Factorisation et décomposition des systèmes fonctionnels linéaires

Applications en physique mathématique et en automatique

Alban Quadrat

INRIA Sophia Antipolis, Projet APICS,

2004 route des lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis cedex, France.

`www-sop.inria.fr/cafe/Alban.Quadrat/index.html`

en collaboration avec

Thomas Cluzeau

ENSIL - Parc Ester Technopole

16 rue d'Atlantis, 87068 Limoges, France.

`cluzeau@ensil.unilim.fr`

CNAM, Paris 18/09/07

Simplification des systèmes fonctionnels linéaires

- But de l'exposé:

Comment utiliser les méthodes algébriques et de calcul formel pour simplifier les systèmes apparaissant en physique mathématique et en automatique?

- Intérêts d'un pré-conditionnement algébrique:
  - Simplification des équations du système
    $\Rightarrow$ simplification de l'étude des propriétés structurelles.
  - Découplage des équations du système
    $\Rightarrow$ intégration symbolique sous forme close.
    $\Rightarrow$ analyse numérique.

Au commencement: une histoire de notations!

- Newton: Le calcul des fluxions (1666)

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) + \frac{g}{l}\, x_1(t) - \frac{g}{l}\, u(t) = 0, \\ \ddot{x}_2(t) + \frac{g}{l}\, x_2(t) - \frac{g}{l}\, u(t) = 0. \end{cases}$$

- Leibniz: Le calcul infinitésimal (1676)

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \frac{g}{l}\, x_1(t) - \frac{g}{l}\, u(t) = 0, \\ \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \frac{g}{l}\, x_2(t) - \frac{g}{l}\, u(t) = 0. \end{cases}$$

- Boole: Le calcul opérationnel (1859-60)

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{g}{l} & 0 & -\frac{g}{l} \\ 0 & \frac{d^2}{dt^2} + \frac{g}{l} & -\frac{g}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = 0.$$

$\Rightarrow$ anneau d'opérateurs différentiels $D = \mathbb{Q}(g, l) \left[\frac{d}{dt}\right]$:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{d}{dt}\right)^i \in D, \quad a_i \in \mathbb{Q}(g, l), \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^i = \frac{d}{dt} \circ \ldots \circ \frac{d}{dt} = \frac{d^i}{dt^i}.$$

Forme canonique de Smith

- $D = k[s]$, k corps (e.g., $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$): anneau euclidien.
- Théorème: $\forall\ R \in D^{q \times p}$, $\exists\ V \in \mathrm{GL}_q(D)$, $U \in \mathrm{GL}_p(D)$:

$$\overline{R} = V\,R\,U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

où $\alpha_1 \,|\, \alpha_2 \,|\, \dots \,|\, \alpha_r \neq 0$ et $\alpha_i \in D$, $i = 1, \dots, r$.

- Les facteurs invariants $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont définis par:

$$\alpha_i = \frac{\mathrm{pgcd}(\text{mineurs}\, i \times i \,\text{de}\, R)}{\mathrm{pgcd}(\text{mineurs}\, (i-1) \times (i-1) \,\text{de}\, R)}.$$

Exemple

- Considérons le système d'équations différentielles suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} \ddot{y}_1(t) + \ddot{y}_2(t) - 2\, y_2(t) = 0, \\ \ddot{y}_1(t) + y_1(t) + \ddot{y}_2(t) - 3\, y_2(t) = 0. \end{array}\right.$$

- Considérons l'anneau euclidien $D = \mathbb{Q}\,[\partial]$, avec $\partial = \dfrac{d}{dt}$.
- La matrice d'opérateur du système est:

$$R = \left(\begin{array}{cc} \partial^2 & \partial^2 - 2 \\ \partial^2 + 1 & \partial^2 - 3 \end{array}\right) \in D^{2\times 2}.$$

- La forme de Smith de R est définie par:

$$\left(\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ \frac{1}{2}\,(\partial^2 + 1) & -\frac{1}{2}\,\partial^2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} \partial^2 & \partial^2 - 2 \\ \partial^2 + 1 & \partial^2 - 3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \partial^2 - 1 \end{array}\right).$$

Exemple

- L'intégration du système défini par R

$$\left\{\begin{array}{l} \ddot{y}_1(t) + \ddot{y}_2(t) - 2\, y_2(t) = 0, \\ \ddot{y}_1(t) + y_1(t) + \ddot{y}_2(t) - 3\, y_2(t) = 0, \end{array}\right.$$

est équivalent à l'intégration du système défini par $\overline{R} = V\, R\, U$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \partial^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z_1(t) = 0, \\ z_2(t) = A\, e^t + B\, e^{-t}, \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A\, e^t + B\, e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\, e^t + B\, e^{-t} \\ A\, e^t + B\, e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Exemple

