Alain Bossavit

Laboratoire de Génie Électrique de Paris (CNRS)

bossavit@lgep.supelec.fr

Génération récursive des formes de Whitney

sur tétraèdres, hexaèdres, prismes et pyramides

CNAM, Paris, 18 9 2007.

Exposé au CNAM (Paris) le 18 Sept. 2007 dans le cadre de la journée

Interactions entre théories algébriques et calcul scientifique

http://www.math.u-psud.fr/~fdubois/organisation/18sept07/smith-sept07.html

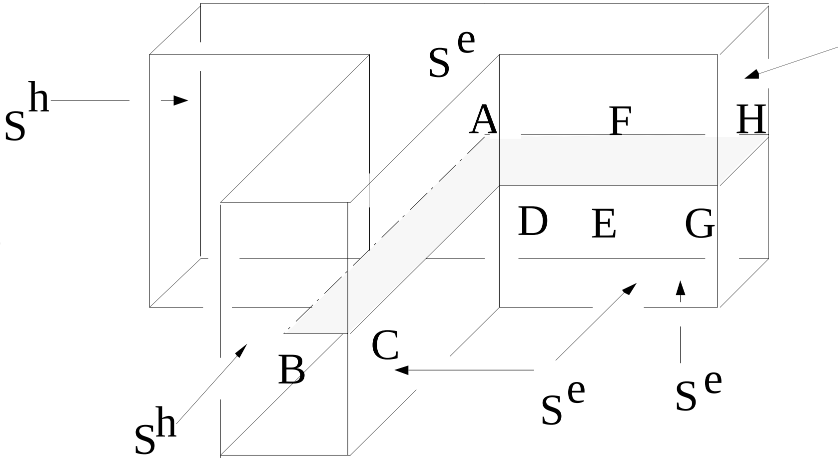
Les propriétés structurales du complexe des formes de Whitney, qui font de celles-ci "de bons éléments finis", pour l'électromagnétisme en particulier, sont maintenant bien connues. Reste à comprendre pourquoi *ce complexe-là,* et pas un autre: Quelles sont les propriétés *caractéristiques* des formes de Whitney, nécessaires et suffisantes pour les engendrer de façon *unique?* On décrit ici une technique *récursive* (à la fois sur la dimension d'espace et sur le degré) de génération du complexe de Whitney qui suggère une réponse à cette question. De plus, elle s'applique à d'autres formes d'éléments que les simplexes: hexaèdres, prismes, pyramides à base quadrangulaire, ce qui permet d'associer ces formes d'éléments dans un même maillage, avec conformité automatique aux interfaces.

Remerciements: à C. Doucet, dont les questions et propositions sur les éléments pyramidaux sont pour une part à l'origine de ce travail.

Pour mieux situer cette présentation dans le contexte de la Journée, dont l'un des thèmes majeurs était la "forme normale de Smith", je l'ai fait suivre d'un exposé sur ce sujet au congrès AMAM (Nice, fév. 2003), intitulé "Smith's normal forms in Homology". On verra sans peine la relation.

The infamous "spurious modes", ca. 1989

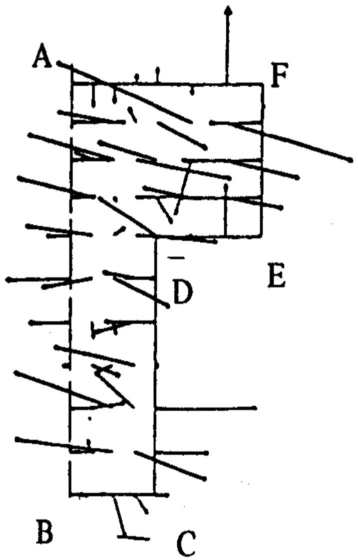
Compute resonant modes in a waveguide T-junction

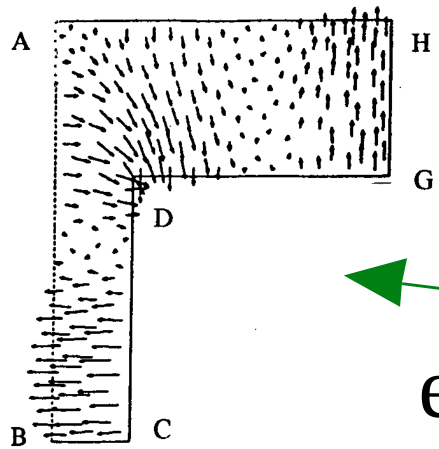


$$-i\omega\varepsilon E + \mathrm{rot}\, H = 0$$
$$i\omega\mu H + \mathrm{rot}\, E = 0$$
$$n \times H = 0 \text{ on } S^h$$
$$n \times E = 0 \text{ on } S^e$$

View of field E in shaded plane section:

Using standard node-based vector-valued elements





Using edge elements

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\right) = \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 0$$

only weakly enforced

Find E *in* $\mathcal{E}$ (whose definition includes $n \times E = 0$ on S^e) *such that*

$$\int \mathrm{rot}\, E \cdot \mathrm{rot}\, E' = \omega^2 \int \varepsilon\, E \cdot E' \quad \forall\, E' \in \mathcal{E}$$

Set $E' = \mathrm{grad}\, \varphi' \quad \Rightarrow \quad \int \varepsilon E \cdot \mathrm{grad}\, \varphi' = 0 \quad \forall\, \varphi' \in \Phi$,

the weak form of $\mathrm{div}(\varepsilon E) = 0$, so require $\mathrm{grad}\, \Phi \subset \mathcal{E}$,

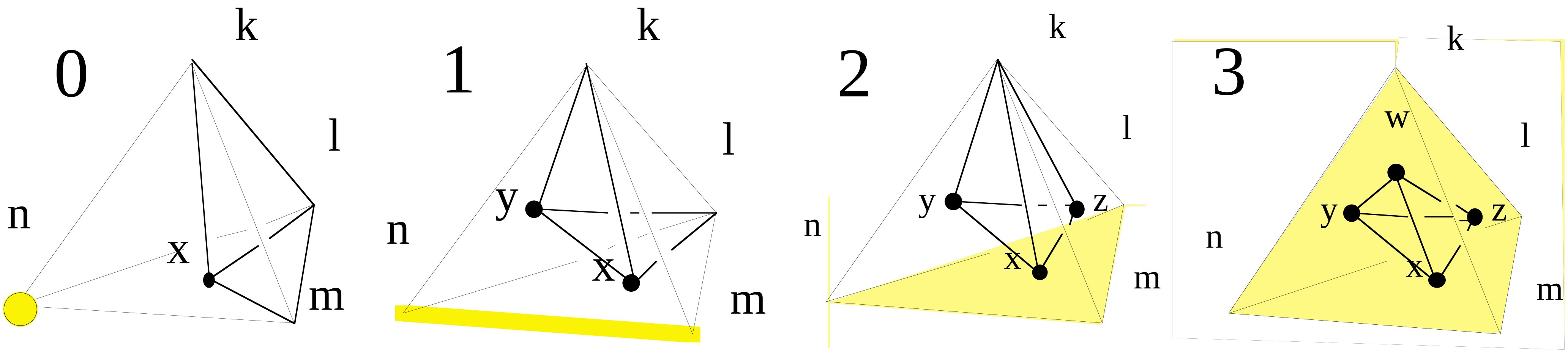
with Φ large enough. Not the case if $\mathcal{E}$ spanned by nodal vectorial elements. Whereas if $\mathcal{E} = W^1$, yes:

$$\Phi \longrightarrow \boxed{W^0 \xrightarrow{\mathrm{grad}} W^1 \xrightarrow{\mathrm{rot}} W^2 \xrightarrow{\mathrm{div}} W^3}$$

Les "éléments d'arêtes", éléments de l'espace W^1 ci-dessus, sont les formes de Whitney de degré 1. Le fait essentiel, pour l'élimination des "modes parasites" était que les gradients des fonctions de l'espace W^0 (ç.à.d. les "fonctions chapeau") appartiennent à W^1, où elles "remplissent le noyau de rot". La même propriété ($\ker(d \,;\, W^p) = dW^{p-1}$), se retrouve à chaque degré p (associé à la dimension p des éléments considérés), ce qui caractérise les "suites exactes" en topologie algébrique.

On note d ("dérivée extérieure") l'opérateur dont grad, rot et div sont les avatars en dimension 3, à condition de remplacer les champs scalaires ou vectoriels par les *formes différentielles* qu'ils représentent.

Formes de Whitney



w^n $\quad w^{\{m, n\}}$ $\quad w^{\{l, m, n\}}$ $\quad w^{\{k, l, m, n\}}$

λ^n

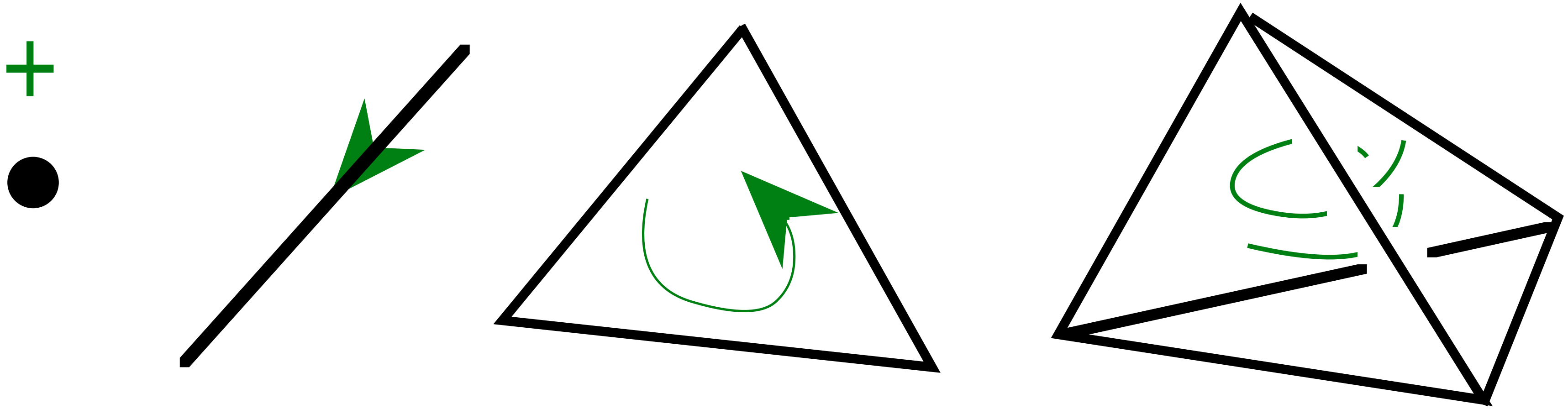
$\lambda^n \, d\lambda^m - \lambda^m d\lambda^n$

Leur interprétation géométrique: l'intégrale de w^{mn} sur xy est vol(xykl)/vol(mnkl), etc.

Leur expression analytique

$2[\lambda^l \, d\lambda^m \wedge d\lambda^n + \ldots + \ldots]$

$6 \, d\lambda^k \wedge d\lambda^l \wedge d\lambda^m$



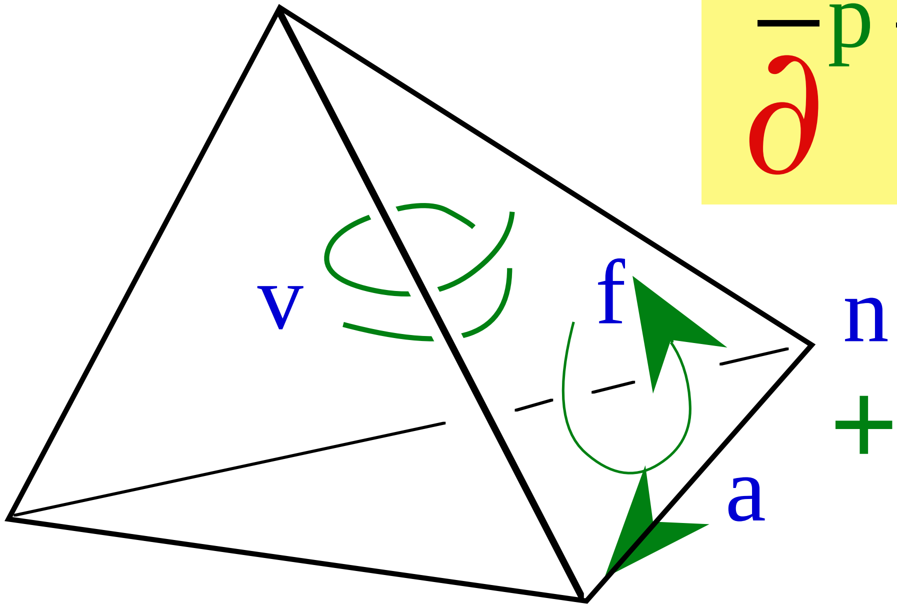
Cellules (simpliciales) du maillage, orientées indépendamment

$$\bar{\partial}^{\,p-1}\,\bar{\partial}^{\,p} = 0$$

$$G_a^n \equiv \bar{\partial}_{an} = -1$$

$$R_f^a \equiv \bar{\partial}_{fa} = -1$$

$$D_v^f \equiv \bar{\partial}_{vf} = 1$$



Matrices d'incidence:
Notations

$$\partial f = \sum_a \bar{\partial}_{fa}\, a$$

Relation entre tableaux de d.d.l. et formes, entre matrices d'incidence et opérateur d:

Ensembles $\mathcal{N}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$ des sommets, arêtes, facettes, volumes

$$\begin{array}{ccc}
\overline{\varphi} = \{\varphi_n : \ n \in \mathcal{N}\} & \xrightarrow{p_m} & \sum_{n\in\mathcal{N}} \varphi_n \, w^n \in W^0 \\
\downarrow G & & d \downarrow \\
\overline{e} = \{e_a : \ a \in \mathcal{A}\} & \xrightarrow{p_m} & \sum_{a\in\mathcal{A}} e_a \, w^a \in W^1 \\
\downarrow R & & d \downarrow \\
\overline{b} = \{b_a : \ f \in \mathcal{F}\} & \xrightarrow{p_m} & \sum_{f\in\mathcal{F}} b_f \, w^f \in W^2
\end{array}$$

Diagramme commutatif, suites exactes:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\text{Champs} & \overset{0}{\circ}\;\varphi \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, shift left, "\flat"] & \overset{1}{\circ}\;e \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, shift left, "\flat"] & \overset{2}{\circ} \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, shift left, "\flat"] & \overset{3}{\circ} \arrow[d, shift left, "\flat"] \\
\text{Formes diff. (ou "cochaînes")} & W^0 \arrow[u, shift left, "\#"] \arrow[r, "d"] & W^1 \arrow[u, shift left, "\#"] \arrow[r, "d"] & W^2 \arrow[u, shift left, "\#"] \arrow[r, "d"] & W^3 \arrow[u, shift left, "\#"] \\
\text{Tableaux de d.d.l. (ou "cochaînes cellulaires")} & \underset{\mathcal{N}}{\overline{W}^0} \arrow[u, "p_m"] \arrow[r, "G"] & \underset{\mathcal{A}}{\overline{W}^1} \arrow[u, "p_m"] \arrow[r, "R"] & \underset{\mathcal{F}}{\overline{W}^2} \arrow[u, "p_m"] \arrow[r, "D"] & \underset{\mathcal{V}}{\overline{W}^3} \arrow[u, "p_m"]
\end{tikzcd}$$

$R_f^a = 0$, ou ± 1 si $a \in \partial f$, etc.

"Diagramme commutatif, suite exacte", sont ainsi devenus des mots-clés dans la théorie des "éléments mixtes", comme on disait autrefois (sic). Il est devenu clair que les formes de Whitney étaient la réponse à la question.

OK. But why *these* forms, precisely?

(If Whitney forms are the answer, what is the question?)

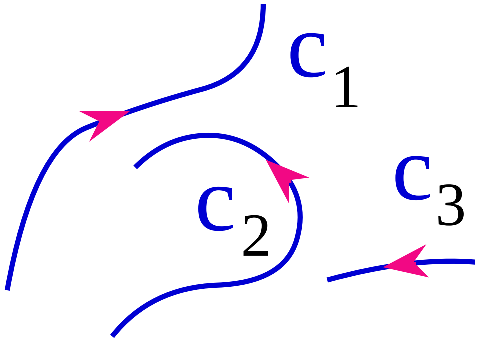
Quelle question, toutefois, était moins clair.

Il faut prendre conscience de l'importance *physique* de la dualité entre p-formes et p-variétés, entre p-chaînes et p-cochaînes, pour s'y retrouver.

Le concept de chaîne:

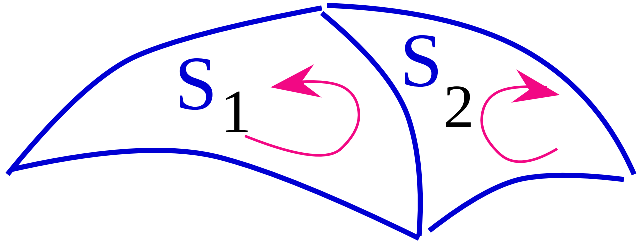
Embed set of curves in vector space of singular 1-*chains*

1-chains:



$$c = r^1 c_1 + r^2 c_2 + r^3 c_3$$

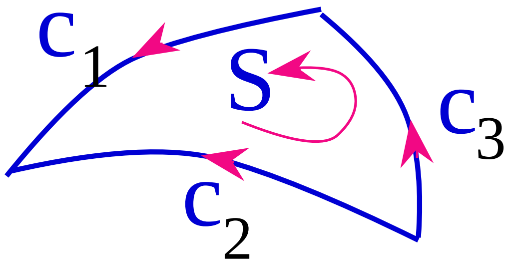
2-chains:



e.g., $S = S_1 - S_2$

Same with surfaces etc.: p-*chains*

Boundary operator ∂:



$$\partial S = c_1 - c_2 + c_3$$

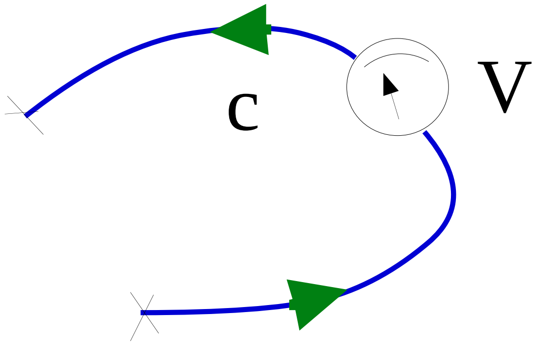
(Linear map: $\partial(S_1 - S_2) = \partial S_1 - \partial S_2$)

What about dual objects (linear functionals), called cochains?

