6) et (4). L'incompressibilité du liquide exclut l'état monophasique liquide ( $R_L = 1$ ) pour lequel la vitesse acoustique est infinie.
- Les deux phases vont à la même vitesse. On utilise donc (7) comme fermeture hydrodynamique. Pour simplifier davantage les notations, on introduit  $V = V_G = V_L$ .
- La conduite est *horizontale*, ce qui implique  $\theta = 0$ , mais il subsiste un frottement de la paroi dans le terme source

$$S = -\frac{2C_f}{D}\rho V|V|. \quad (31)$$

#### 3.2 Formulation et propriétés

##### Équations à l'intérieur

En privilégiant les variables  $(\rho, Y, V)$ , définies dans la section 1, et en effectuant quelques manipulations algébriques, on peut transformer (1)–(3) en un système équivalent :

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho) + \partial_x(\rho V) &= 0 \\ \partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho Y V) &= 0 \\ \partial_t(\rho V) + \partial_x(\rho V^2 + p) &= S, \end{aligned} \quad (32)$$

dans lequel la pression  $p$  vaut

$$p(\rho, Y) = a_G^2 \frac{\rho Y}{1 - (1 - Y) \frac{\rho}{\rho_L^0}}. \quad (33)$$

Cette dernière relation découle de (6) et (4).

Le système (32) est hyperbolique. Ses éléments propres sont résumés dans le tableau suivant<sup>4</sup> :

Champ	Nature	Invariants faibles	Invariant fort
$\lambda^- = V - c$	VNL	$Y, \phi^-$	-
$\lambda^0 = V$	LD	$p, V$	$Y$
$\lambda^+ = V + c$	VNL	$Y, \phi^+$	-

avec

$$\phi^\pm = \left[ \frac{1}{\rho} - \frac{1-Y}{\rho_L^0} \right] \exp\left( \frac{\pm V}{a_G \sqrt{Y}} \right). \quad (34)$$

Ici, la vitesse du son  $c$  vaut

$$c = \frac{a_G \sqrt{Y}}{1 - (1-Y) \frac{\rho}{\rho_L^0}}. \quad (35)$$

Dans les conduites pétrolières, le mélange considéré est très visqueux et très lourd, si bien que

$$|V \pm c| \gg |V|. \quad (36)$$

Ainsi, le transport de pétrole brut se fait à des vitesses largement subsoniques. Cela entraîne les inégalités

$$V - c < 0 \quad \text{et} \quad V + c > 0 \quad (37)$$

dont nous nous servirons lors de la mise au point des conditions aux limites.

Les invariants fournis dans le tableau précédent permettent de calculer les courbes de détente. On indexe par  $g$  et  $d$  les quantités à gauche et à droite d'une interface à travers laquelle se produit une transition « simple » (choc, détente ou contact). Une détente en  $\lambda^-$  est entropique si  $p_g > p_d$ . Une détente en  $\lambda^+$  est entropique si  $p_g < p_d$ . Dans les deux cas, on a  $V_g < V_d$ .

Il nous reste à préciser les courbes de choc. En écrivant les relations de Rankine-Hugoniot et en éliminant la vitesse du choc, on aboutit à

$$Y_d - Y_g = 0 \quad (38)$$

$$|V_d - V_g| = \left[ (p_d - p_g) \left( \frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_d} \right) \right]^{1/2} \quad (39)$$

Un choc en  $\lambda^-$  est entropique si  $p_d > p_g$ . Un choc en  $\lambda^+$  est entropique si  $p_d < p_g$ . Dans les deux cas, on a  $V_d < V_g$ .

<sup>4</sup>VNL= vraiment non-linéaires, LD= linéairement dégénéré

Pour les applications numériques, on utilise

$$\mathbf{L} = 4000, \mathbf{D} = 0.146, C_f = 0.005, g = 9.81, \rho_L^0 = 1000, a_G^2 = 10^5. \quad (40)$$

### Conditions aux limites et initiale

AMONT – Conformément au modèle général, nous imposons les valeurs des débits (par unité de section) en liquide  $q_L^0(t) = [\rho(1 - Y)V](x = 0, t)$  et en gaz  $q_G^0(t) = [\rho YV](x = 0, t)$ , avec

$$q_L^0(t) = \begin{cases} 1000 & \text{si } t < 200 \\ 1800 - 4t & \text{si } 200 \leq t < 450 \\ 0 & \text{si } 450 \leq t < 3000 \end{cases} \quad (41)$$

$$q_G^0(t) = 10 \quad (42)$$

AVAL – Le principe du séparateur reste identique à celui du modèle cinématique. Il convient donc d'imposer une condition de non-retour du liquide par l'inégalité

$$[\rho(1 - Y)V](x = \mathbf{L}, t) \geq 0, \quad (43)$$

qu'on peut lire encore comme  $V < 0 \implies Y = 1$ . De plus, nous spécifions la pression de sortie

$$p^{\mathbf{L}}(t) = \begin{cases} 10 & \text{si } t < 200 \\ -10 + 0.1x & \text{si } 200 \leq t < 450 \\ 35 & \text{si } 450 \leq t < 3000 \end{cases} \quad (44)$$

C'est l'augmentation de la pression aval qui fait reculer le gaz vers l'intérieur.