- Considérons 2 pendules de même taille montés sur un mobile:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) + \alpha\, x_1(t) - \alpha\, u(t) = 0, \\ \ddot{x}_2(t) + \alpha\, x_2(t) - \alpha\, u(t) = 0, \end{cases} \qquad \alpha = \frac{g}{l}.$$

- Considérons l'anneau euclidien $D = \mathbb{Q}(\alpha)\,[\partial]$, avec $\partial = \dfrac{d}{dt}$.
- Nous avons la forme de Smith suivante:

$$\begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^2+\alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & \partial^2+\alpha & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \partial^2+\alpha \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial^2+\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple

- L'intégration du système $\overline{R}\, y(t) = 0$ donne alors:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial^2 + \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} y_1(t) = & 0, \\ y_2(t) = & A \cos(\sqrt{\alpha}\, t) \\ & +B \sin(\sqrt{\alpha}\, t), \\ y_3(t) & \text{libre.} \end{array} \right.$$

- Les solutions du système sont alors (paramétrisation de Monge):

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \partial^2 + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A \cos(\sqrt{\alpha}\, t) + B \sin(\sqrt{\alpha}\, t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_3(t) \\ A \cos(\sqrt{\alpha}\, t) + B \sin(\sqrt{\alpha}\, t) + y_3(t) \\ \ddot{y}_3(t) + \alpha\, y_3(t) \end{pmatrix}.$$

Forme canonique de Jacobson

- $D = K\left[\frac{d}{dt}\right]$, K corps différentiel (e.g., $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(t)$, $\mathcal{M}$).
- D est un anneau euclidien à gauche:

$$\frac{d}{dt}\,(a(t)\,y(t)) = a(t)\,\frac{d}{dt}(y(t)) + \dot{a}(t)\,y(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\,a\cdot = a\,\frac{d}{dt}\,\cdot + \dot{a}\,\cdot.$$

- Théorème: $\forall\, R \in D^{q\times p}, \quad \exists\, V \in \mathrm{GL}_q(D), \quad \exists\, U \in \mathrm{GL}_p(D)$:

$$\overline{R} = V\,R\,U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 \,|\, \alpha_2 \,|\, \dots \,|\, \alpha_r \neq 0.$$

Exemple

- Considérons le système linéaire variant dans le temps:

$$\left\{ \begin{array}{l} t\,\dot y_1(t) - y_1(t) - t^2\,\dot y_2(t) = 0, \\ \dot y_1(t) + t\,\dot y_2(t) - y_2(t) = 0. \end{array} \right.$$

- Considérons l'anneau non-commutatif $D = \mathbb{Q}(t)\,[\partial]$, $\partial = \dfrac{d}{dt}$.

$$\left(\begin{array}{cc} -1 & t\,\partial \\ -\dfrac{1}{2\,t}\,\partial & \dfrac{1}{2}\,\partial \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} t\,\partial - 1 & -t^2\,\partial \\ \partial & t\,\partial - 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & -2\,t^2\,\partial + t \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & (t\,\partial + 1)\,\partial \end{array} \right).$$

$$V^{-1} = \left(\begin{array}{cc} t\,\partial - 1 & -2\,t^2 \\ \partial & -2\,t \end{array} \right), \quad U^{-1} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2\,t^2\,\partial - t \\ 0 & 1 \end{array} \right).$$

- Package JACOBSON de la librairie OREMODULES.

Exemple

- L'intégration du système $\overline{R}\, z(t) = 0$ donne alors:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (t\,\partial + 1)\,\partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} z_1(t) = 0, \\ z_2(t) = A + B\, \ln(t). \end{array} \right.$$

- Les solutions du système $R\, y = 0$ sont alors:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -2\, t^2\, \partial + t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A + B\, \ln(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t\,(B\, \ln(t) + A - 2\, B) \\ A + B\, \ln(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Système de récurrences linéaires

- $D = K[\sigma]$, K corps aux différence (e.g., $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(n)$):

$$\sigma(y(n)) = y(n+1).$$

- D est un anneau euclidien à gauche des opérateurs de décalage:

$$\sigma(a(n)\, y(n)) = a(n+1)\, y(n+1) = \sigma(a(n))\, \sigma(y(n))$$

$$\Rightarrow \sigma(a\, \cdot) = \sigma(a)\, \sigma \cdot$$

- Une forme de Jacobson existe sur D.

$$\left\{ \begin{array}{l} n\, u_{n+1} - u_n - n^2\, v_{n+1} = 0, \\ u_{n+1} - n\, v_{n+1} - v_n = 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc} n\,\sigma - 1 & -n^2\,\sigma \\ \sigma & -n\,\sigma - 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} u_n \\ v_n \end{array} \right) = 0.$$

$$\left(\begin{array}{cc} -1 & n \\ \sigma & -(n+1)\,\sigma + 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} n\,\sigma - 1 & -n^2\,\sigma \\ \sigma & -n\,\sigma - 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & n \\ 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \sigma - 1 \end{array} \right).$$

$$\Rightarrow u_n = C\, n, \quad v_n = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Quid des systèmes fonctionnels généraux?