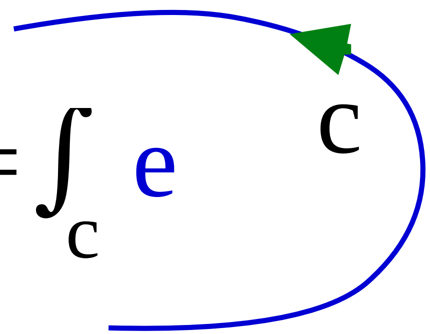
Chains model probes. Cochains model fields.

Voltmeter:

(p = 1)



e.m.f. $V = \int_c e$



Electric field seen as map

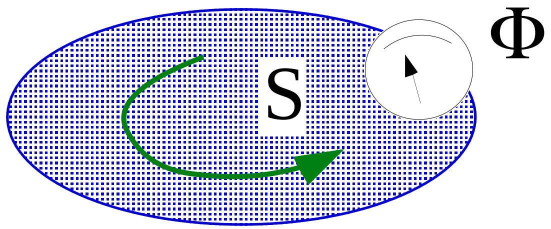
$\boxed{c \to \langle \text{emf along } c \rangle,}$

map here denoted e,

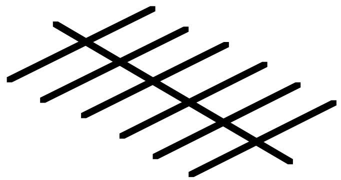
a 1-cochain.

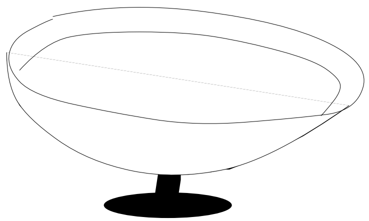
Fluxmeter:

(p = 2)



Antennas:





etc.

Magnetic induction as map

b, the 2-cochain

$\boxed{S \to \langle \text{flux embraced by } S \rangle.}$

Small probe <—> p-vector

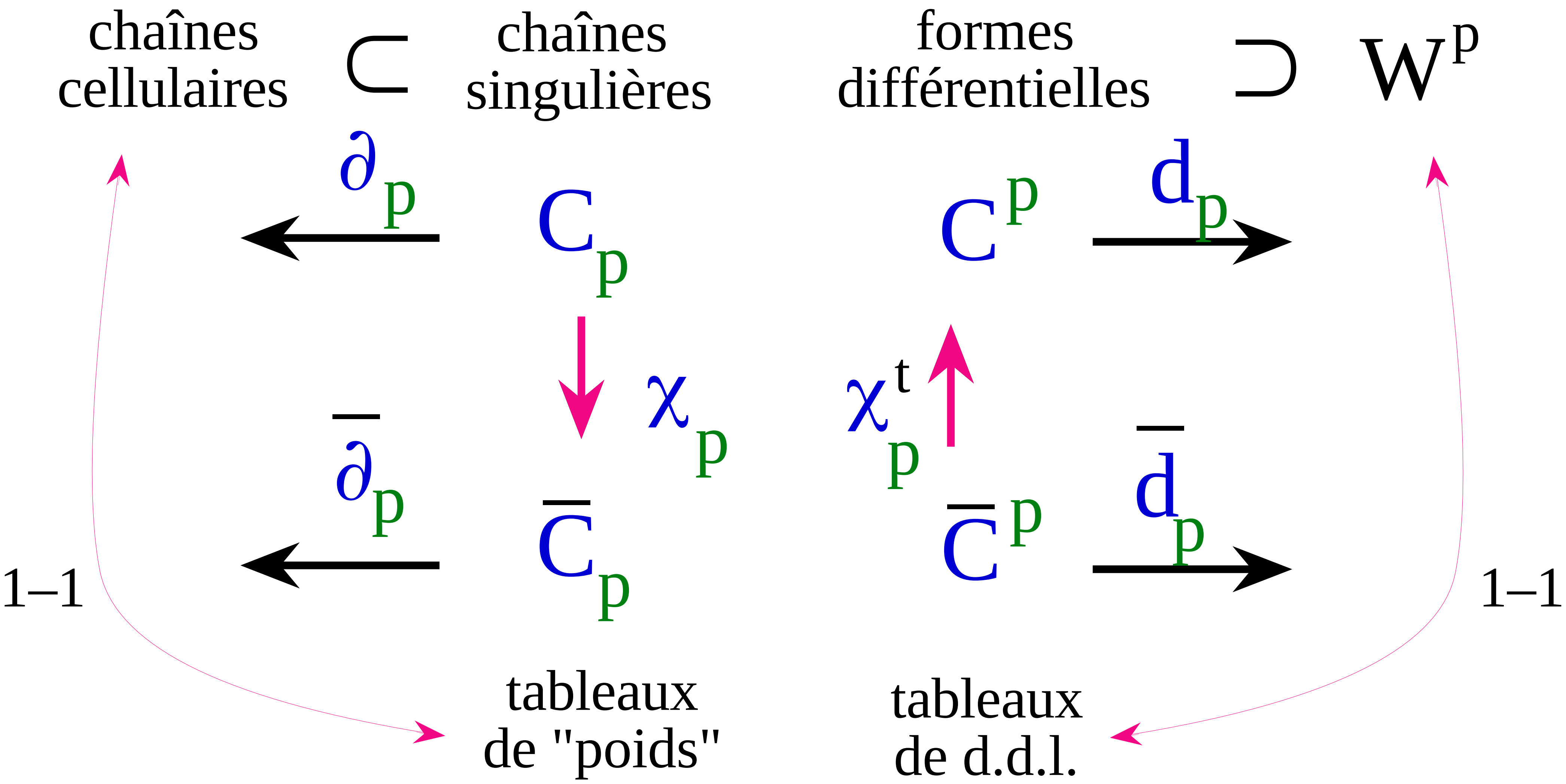
Local field <—> p-covector

Le concept d'“application de chaîne”

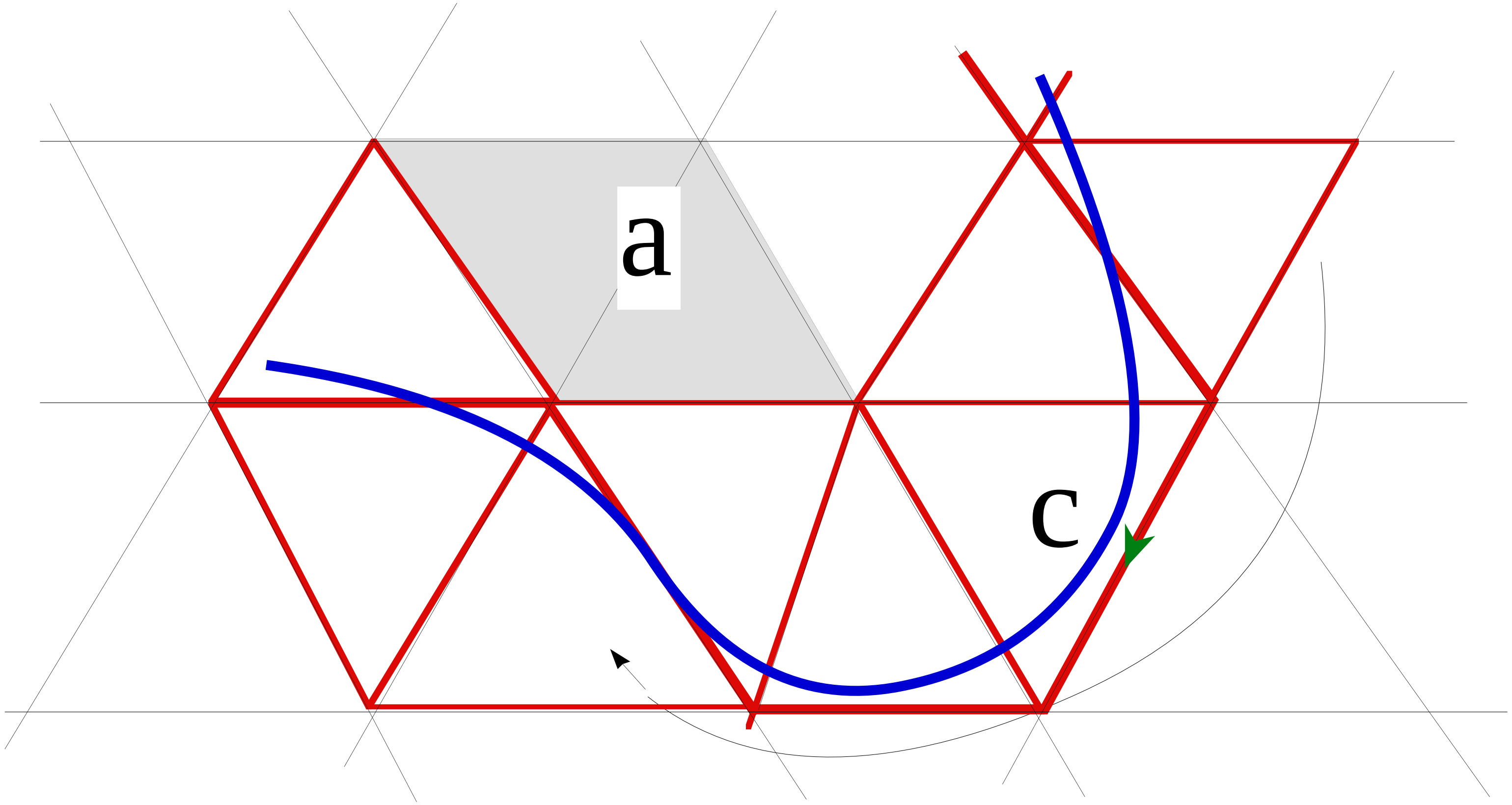
$$\begin{tikzcd}
\cdots & C_{p-1} \arrow[l, "\partial_{p-1}"'] \arrow[d, "\chi_{p-1}"] & C_p \arrow[l, "\partial_p"'] \arrow[d, "\chi_p"] & \cdots \arrow[l, "\partial_{p+1}"'] \\
\cdots & \overline{C}_{p-1} \arrow[l, "\overline{\partial}_{p-1}"] & \overline{C}_p \arrow[l, "\overline{\partial}_p"] & \cdots \arrow[l, "\overline{\partial}_{p+1}"]
\end{tikzcd}$$

Diagramme commutatif

Transposer une application de chaîne à l'espace dual des cochaînes



Par dualité, les formes de Whitney, qui apparaissaient (dans l'esprit de la méthode des éléments finis) comme des "interpolants", construisant des champs à partir de d.d.l. associés aux éléments géométriques, peuvent servir à approcher des *chaînes singulières* (en particulier, des lignes, surfaces, etc.) par des *chaînes cellulaires* formées de sommes pondérées de ces mêmes éléments géométriques. Cela **revient au même** (vue suivante), mais le changement de point de vue est essentiel en ce qu'il suggère une *heuristique* de construction des formes de Whitney, qui réussit pleinement comme on va le voir.



$\bar{e}_a$: emf sur a

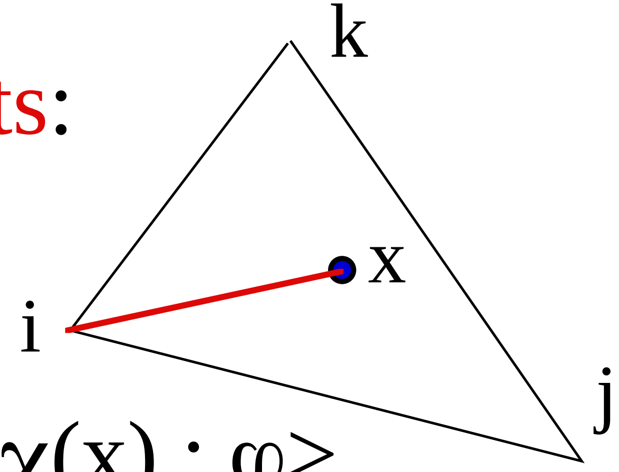
$w^a(c) \equiv \int_c w^a$: Poids de l'arête a dans la représentation de c

Si $c \sim \sum_{a \in \mathcal{A}} w^a(c)\, a$, alors $\int_c e \sim \sum_a w^a(c) \int_a e$,

d'où $\int_c e \sim \sum_a w^a(c)\, \bar{\mathbf{e}}_a$, donc $e \sim \sum_a \bar{\mathbf{e}}_a\, w^a$

Représenter une ligne comme chaîne d'arêtes?

Problème analogue résolu pour les points:



$$\chi(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \lambda^n(x)\, n$$

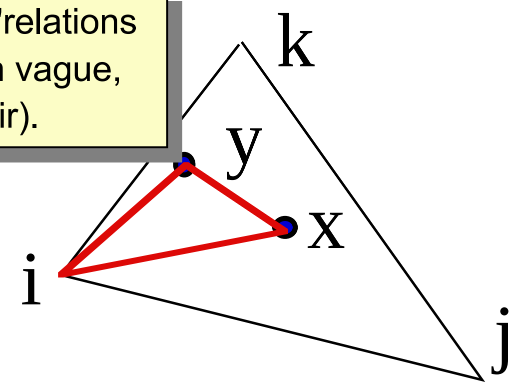
$$\varphi(x) \approx \sum_n \lambda^n(x)\, \varphi_n \equiv \langle \sum_n \lambda^n(x)\, n \,;\, \varphi \rangle = \langle \chi(x) \,;\, \varphi \rangle$$

Solution forcée pour un segment tel que ix:

$$\chi(ix) = \lambda^j(x)\, ij + \lambda^k(x)\, ik$$

Noter la préservation des "relations affines" existantes (notion vague, mais qui va s'éclaircir).

et aussi pour le triangle ixy:



$$\chi(ixy) = ijk \text{ aire}(ixy)/\text{aire}(ijk) = \alpha\, ijk$$

d'où

$$\chi(xy) = \chi(\partial(ixy)) - \chi(ix) - \chi(yi) = \partial(\chi(ixy)) - \chi(ix) - \chi(yi)$$

$$= \alpha\,(ij + jk + ki) - \chi(ix) - \chi(yi)$$

D'où une façon naturelle de représenter un segment ou un triangle (et donc, par sommation à la Riemann, une ligne ou un domaine 2D) par une somme pondérée d'arêtes ou de facettes. Seules des propriétés *affines* (par opposition à *métriques*) sont intervenues. Bien entendu, ce succès reste limité à la dimension 2, mais les ingrédients d'une généralisation sont tous là.

Answering the question: Which problem do Whitney forms solve?

On peut maintenant risquer un *théorème caractéristique* (existence et unicité, par rapport à certaines conditions) des formes de Whitney, puis le prouver.