INITIALE – À l'instant  $t = 0$ , on impose le stationnaire du système (32) avec les valeurs aux limites  $q_L^0(0)$ ,  $q_G^0(0)$  et  $p^{\mathbf{L}}(0)$ . Au moyen de substitutions judicieuses, on se retrouve avec juste une équation différentielle pour  $p$ , à intégrer de façon rétrograde en  $x$ .

### 3.3 Énoncé récapitulatif

Sur le domaine  $(x, t) \in [0, \mathbf{L}] \times [0, T]$ , on cherche  $\rho(x, t)$ ,  $Y(x, t) \in [0, 1]$  et  $V(x, t)$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t(\rho) + \partial_x(\rho V) & = 0 \\ \partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho Y V) & = 0 \\ \partial_t(\rho V) + \partial_x(\rho V^2 + p) & = S \\ [\rho(1 - Y)V](x = 0, t) & = q_L^0(t) \quad \forall t \\ [\rho Y V](x = 0, t) & = q_G^0(t) \quad \forall t \\ p(x = \mathbf{L}, t) & = p^{\mathbf{L}}(t) \quad \forall t \\ [\rho(1 - Y)V](x = \mathbf{L}, t) & \geq 0 \quad \forall t \end{array} \right. \quad \forall(x, t) \quad (45)$$

où  $p$  est défini par (33),  $S$  par (31),  $q_L^0$  et  $q_G^0$  par (41)–(42),  $p^L$  par (44), les valeurs numériques par (40),  $T = 3000$ .

1. Peut-on montrer que ce problème est bien posé en un certain sens à préciser ?
2. Trouver un traitement numérique pour la condition limite aval, sachant que dans le domaine intérieur, on utilise
  - (a) un schéma de Godunov exact (pour commencer) ;
  - (b) un schéma de Roe (voir annexe) ;
  - (c) un schéma de relaxation (à expliciter).

## Références

- [1] I. FAILLE et E. HEINTZÉ, *A rough finite volume scheme for modeling two phase flow in a pipeline*, Computers and Fluids, 28 (1999), pp. 213–241.
- [2] E. GODLEWSKI et P.-A. RAVIART, *Hyperbolic systems of conservation laws*, Mathématiques et Applications, SMAI, Ellipses, 1991.
- [3] R. J. LEVEQUE, *Numerical methods for conservation laws*, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Berlin, (1992).
- [4] S. PATAULT et Q.-H. TRAN, *Modèle et schéma numérique du code TACITE-NPW*, rapport IFP 42415, 1996.
- [5] M.-H. VIGNAL, *Conditions aux limites et méthodes de splitting pour le schéma numérique de Roe appliquées au code TACITE*, rapport IFP 41495, 1994.

## Annexe

Il est possible, dans le cas du glissement nul et d'un liquide incompressible, de construire une matrice de Roe. Nous la donnons ici à l'intention de ceux qui voudraient l'implémenter.

On note  $(u_i)_{i=1,2,3}$  les composantes de  $u = (\rho_L R_L, \rho_G R_G, \rho V)$ . On exprime la pression comme une fonction des deux premières variables  $p = p(u_1, u_2)$ . Une matrice de Roe entre les états  $u_g$  et  $u_d$  est alors donnée par

$$A^{Roe}(u_g, u_d) = \begin{pmatrix} -(1 - \tilde{c})\tilde{V} & \tilde{c}\tilde{V} & 1 - \tilde{c} \\ (1 - \tilde{c})\tilde{V} & -\tilde{c}\tilde{V} & \tilde{c} \\ \Delta p_1 - \tilde{V}^2 & \Delta p_2 - \tilde{V}^2 & 2\tilde{V} \end{pmatrix} \quad (46)$$

avec

$$\begin{aligned}
\tilde{c} &= \alpha_g Y_g + \alpha_d Y_d \\
\tilde{V} &= \alpha_g V_g + \alpha_d V_d \\
\alpha_g &= \frac{\sqrt{\rho_g}}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}} \\
\alpha_d &= \frac{\sqrt{\rho_d}}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}} \\
\Delta p_1 &= \frac{p(u_{1d}, u_{2d}) - p(u_{1g}, u_{2d})}{u_{1d} - u_{1g}}, \quad \text{si } u_{1d} \neq u_{1g} \\
&= \frac{\partial p}{\partial u_1}(u_{1g}, u_{2d}), \quad \text{si } u_{1d} = u_{1g} \\
\Delta p_2 &= \frac{p(u_{1g}, u_{2d}) - p(u_{1g}, u_{2g})}{u_{2d} - u_{2g}}, \quad \text{si } u_{2d} \neq u_{2g} \\
&= \frac{\partial p}{\partial u_2}(u_{1g}, u_{2d}), \quad \text{si } u_{2d} = u_{2g}
\end{aligned} \tag{47}$$

Le lecteur intéressé par la construction de cette matrice peut consulter [5].