- Considérons les équations de Dirac suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l} d_4\, y_1 - i\, d_3\, y_3 - (i\, d_1 + d_2)\, y_4 = 0, \\ d_4\, y_2 - (i\, d_1 - d_2)\, y_3 + i\, d_3\, y_4 = 0, \\ i\, d_3\, y_1 + (i\, d_1 + d_2)\, y_2 - d_4\, y_3 = 0, \\ (i\, d_1 - d_2)\, y_1 - i\, d_3\, y_2 - d_4\, y_4 = 0, \end{array}\right. \qquad d_i = \partial/\partial x_i.$$

- Considérons $D = \mathbb{Q}(i)[d_1, d_2, d_3, d_4]$ et la matrice:

$$R = \begin{pmatrix} d_4 & 0 & -i\, d_3 & -(i\, d_1 + d_2) \\ 0 & d_4 & -i\, d_1 + d_2 & i\, d_3 \\ i\, d_3 & i\, d_1 + d_2 & -d_4 & 0 \\ i\, d_1 - d_2 & -i\, d_3 & 0 & -d_4 \end{pmatrix}.$$

- Question: $\exists\ U \in \mathrm{GL}_4(D),\ V \in \mathrm{GL}_4(D)$ telles que:

$$V\, R\, U = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star \end{pmatrix}?$$

Quid des systèmes fonctionnels généraux?

- Approximation linéaire d'un écoulement 2-D stationnaire, rotationnel et isentropique (Courant-Hilbert):

$$\begin{cases} u\,\rho\,\dfrac{\partial\,\omega}{\partial x} + c^2\,\dfrac{\partial\,\sigma}{\partial x} = 0, \\ u\,\rho\,\dfrac{\partial\,\lambda}{\partial x} + c^2\,\dfrac{\partial\,\sigma}{\partial y} = 0, \\ \rho\,\dfrac{\partial\,\omega}{\partial x} + u\,\dfrac{\partial\,\sigma}{\partial x} + \rho\,\dfrac{\partial\,\lambda}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

- Considérons $D = \mathbb{Q}(u, \rho, c)[\partial_x, \partial_y]$ et la matrice:

$$R = \begin{pmatrix} u\,\rho\,\partial_x & c^2\,\partial_x & 0 \\ 0 & c^2\,\partial_y & u\,\rho\,\partial_x \\ \rho\,\partial_x & u\,\partial_x & \rho\,\partial_y \end{pmatrix} \in D^{3\times 3}.$$

- Question: $\exists\ U \in \mathrm{GL}_3(D),\ V \in \mathrm{GL}_3(D)$ telles que:

$$V\,R\,U = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in D?$$

Quid des systèmes fonctionnels généraux?

- Modèle d'un réservoir 1-D contenant un fluide animé d'un mouvement horizontal (Petit-Rouchon, IEEE TAC 02):

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t-2\,h) + \alpha\,\ddot{y}_3(t-h) = 0, \\ \dot{y}_1(t-2\,h) - \dot{y}_2(t) + \alpha\,\ddot{y}_3(t-h) = 0, \end{array}\right. \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad h \in \mathbb{R}_+.$$

- Considérons $D = \mathbb{R}\left[\frac{d}{dt}, \delta\right]$, $\delta(y(t)) = y(t-h)$, et la matrice:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -\frac{d}{dt}\,\delta^2 & \alpha\,\frac{d^2}{dt^2}\,\delta \\ \frac{d}{dt}\,\delta^2 & -\frac{d}{dt} & \alpha\,\frac{d^2}{dt^2}\,\delta \end{pmatrix} \in D^{2\times 3}.$$

- Question: $\exists\ U \in \mathrm{GL}_3(D),\ V \in \mathrm{GL}_2(D)$ telles que:

$$V\,R\,U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in D?$$

Exemples d'algèbres d'Ore

- Opérateurs différentiels: $A = \mathbb{Q},\ \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n],\ \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$,

$$D = A[\partial_1, \dots, \partial_n], \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$P = \sum_{0 \leq |\mu| \leq m} a_\mu(x)\, \partial^\mu \in D, \quad \partial^\mu = \partial_1^{\mu_1} \dots \partial_n^{\mu_n}, \quad a_\mu \in A.$$