L'application de Whitney, "côté chaînes":

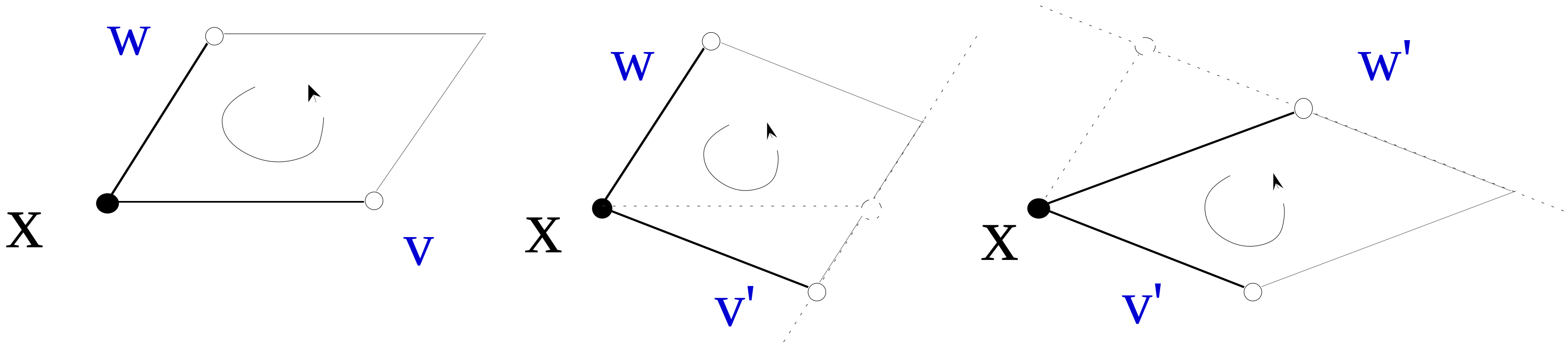
$$
\begin{tikzcd}
\cdots & M_{p-1} \arrow[l] \arrow[d, "\chi"'] & M_p \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "\chi"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & C_{p-1} \arrow[l] \arrow[u, bend right, "\iota"'] & C_p \arrow[l, "\partial"'] \arrow[u, bend right, "\iota"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Thm.: $\exists$ *unique* χ *telle que*

$$\boxed{\chi\partial = \partial\chi, \quad \chi\iota = 1,} \quad \chi(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \lambda^n(x)\, n$$

et "affine", en un sens à préciser

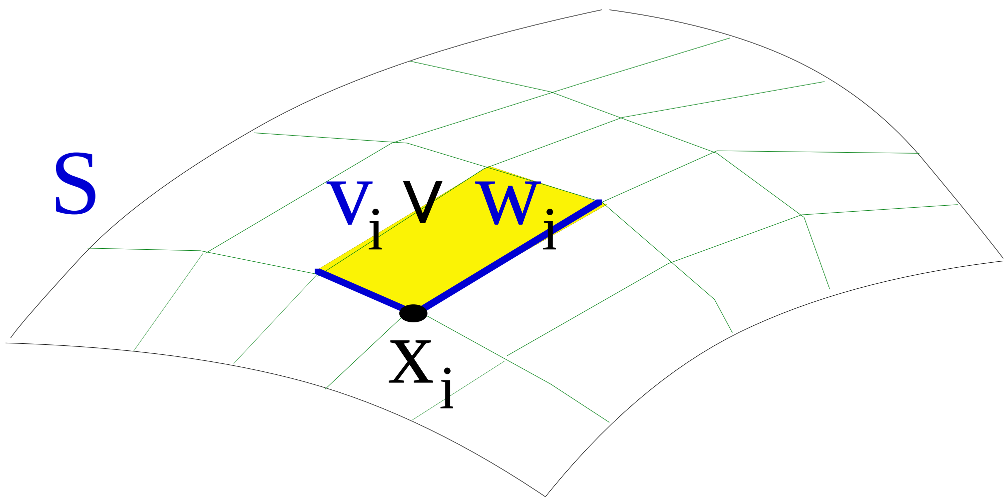
Notion de bivecteur: (noté $v \wedge w$ ou $v \vee w$)



$\{v, w\} \sim \{v', w\} \sim \{v', w'\}$

L'opérateur vect:

Même chose pour p-vecteurs et p-variétés



$$\mathrm{vect}(S) = \lim \sum_i v_i \vee w_i$$

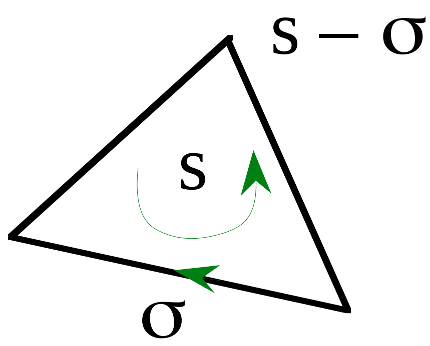
("limite", au sens de la "norme naturelle" de J. Harrison)

En quel sens χ est "affine":

Condition sur χ:

$$\mathrm{vect}(\chi(S)) = \mathrm{vect}(S)$$

Pourquoi une construction *récursive* semble naturelle:

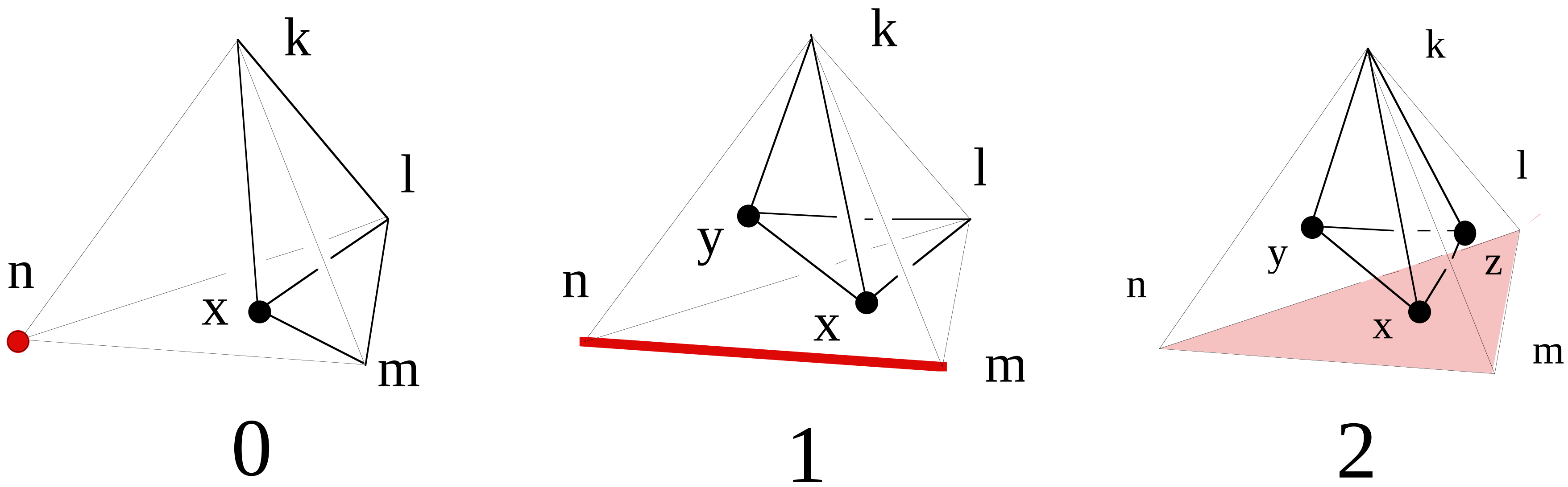


Pour le p-simplexe s,

facile à vérifier...

$$w^s(x) = \sum_{\sigma \in \{(p-1)\text{-simplexes}\}} \partial^s_\sigma \, \lambda^{s-\sigma}(x)\, dw^\sigma$$

... et à comprendre: un déterminant est quelque chose de *récursif,* par nature



Supposons connu un complexe de Whitney K_N (complexe cellulaire + une forme de Whitney par cellule) porté par un sous-espace de dimension N.

(Il se réduit sur la fig. suivante à un N-simplexe et ses faces.)

L'opération de "suspension" décrite ci-dessous va

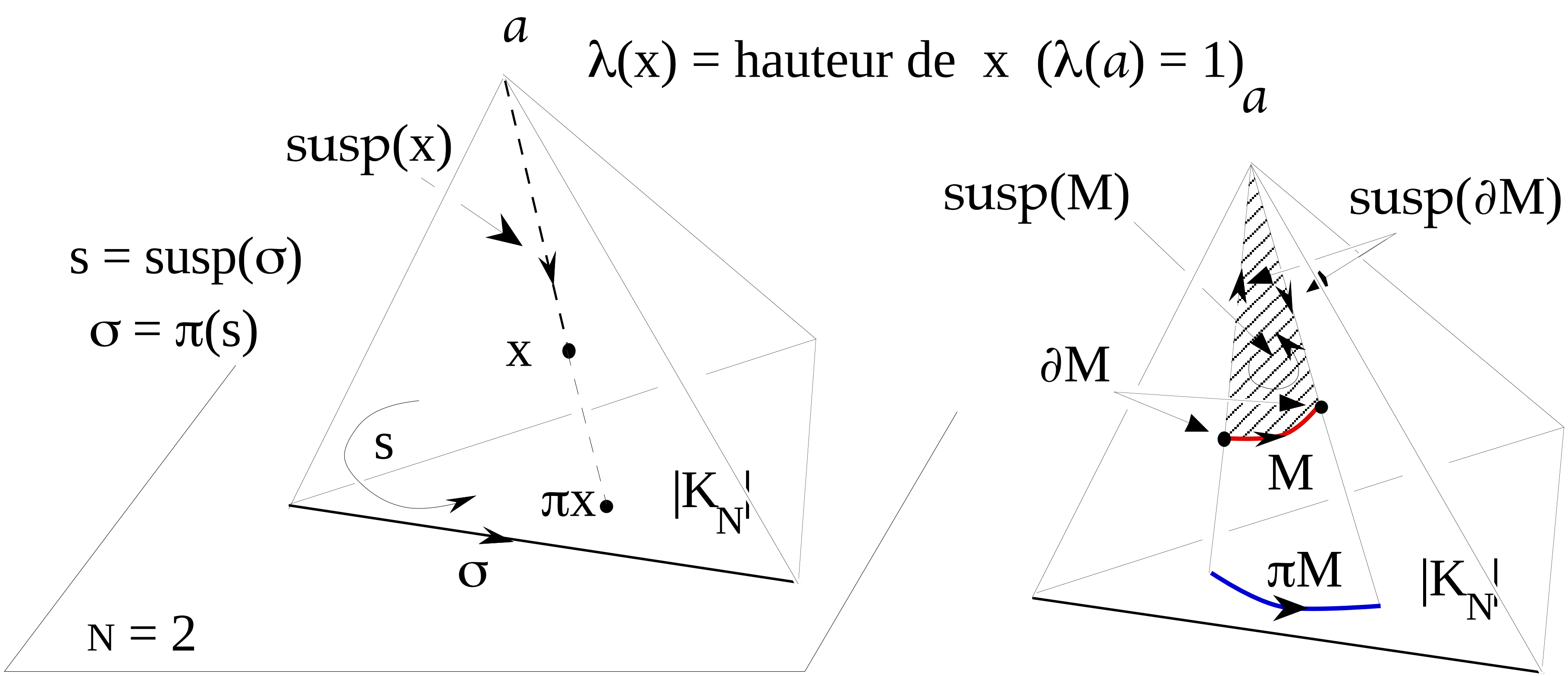
- Ajouter une dimension au complexe cellulaire
- Construire les formes de Whitney correspondantes, ç.à.d.:

  (1) Prolonger à la dimension $N + 1$ celles associées aux cellules déjà existantes (dites "du bas"),

  (2) Définir celles associées aux nouvelles cellules (dites "du haut")

D'où K_{N+1}.

Attention: le sens du mot "suspension" en Topologie est différent. On devrait plutôt parler de "suspension unilatérale" ou (eih bennek...) de "conation".



π*: "retrait" (pullback), ou image réciproque, relève en 3D

les formes vivant sur le plan de base

Cas M = πM:

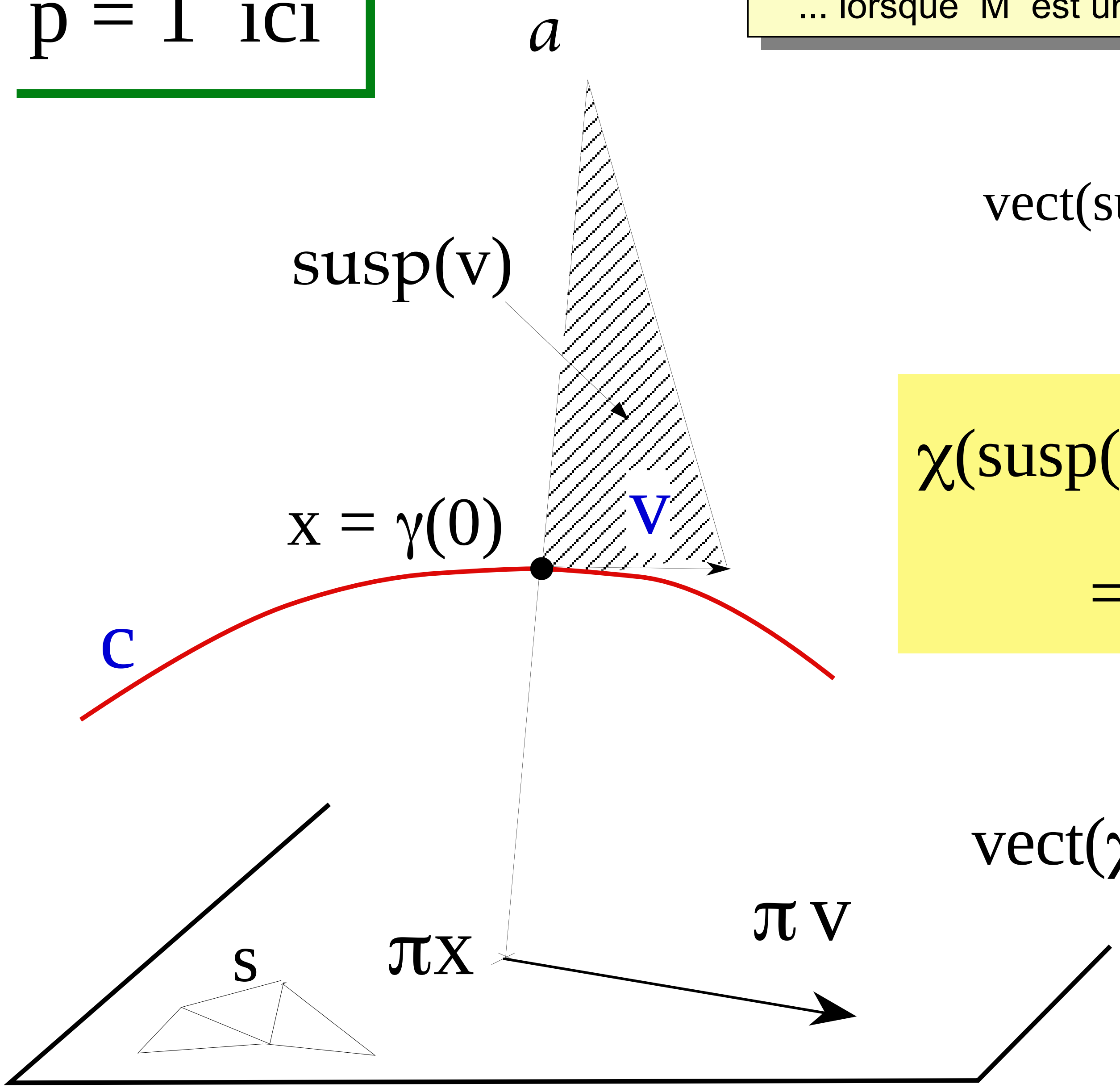
Par hypothèse, on connaît $\chi(\pi(M))$.

$$\chi(\text{susp}(M)) = \text{susp}(\chi(M))$$

Dans deux cas, on trouve facilement $\chi(\text{susp}(M))$: Lorsque M est "en bas (M = πM), et ...

Noter (utile plus tard) que $\partial[\text{susp}(M)] = M - \text{susp}(\partial M)$

$p = 1$ ici



... lorsque M est un p-vecteur:

on a

$$\mathrm{vect}(\mathrm{susp}(v)) = (1-\lambda)^{p+1}\,\mathrm{vect}(\mathrm{susp}(\pi^* v)),$$

donc

$$\chi(\mathrm{susp}(v)) = (1-\lambda)^{p+1}\,\mathrm{susp}(\chi(\pi^* v))$$
$$= \mathrm{susp}(\chi((1-\lambda)^{p+1}\,\pi^* v))$$

de manière à assurer

$$\mathrm{vect}(\chi(\mathrm{susp}(v))) = \mathrm{vect}(\mathrm{susp}(v))$$

D'où $\chi(\mathrm{susp}(\ ))$, dans tous les cas:

Intégrant sur c les contributions

des vecteurs tangents, on aboutit à

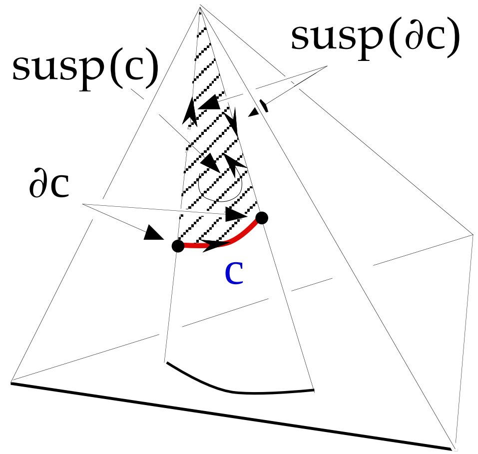
s : cellules du bas

$\underline{w}^s$: leurs W-formes

$$\chi(\mathrm{susp}(c)) = \sum_s \left[\int_c (1-\lambda)^{p+1}\,\pi^* \underline{w}^s\right] \mathrm{susp}(s)$$

Compte tenu de ce que

$$c = \partial[\mathrm{susp}(c)] - \mathrm{susp}(\partial c)$$



on a alors

... et on passe à $\chi(c)$ par linéarité

$$\chi(c) = \chi(\partial[\mathrm{susp}(c)]) + \chi(\mathrm{susp}(\partial c)) = \partial[\chi(\mathrm{susp}(c))] + \chi(\mathrm{susp}(\partial c))$$

$$= \sum_s \int_c (1-\lambda)^{p+1} \pi^* \underline{w}^s \; \partial[\mathrm{susp}(s)]$$

$$+ \sum_\sigma \int_c d[(1-\lambda)^p \pi^* \underline{w}^\sigma] \; \mathrm{susp}(\sigma)$$

p-cellules du bas

(p – 1)-cellules du bas

d'où on obtient

$$w^s = (1-\lambda)^{p+1} \pi^* \underline{w}^s$$

pour les p-cellules s "du bas"

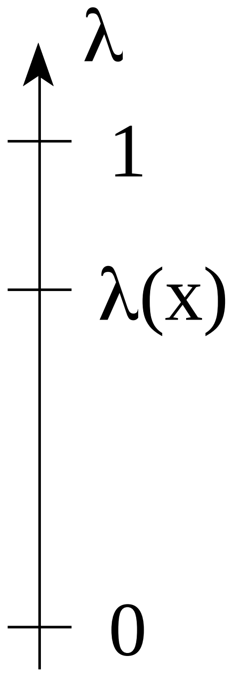
$$w^s = \lambda \, dw^\sigma - p \, d\lambda \wedge \underline{w}^\sigma$$

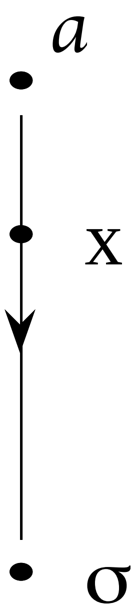
pour $s = \mathrm{susp}(\sigma)$,
où σ est une $(p-1)$-cellule "du bas"

Vérification:

N = 2, N = 3, laissés en exercice

$N = 1$





$$w^{a} = \lambda$$

$$w^{a\sigma} = -\,d\lambda$$

$$w^{\sigma} = 1 - \lambda$$

$N = 0$

$\sigma\ \bullet$

$$w \quad = 1$$

"Suspension" engendre effectivement les formes de Whitney simpliciales, pour tout N et tout $p \leq N$. On retrouve la formule récursive annoncée plus haut, qui sert à prouver la propriété de suite exacte. (Cf.

http://natrium.em.tut.fi/~bossavit/Sundries/GE.pdf

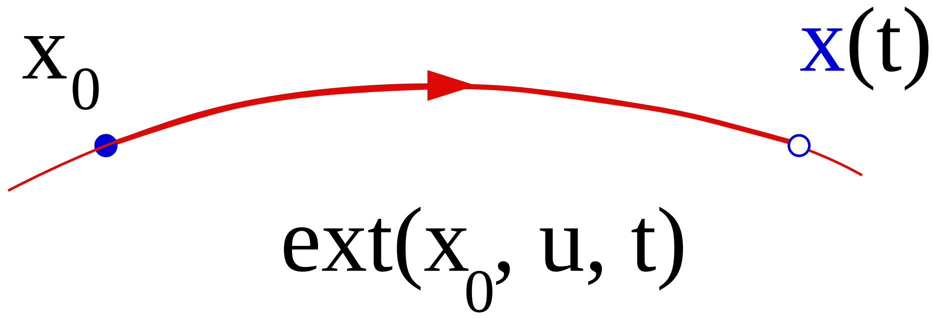
Section 7.3.)