- Opérateurs de décalage:

$$D = A[\sigma], \quad A = \mathbb{Q},\ \mathbb{Q}[n],\ \mathbb{Q}(n),$$

$$P = \sum_{i=0}^m a_i(n)\, \sigma^i \in D, \quad \sigma(a(n)) = a(n+1).$$

- Opérateurs différentiels à retard:

$$D = A[\tfrac{d}{dt}, \delta], \quad A = \mathbb{Q},\ \mathbb{Q}[t],\ \mathbb{Q}(t),$$

$$P = \sum_{0 \leq i+j \leq m} a_{ij}(t)\, \frac{d^i}{dt^i}\, \delta^j \in D, \quad \delta(a(t)) = a(t-h).$$

- Théorème: Pour tout ordre monomial, il existe une base de Gröbner qui peut être calculée par l'algorithme de Buchberger.

Problèmes de factorisation et décomposition

- Soit D une algèbre d'Ore d'opérateurs fonctionnels.
- Soit $R \in D^{q \times p}$ une matrice.
- Questions:

1. $\exists \, R_1 \in D^{r \times p}, \; R_2 \in D^{q \times r} : \quad R = R_2 \, R_1$?
2. $\exists \, W \in \mathrm{GL}_p(D), \; V \in \mathrm{GL}_q(D)$ t.q. $V \, R \, W = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix}$?
3. $\exists \, W \in \mathrm{GL}_p(D), \; V \in \mathrm{GL}_q(D)$ t.q. $V \, R \, W = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix}$?

Théorie des systèmes par l'analyse algébrique

- Considérons une algèbre de Ore D d'opérateurs fonctionnels.
- Considérons une matrice $R \in D^{q \times p}$.
- Soit $\mathcal{F}$ un espace fonctionnel possédant la propriété suivante

$$\forall\, a_1,\ a_2 \in D, \quad \forall\, f_1,\ f_2 \in \mathcal{F} : \quad a_1\, f_1 + a_2\, f_2 \in \mathcal{F}.$$

c-à-d, $\mathcal{F}$ est un D-module à gauche.

- Le système est défini par:

$$\ker_{\mathcal{F}}(R.) = \{\eta \in \mathcal{F}^p \mid R\, \eta = 0\}.$$

- Exemple: Soient $D = \mathbb{R}\left[\frac{d}{dt}\right]$, $R = \left(\frac{d}{dt}\, I_n - A\right) \in D^{n \times n}$ et $\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R}_+)$. Alors, nous avons:

$$\ker_{\mathcal{F}}(R.) = \{x \in \mathcal{F}^n \mid \dot{x}(t) - A\, x(t) = 0\}.$$

Théorie des systèmes par l'analyse algébrique

- On aimerait faire de l'algèbre linéaire sur la matrice R

$\Rightarrow$ étude par la théorie des modules du D-module à gauche:

$$M = D^{1\times p}/(D^{1\times q}\, R).$$

On réduit à zéro les combinations D-linéaires des lignes de R.

- Exemple: $D = \mathbb{R}\left[\frac{d}{dt}\right]$, $R = \left(\frac{d}{dt}\, I_n - A\right) \in D^{n\times n}$,

$$M = D^{1\times n)}/(D^{1\times n}\, R).$$

- Exemples en théorie des nombres & géométrie algébrique:

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2+1), \quad \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \mathbb{Z}[x]/(x^2+5),$$

$$A = \mathbb{Q}[x,y]/(x^2+y^2-1, y-x).$$

- $\hom_D(M, \mathcal{F})$: groupe des applications D-linéaires de M dans $\mathcal{F}$.
- Théorème de Malgrange: Nous avons $\ker_{\mathcal{F}}(R.) \cong \hom_D(M, \mathcal{F})$.

Exemple: équations de Beltrami

- Considérons les équations de Beltrami suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} - x\,\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} + x\,\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{array}\right. \qquad (\star)$$

- Considérons l'algèbre de Weyl $D = \mathbb{Q}[x, y][\partial_x, \partial_y]$ et la matrice du système $(\star)$:

$$R = \begin{pmatrix} \partial_x & -x\,\partial_y \\ \partial_y & x\,\partial_x \end{pmatrix} \in D^{2\times 2}.$$

Si $\mathcal{F}$ est un D-module à gauche (e.g., $\mathcal{F} = C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$), nous avons

$$\ker_{\mathcal{F}}(R.) = \{z = (u \quad v)^T \in \mathcal{F}^2 \mid R\,z = 0\} \cong \hom_D(M, \mathcal{F}),$$

où M est le D-module à gauche $M = D^{1\times 2}/(D^{1\times 2}\,R)$.