Mais en pratique, on a besoin d'autres supports d'éléments que les triangles ou tétraèdres, d'où l'intérêt du second procédé de montée en dimension, l'**extrusion.**

Extrusion:

> Ici u est un champ de vecteurs, qui engendre un flot:

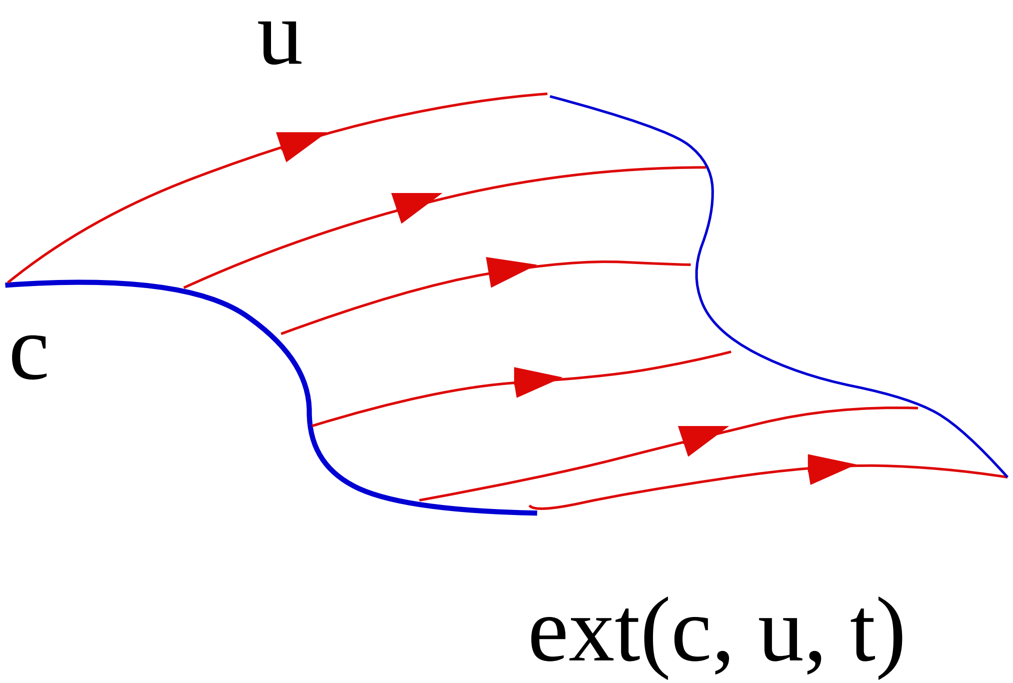
- d'un point:



$$\begin{cases} d_t x = u(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

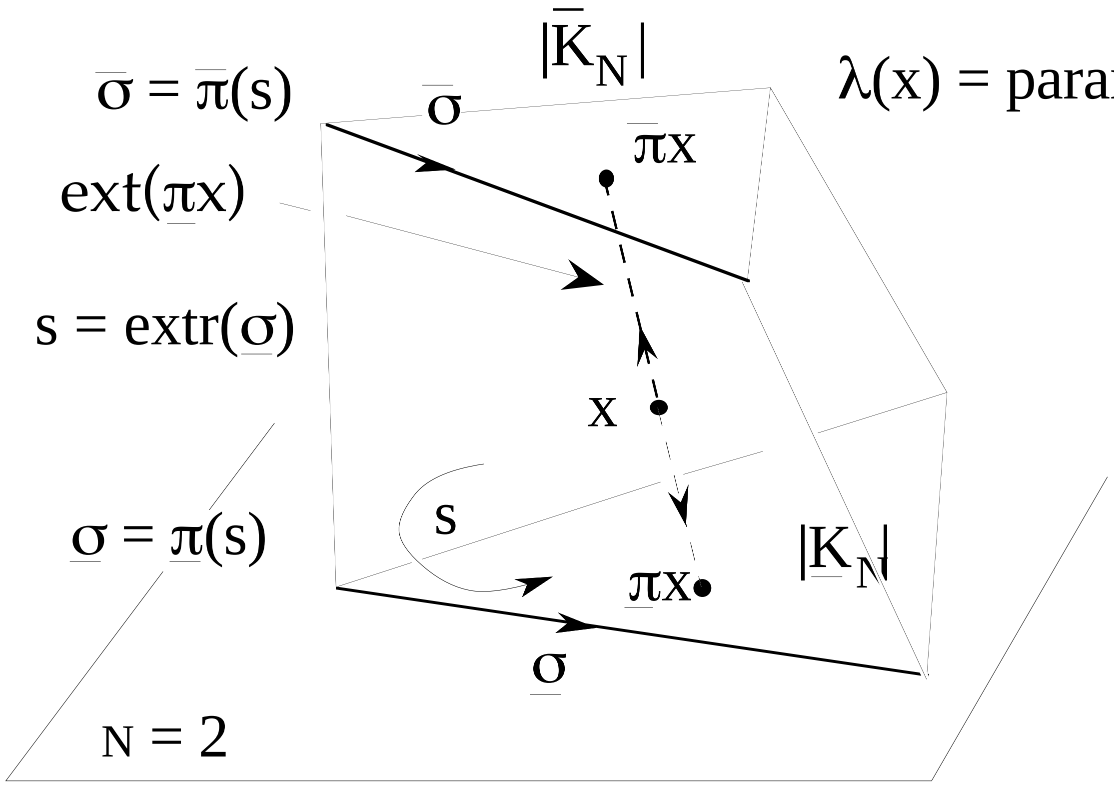
> Le temps t (plus loin renommé λ) sert de paramètre affine pour l'extrusion

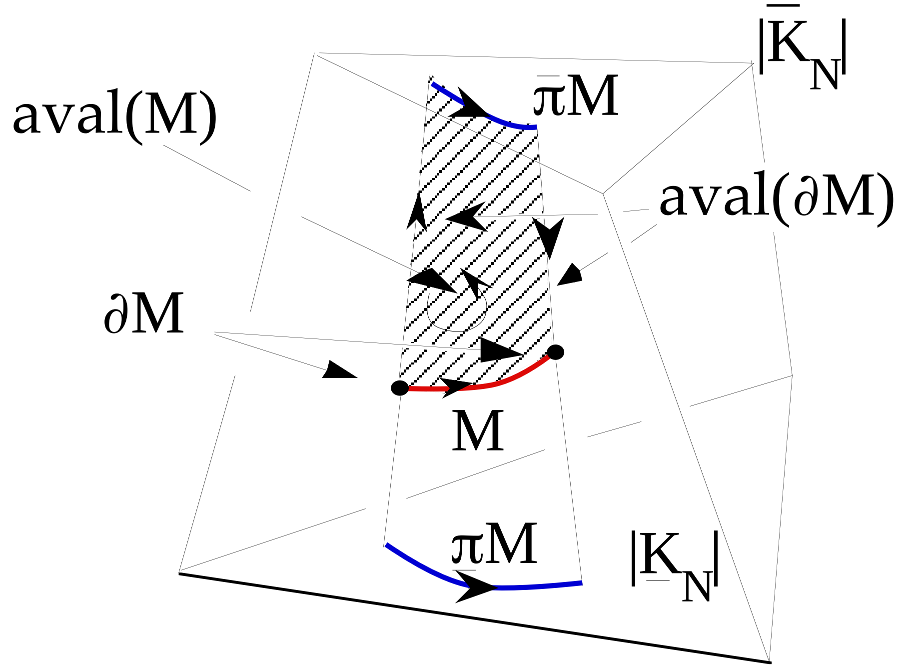
- d'une p-variété:



> Montée en dimension, en fait beaucoup plus facile que dans le cas simplicial, mais traitée dans le même style pour mettre en évidence les analogies:

$\lambda(x)$ = paramètre affine $(\lambda(\mathit{haut}) = 1,\ \lambda(\mathit{bas}) = 0)$





Deux projections de M ici.

$$\partial[\mathrm{aval}(M)] = M - \overline{\pi}M - \mathrm{aval}(\partial M)$$

Attention, sens de "haut" différent ici.

Deux parties, "aval" et "amont", dans l'extrusion de $\underline{\pi}$M.

$$w^s = (1 - \lambda)\ \pi^* \underline{w}^s$$

pour les p-cellules s "du bas"

$$\overline{w}^s = \lambda\ \pi^* \underline{w}^s$$

pour les p-cellules s "du haut"

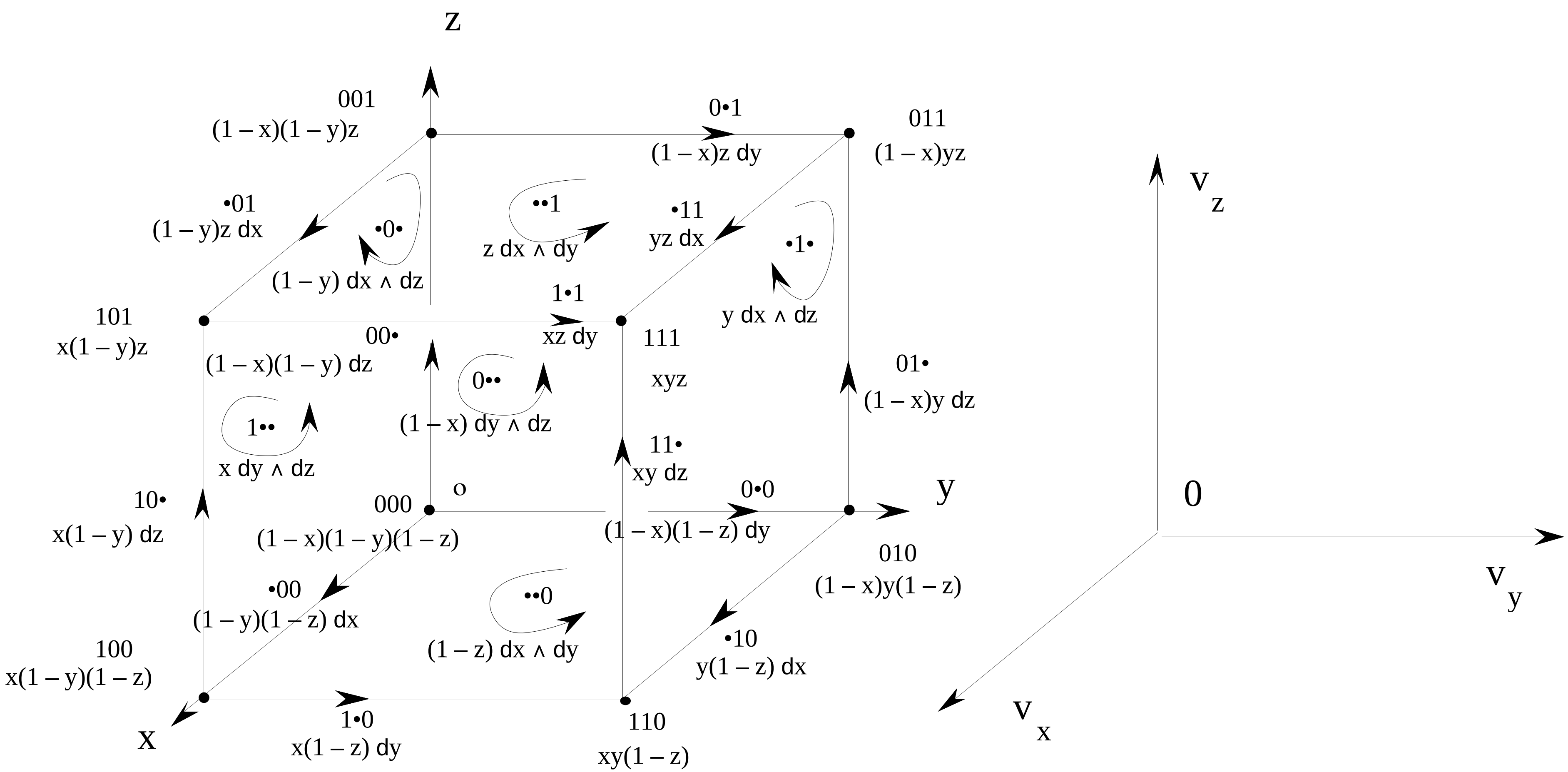
$$w^s = -\,d\lambda \wedge \underline{w}^\sigma$$

pour s = extr($\underline{\sigma}$),

où $\underline{\sigma}$ est une (p – 1)-cellule "du bas"

De N = 0 à N = 3, trois montées, pour lesquelles on peut "suspendre" ou "extruder", au choix. Combinant les deux procédés de toutes les façons possibles, on obtient les complexes de Whitney annoncés:

Trois extrusions successives:



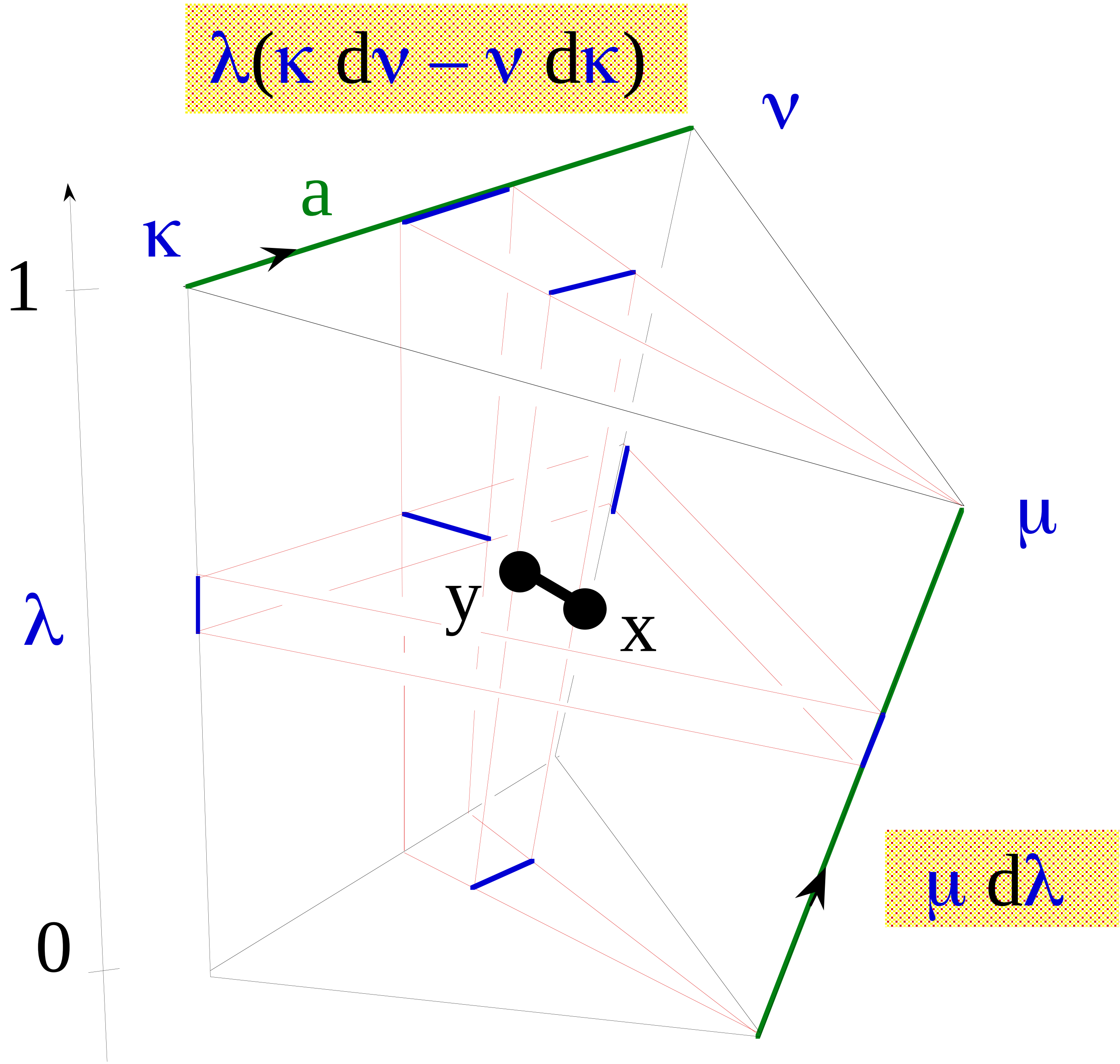
Catalogue des formes de Whitney sur l'hexaèdre. Les trois champs d'extrusion v_x, v_y, v_z sont réguliers, indépendants, mais pas forcément, comme sur le dessin, uniformes, et x, y, z sont les paramètres affines associés, pas forcément les coordonnées cartésiennes.

Extrusion, suspension, extrusion:

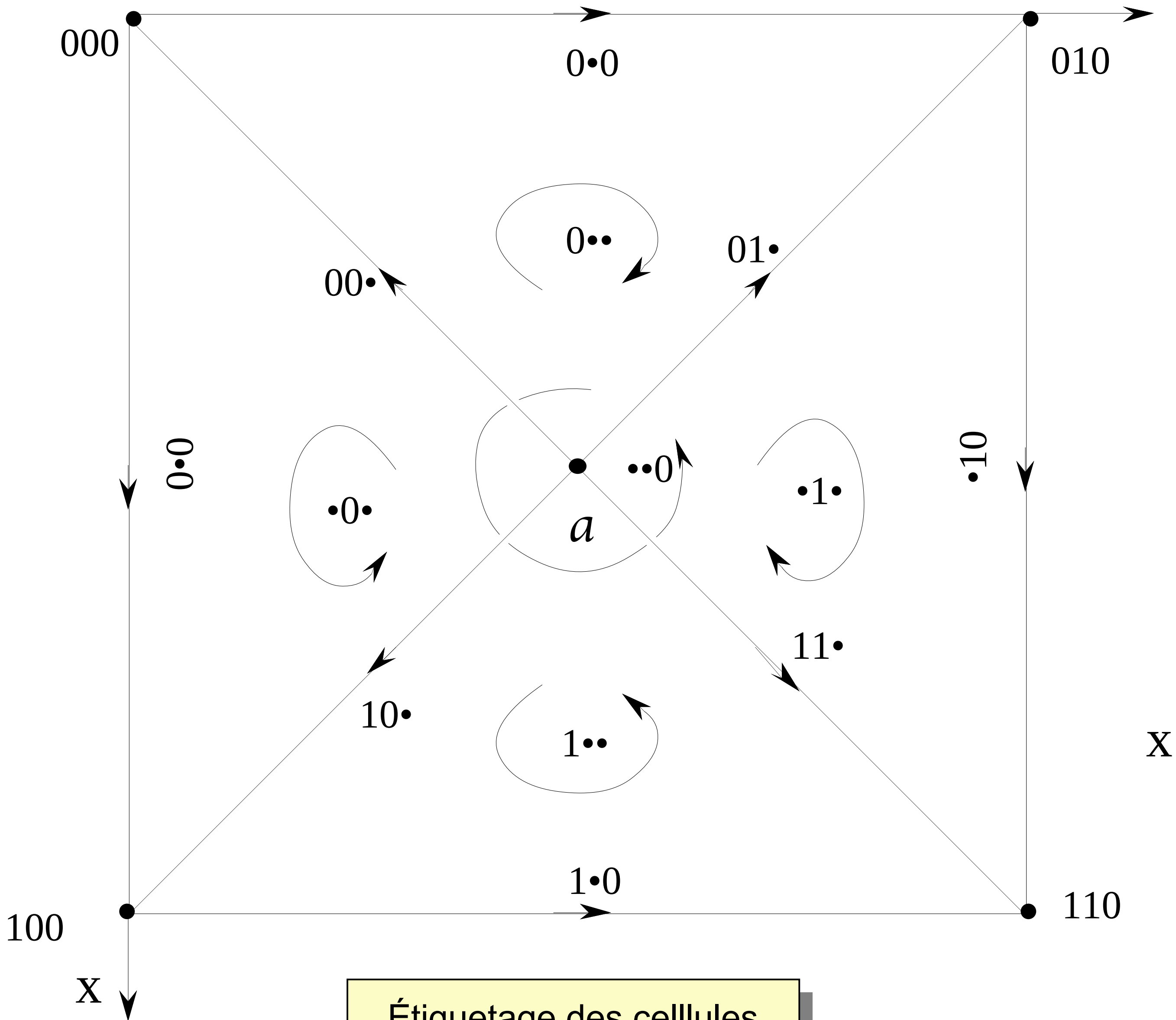
$\chi(xy)$ = somme pondérée d'arêtes

Poids donnés par les $\int_{xy} w^a$

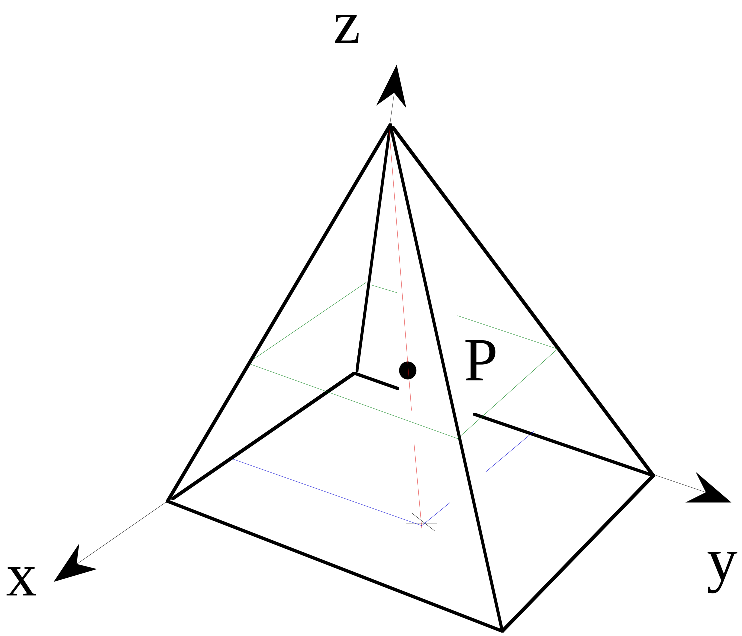
Deux des w^a indiquées à droite



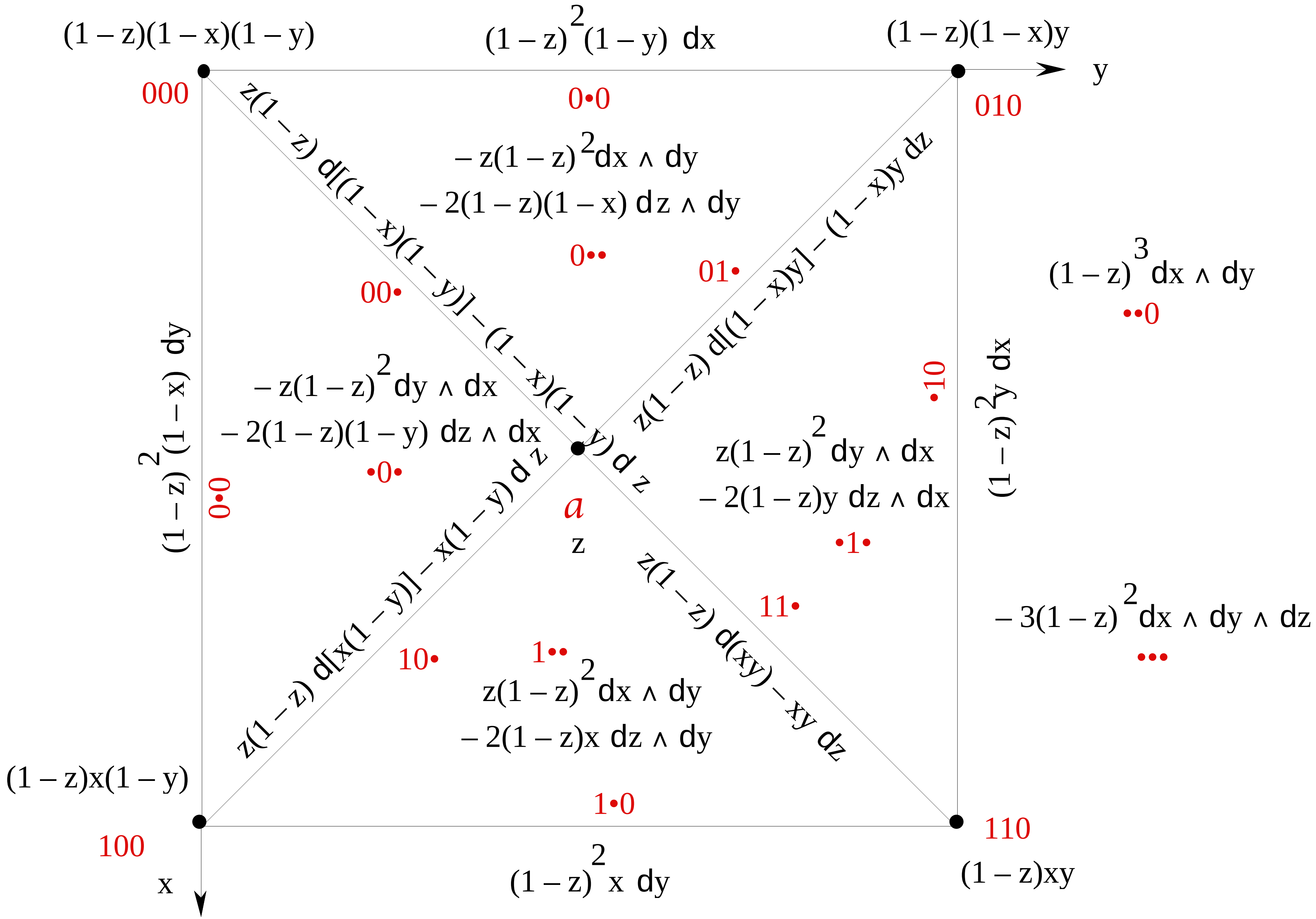
Extrusion, extrusion, suspension:



Étiquetage des celllules



Attention, x, y, z ne sont pas les coordonnées cartésiennes



Catalogue des formes de Whitney sur la pyramide.

Annexe:

Alain Bossavit

Laboratoire de Génie Électrique de Paris

(CNRS, France)

bossavit@lgep.supelec.fr

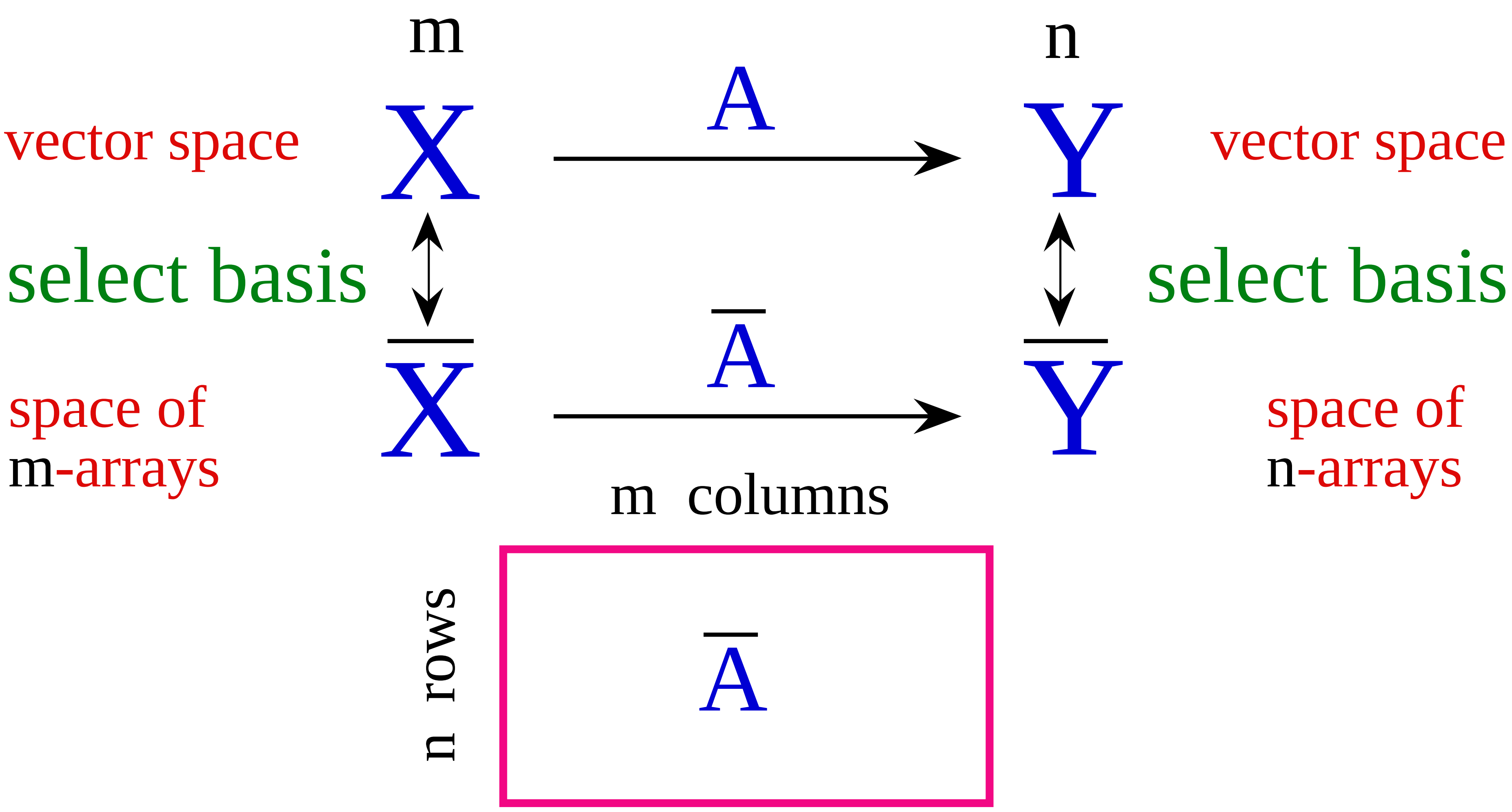
Let's get acquainted with

Smith's normal forms in Homology

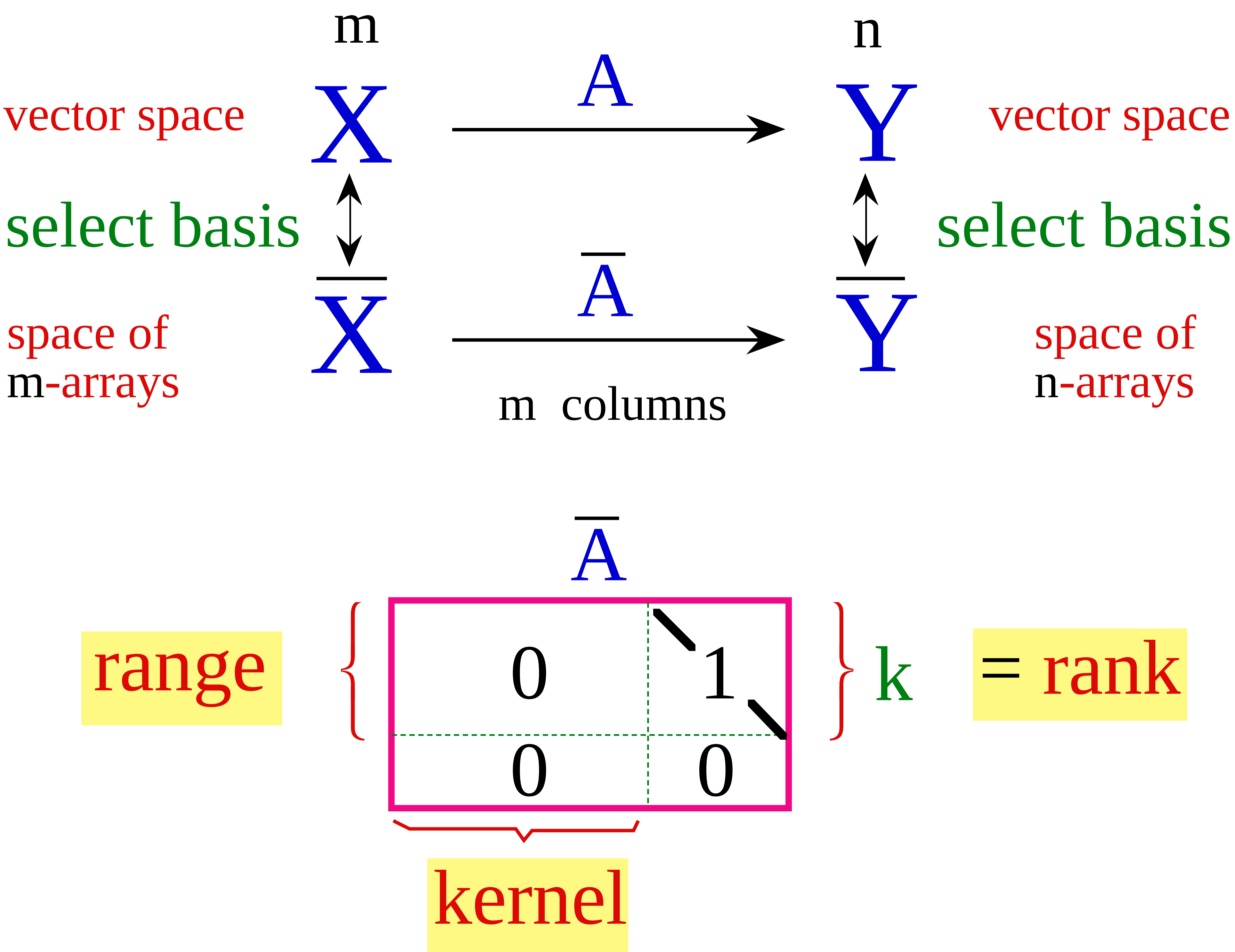
Automatizing the search for loops, holes, mesh defects, "global" basis fields, ...

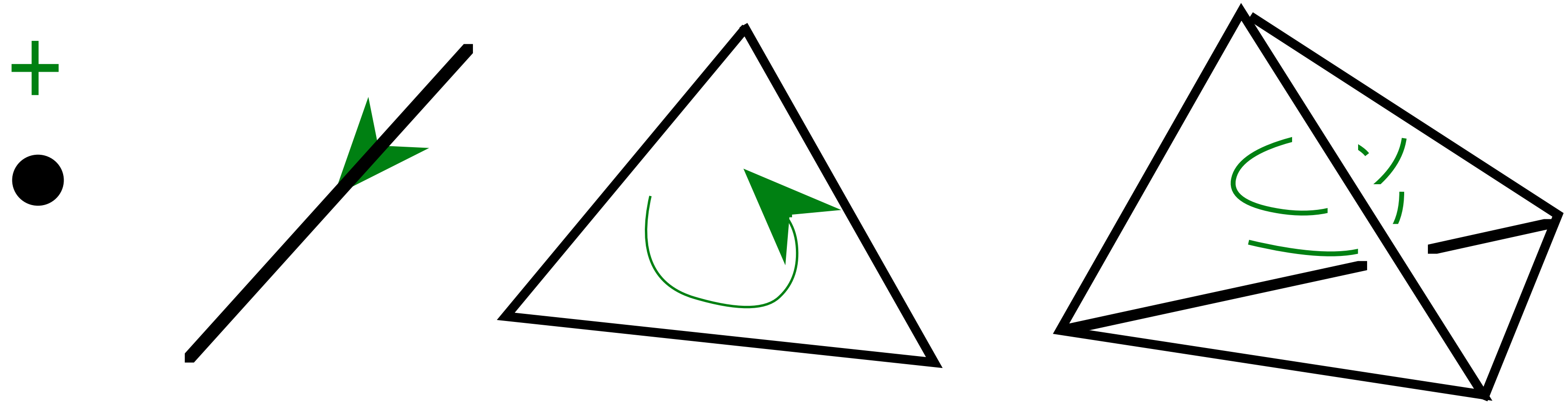
Nice, Congrès AMAM, 13 2 2003

Séoul, CEFC 2004



Bases can be chosen so as to have ...

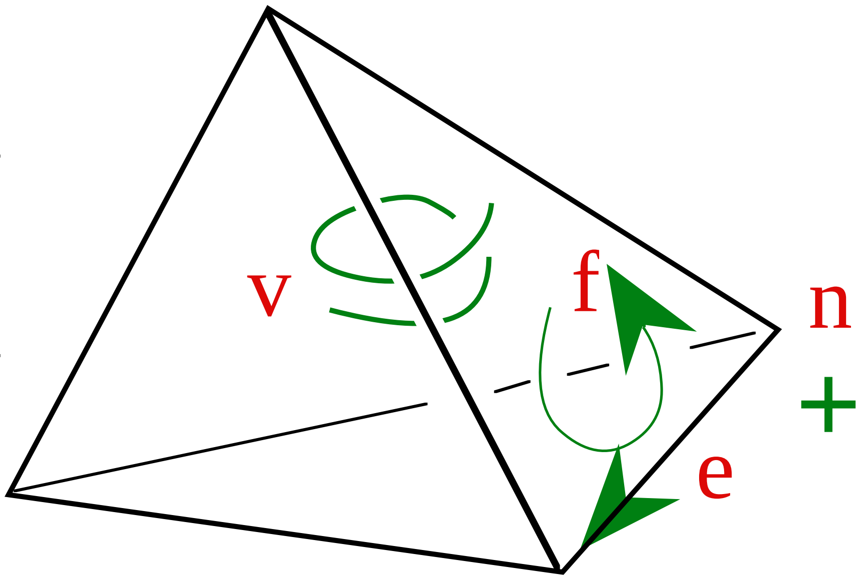

m
n
vector space
X
A
Y
vector space
select basis
select basis
X̄
Ā
Ȳ
space of
m-arrays
m columns
space of
n-arrays
Ā
range
0
1
0
0
k
= rank
kernel



$$\bar{\partial}_{en} = -1$$

$$\bar{\partial}_{fe} = -1$$

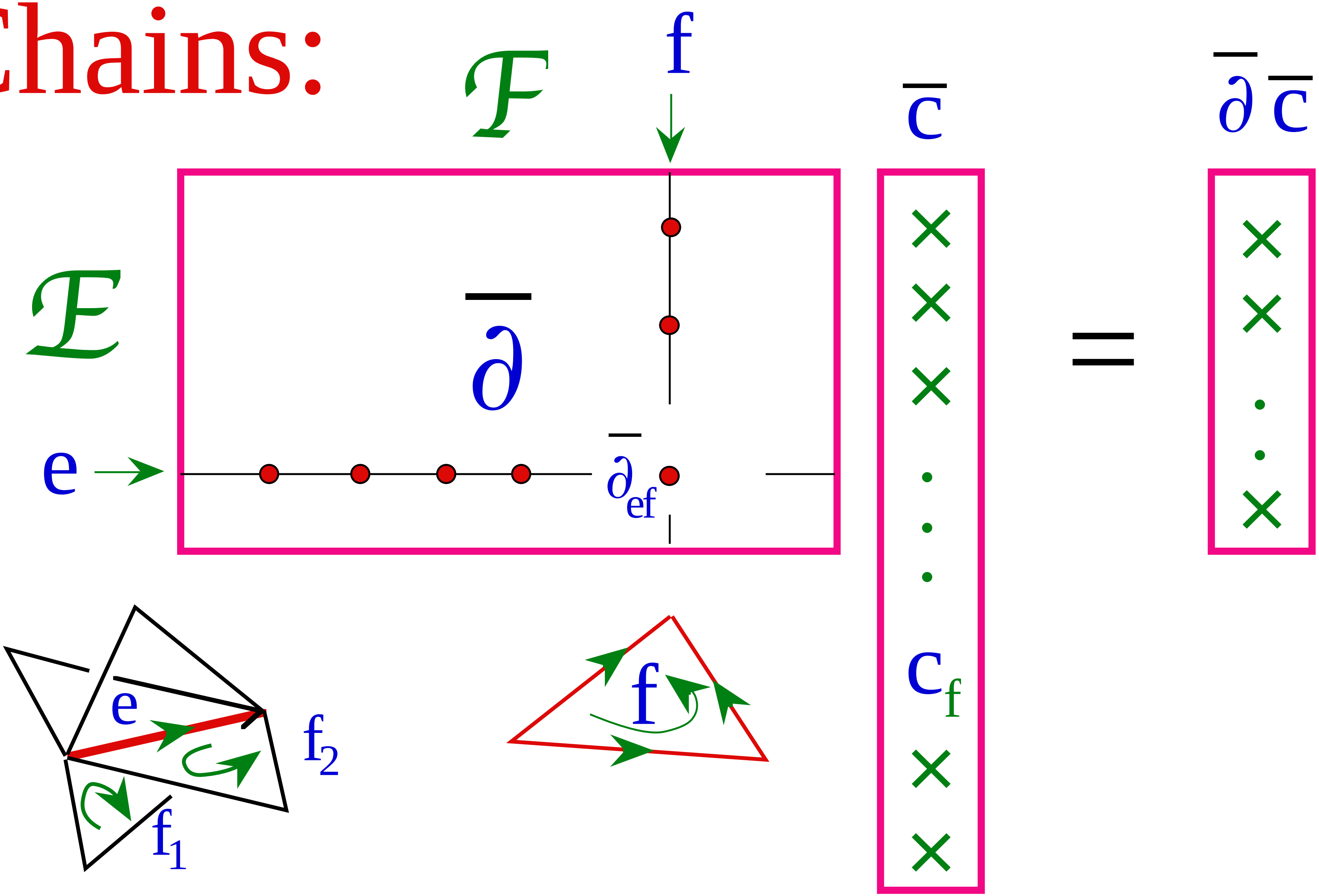
$$\bar{\partial}_{vf} = 1$$



$$\bar{\partial}^{\,p-1}\,\bar{\partial}^{\,p} = 0$$

$$\partial f = \sum_e \bar{\partial}_{ef}\, e$$

Chains:



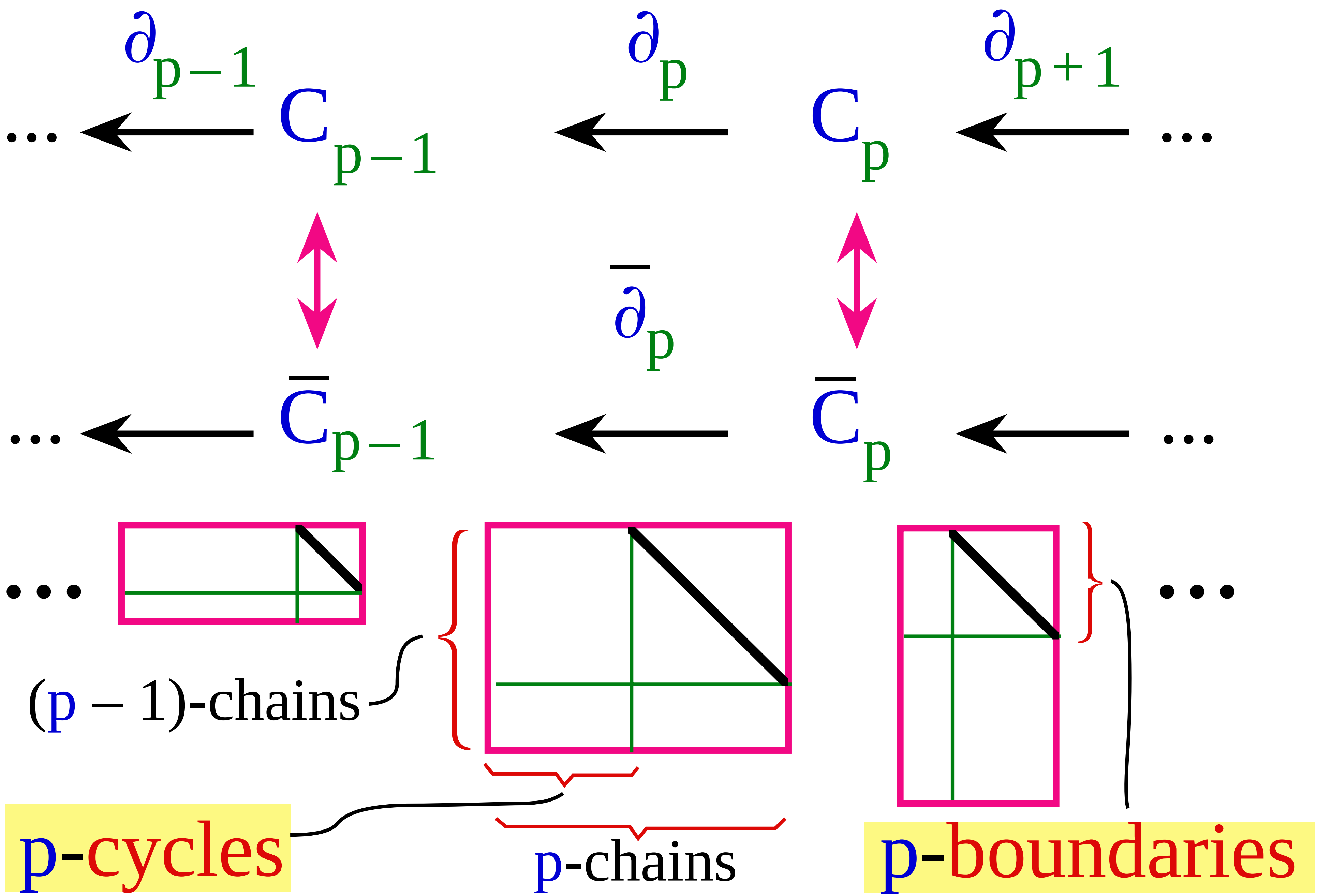
$$\partial\left(\sum_f \; c_f \; f\right) = \sum_e \left(\bar{\partial}\,\bar{c}\right)_e e$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdots & C_{p-1} \arrow[l, "\partial_{p-1}"'] \arrow[d, leftrightarrow] & C_p \arrow[l, "\partial_p"'] \arrow[d, leftrightarrow] & \cdots \arrow[l, "\partial_{p+1}"'] \\
\cdots & \bar{C}_{p-1} \arrow[l] & \bar{C}_p \arrow[l, "\bar{\partial}_p"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

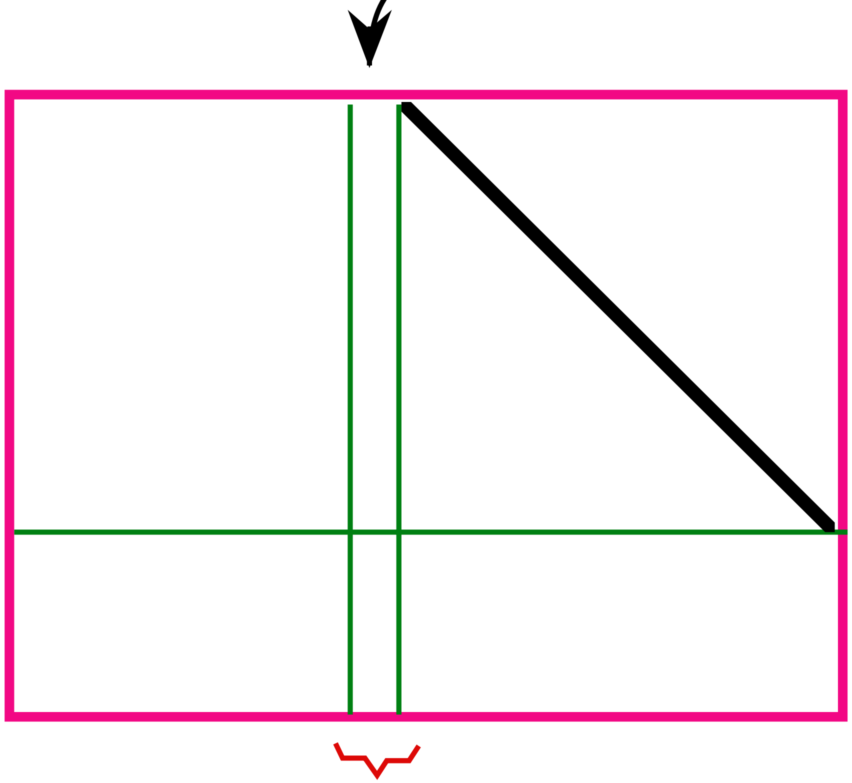
Change of basis can be viewed as chain map.

Find one that makes homology classes stand out:

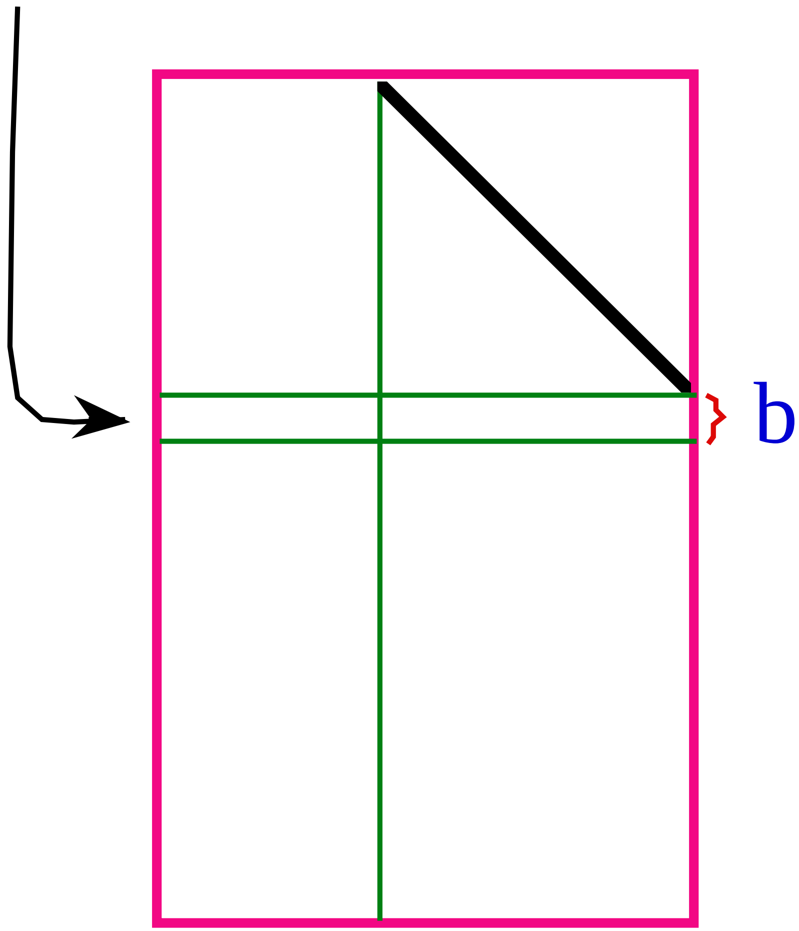
H.J.S. Smith: ***Collected papers,*** *Chelsea, 1979, pp. 367-seq. S. Lang:* ***Algebra,*** *1974.*

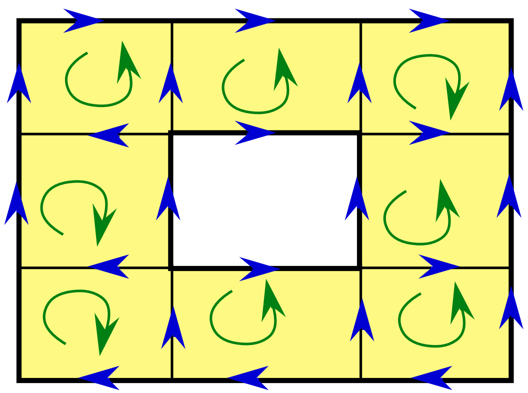


homology cycles

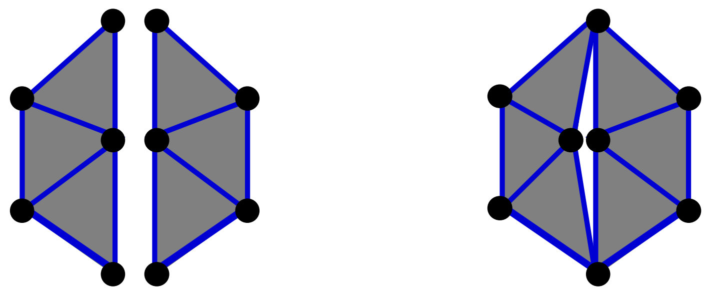


dimension b





b: Betti numbers



Application: Detect defects (eg., holes) in meshes

Finite element meshes, which may contain millions of elements, are often built by stitching meshes of subparts together. This process is prone to generate defects (spurious holes and/or loops) that can't easily be detected by inspection.

Putting the complex of incidence matrices in Smith normal form gives an algebraic way to check such meshes for defects. (Restrict to unimodular transforms to avoid rounding errors.)

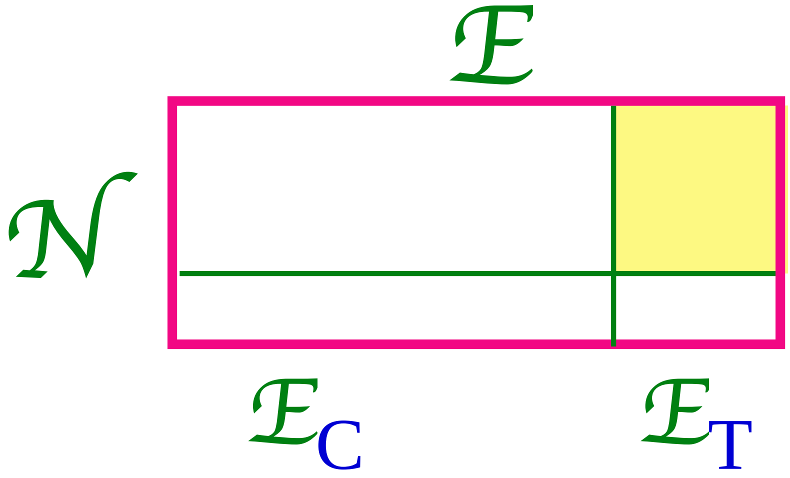
J. Dumas, B. Saunders, G. Villard: "Integer Smith forms via the valence: experience with large sparse matrices from homology", **Proc. ACM Int. Symp. on Symb. & Alg. Computation,** August 6-9, 2000.

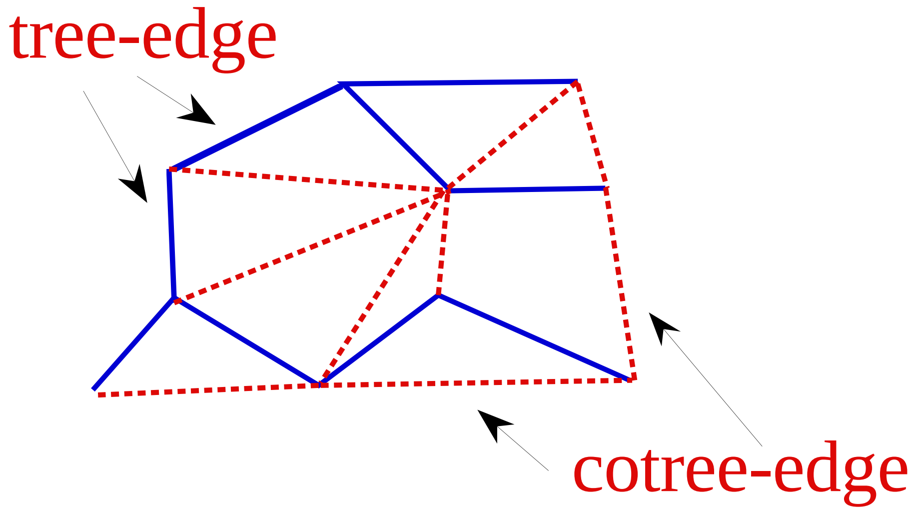
S. Suuriniemi: **Homological Computations in Electromagnetic Modeling,** Tampere U. of Technology (Dr. Techn.), 24 Sept. 2004.

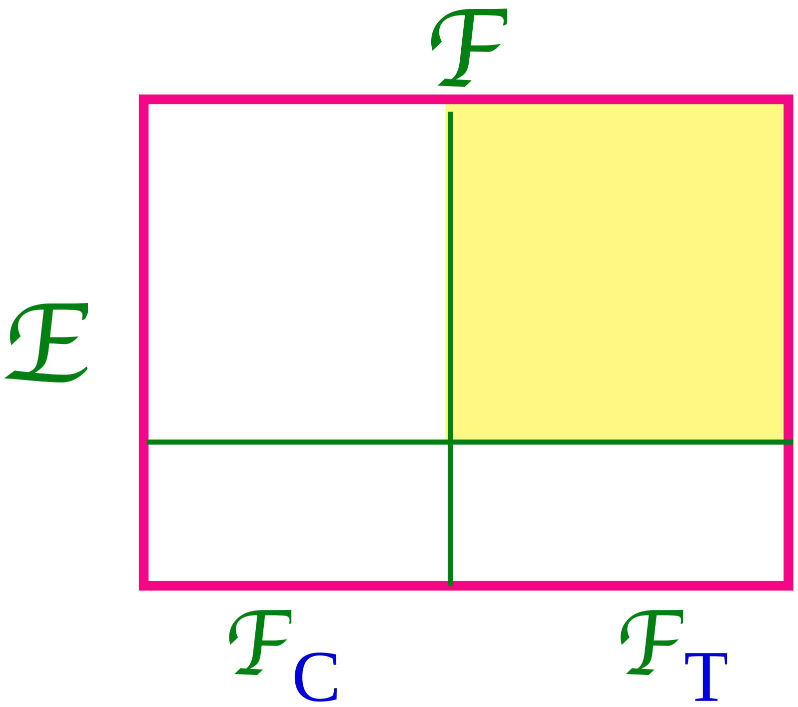
http://www.math.tut.fi/matematiikanpaivat06/presentation/suuriniemi.pdf

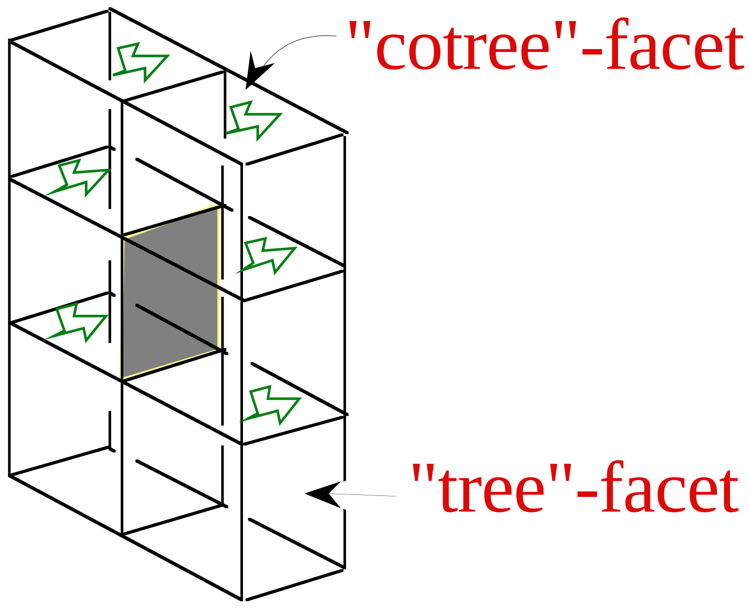
Smith normal also useful to generalize "tree-cotree" methods:

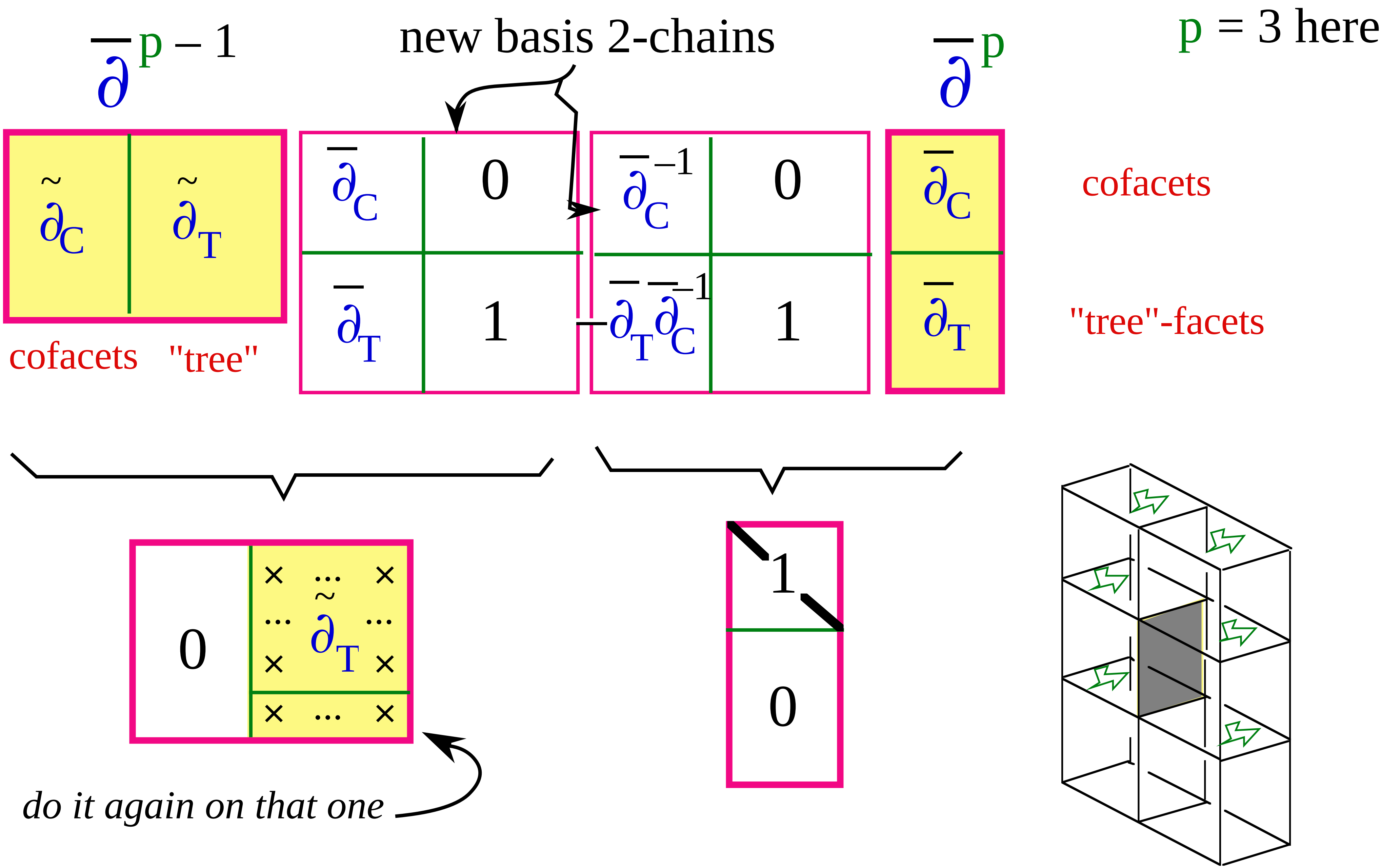
The notion of "tree"



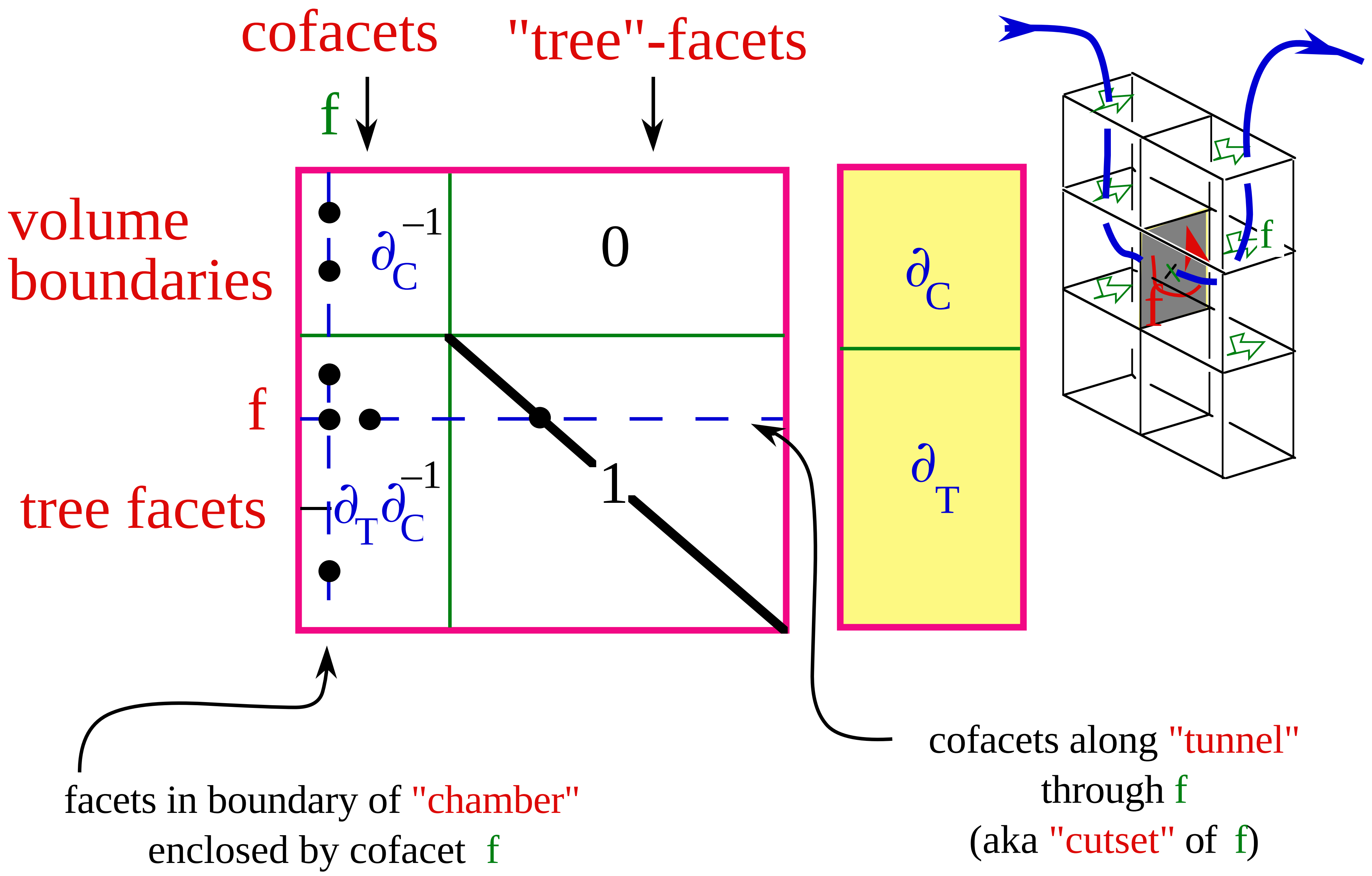






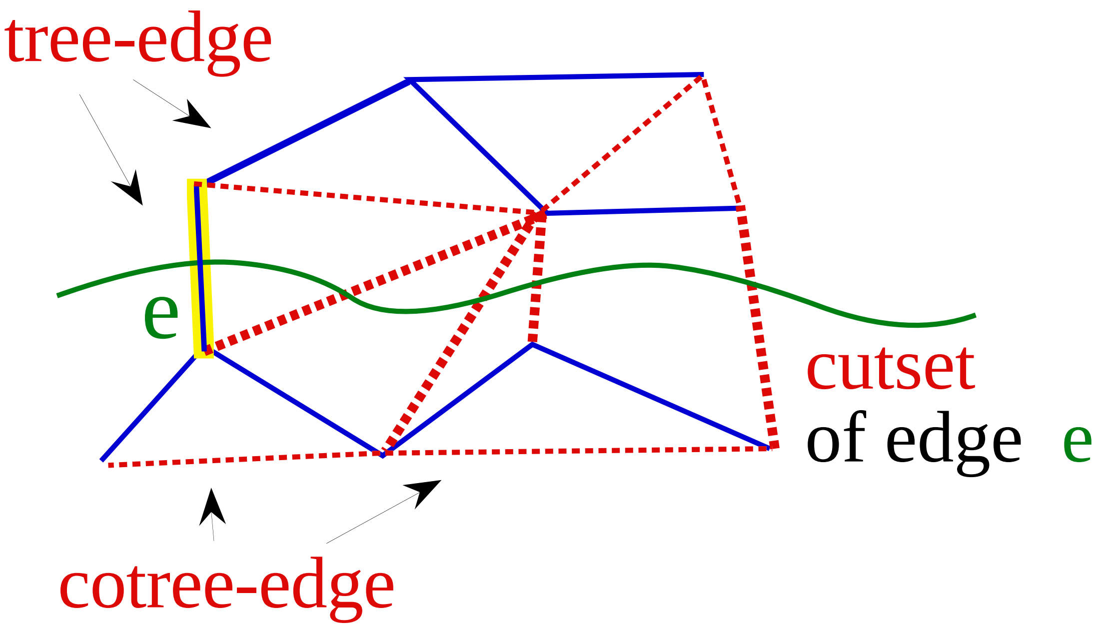


New basis: "tree" facets + ∂v (bdries of volumes)

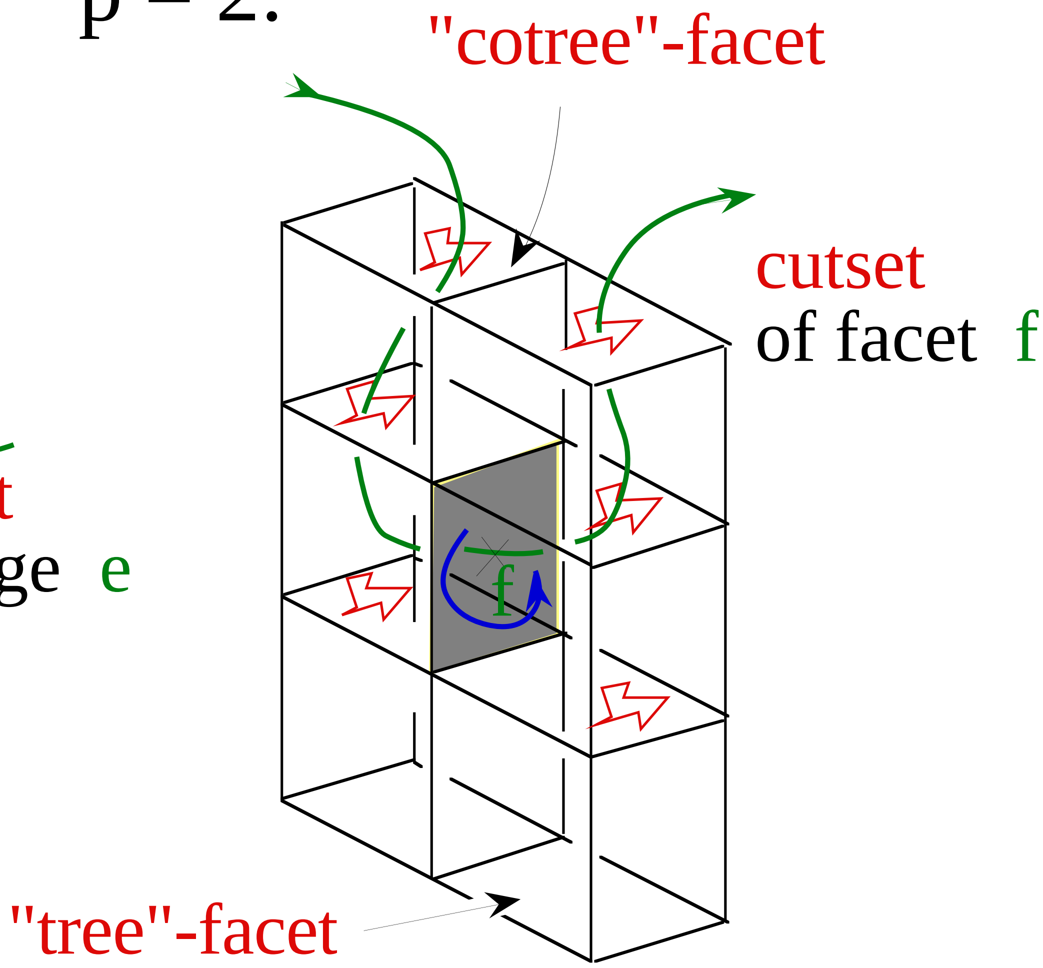

cofacets
"tree"-facets
f
volume
boundaries
∂_C^{-1}
0
f
1
tree facets
$-\partial_T\partial_C^{-1}$
∂_C
∂_T
f
f
facets in boundary of "chamber"
enclosed by cofacet f
cofacets along "tunnel"
through f
(aka "cutset" of f)

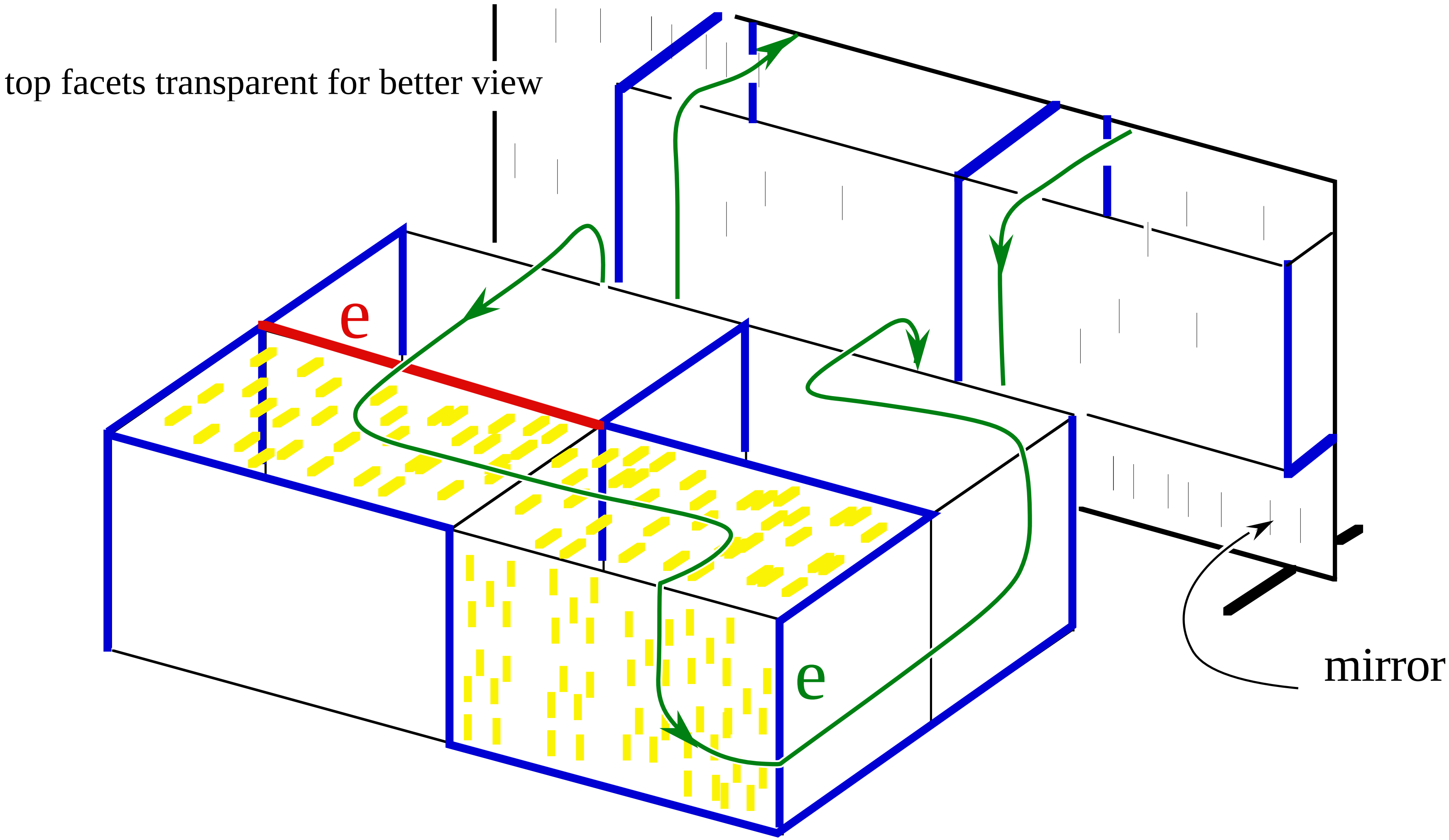
The notion of "cutset"

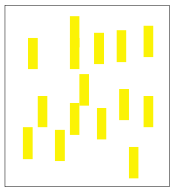
p = 1:

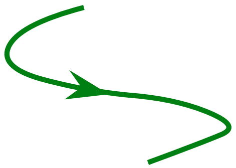


p = 2:





 "chamber" (polyhedral surface) of coedge e

 "tunnel" (now more properly called "cutset") for tree-edge e

Useful insight on Whitney forms can then be obtained by duality:

The dual side ("cohomology")

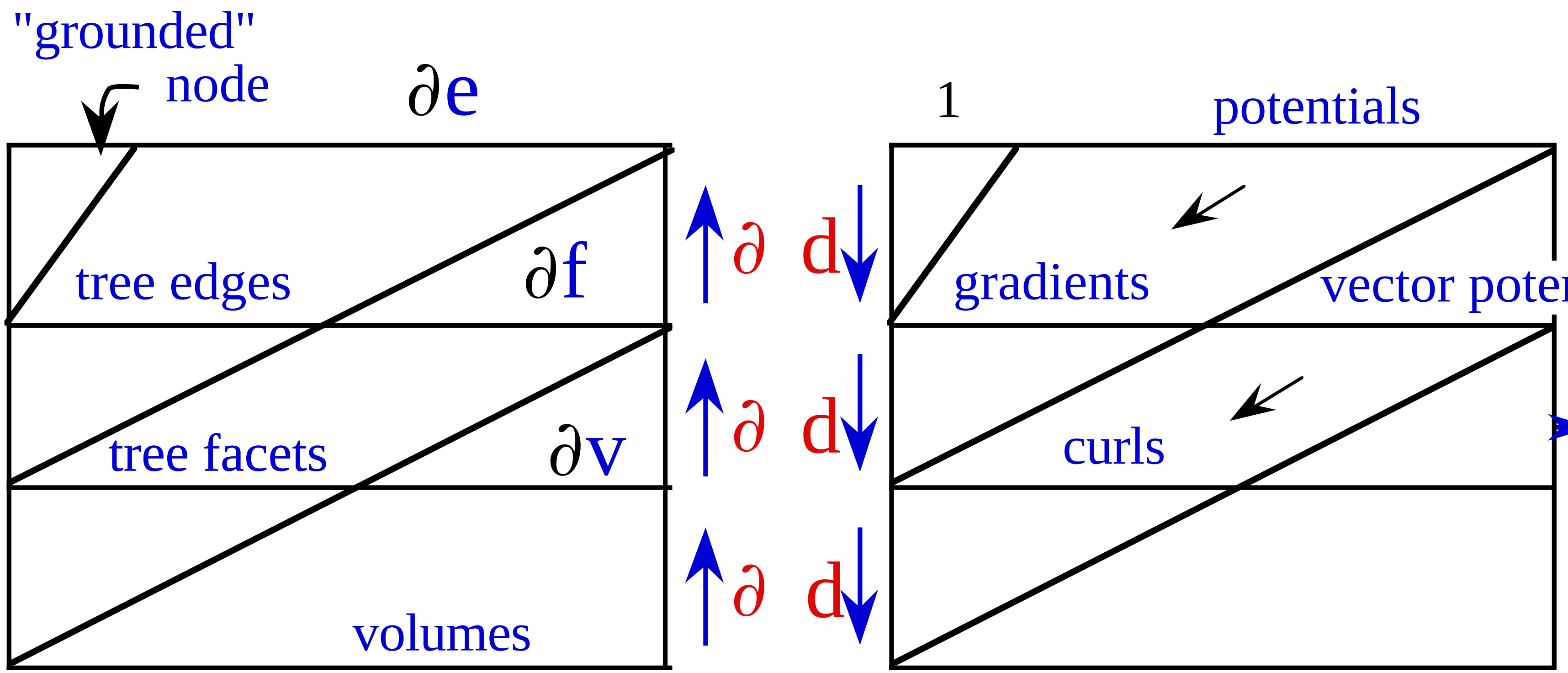
Cochains: Linear maps of *CHAIN* $\rightarrow$ *REAL* type

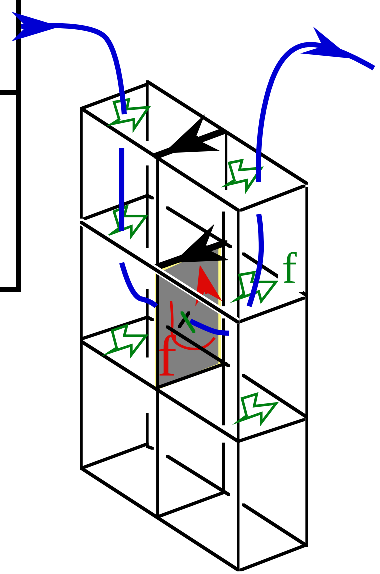
$$\text{Cochains} \xrightarrow[\text{Whitney forms}]{\text{via}} \text{differential forms}$$

In natural basis: cochain ~ 1 DoF per cell

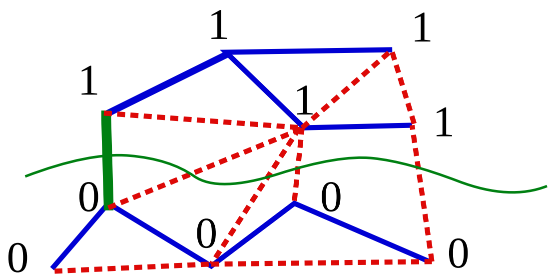
$$\int_e w^{e'} = \textbf{if } e = e' \textbf{ then } 1 \textbf{ else } 0$$

What about the dual basis (and associated vector fields) in the new system?

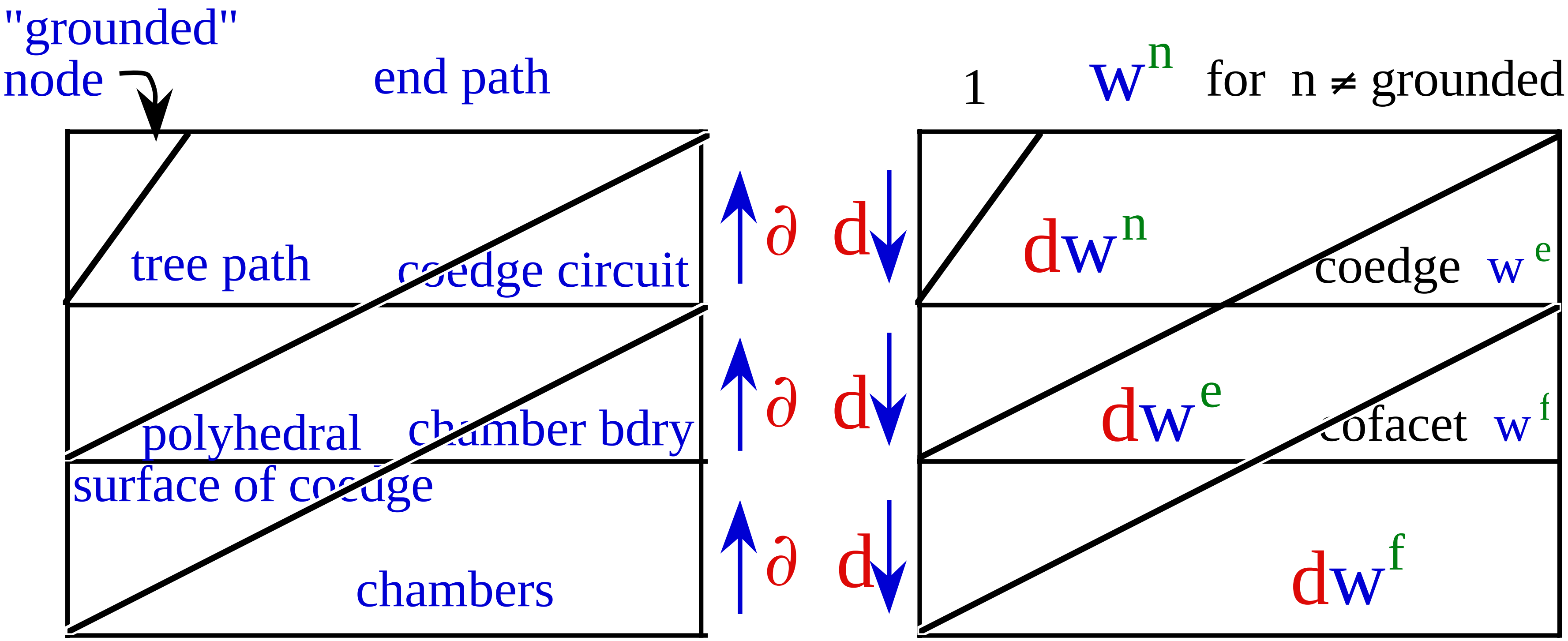




(nested trees)



What if homology of dual network is worked out?



alternative Smith form

(work from $p = 0$ upwards)

and much,
much more ...

(provisional) Conclusions

- very simple algebra
- profusely complex geometry
- only scratched the surface there (trivial topology)
- lots left to do!