Transformations de Galois des systèmes

- Considérons un autre système $\ker_{\mathcal{F}}(R'.)$ avec $R' \in D^{q' \times p'}$.

Comment envoyer un élément de $\ker_{\mathcal{F}}(R'.)$ sur un élément de $\ker_{\mathcal{F}}(R.)$?

- Soient $M = D^{1\times p}/(D^{1\times q}\, R)$ et $M' = D^{1\times p'}/(D^{1\times q'}\, R')$.
- Ce problème revient au calcul du groupe $\hom_D(M, M')$.
- Théorème: $f \in \hom_D(M, M')$ est entièrement défini par la donnée de $P \in D^{p\times p'}$ et $Q \in D^{q\times q'}$ satisfaisant la relation:

$$R\, P = Q\, R'.$$

- Vérification: $R'\,\zeta = 0 \Rightarrow R\,(P\,\zeta) = Q\,(R'\,\zeta) = 0.$
- Exemple: $D = K\left[\frac{d}{dt}\right]$, $R = \left(\frac{d}{dt}\, I_n - A(t)\right)$, $R' = \left(\frac{d}{dt}\, I_n - A'(t)\right)$,

$$\hom_D(M, M') = \{P = Q \in K^{n\times n} \mid \dot{P}(t) = A(t)\, P(t) - P(t)\, A'(t)\}.$$

Calcul de $\hom_D(M, M')$

- Nous considérons un anneau D commutatif.
- Définition: Le produit de Kronecker de $E \in D^{q\times p}$ par $F \in D^{r\times s}$:

$$E \otimes F = \begin{pmatrix} E_{11}\, F & \dots & E_{1p}\, F \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{q1}\, F & \dots & E_{qp}\, F \end{pmatrix} \in D^{(q\,r)\times(p\,s)}.$$

- Lemme: Soient $U \in D^{a\times b}$, $V \in D^{b\times c}$ et $W \in D^{c\times d}$.

$$U\, V\, W = (V_1 \dots V_b)\,(U^T \otimes W).$$

- $R\, P\, I_{p'} = (P_1 \dots P_p)\,(R^T \otimes I_{p'})$, $I_q\, Q\, R' = (Q_1 \dots Q_q)\,(I_q \otimes R')$.

Le calcul de $R\, P = Q\, R'$ se réduit alors au calcul de

$$\ker_D\left(.\begin{pmatrix} R^T \otimes I_{p'} \\ -I_q \otimes R' \end{pmatrix}\right)$$

par bases de Gröbner $\Rightarrow$ générateurs & relations de $\hom_D(M, M')$.

Exemple de l'écoulement 2-D isentropique

- Considérons $D = \mathbb{Q}(u, \rho, c)[\partial_x, \partial_y]$ et la matrice du système:

$$R = \begin{pmatrix} u\,\rho\,\partial_x & c^2\,\partial_x & 0 \\ 0 & c^2\,\partial_y & u\,\rho\,\partial_x \\ \rho\,\partial_x & u\,\partial_x & \rho\,\partial_y \end{pmatrix} \in D^{3\times 3}.$$

- Soit $M = D^{1\times 3}/(D^{1\times 3}\,R)$. Le D-module $\mathrm{end}_D(M)$ est défini par:

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & c^2\,\alpha_2 & c^2\,u\,\rho\,\alpha_3 \\ 0 & \alpha_1 - u\,\rho\,\alpha_2 & -u^2\,\rho^2\alpha_3 \\ 0 & -c^2\,(u^2 - c^2)\,\alpha_3 & \alpha_1 - u\,\rho\,\alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$Q_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ c^2\,u\,\rho\,\alpha_3 & \alpha_1 - u\,\rho\,\alpha_2 & -c^2\,u^2\,\rho\,\alpha_3 \\ \rho\,\alpha_2 & -\rho\,(u^2 - c^2)\,\alpha_3 & \alpha_1 - \alpha_2\,u\,\rho \end{pmatrix},$$

avec α_1, α_2 et α_3 des éléments arbitraires de D.

Exemple d'un réservoir (Dubois-Petit-Rouchon, ECC99)

- Considérons l'anneau $D = \mathbb{Q}\left[\frac{d}{dt}, \delta\right]$ des opérateurs différentiels à retard et la matrice du système:

$$R = \begin{pmatrix} \delta^2 & 1 & -2\,\frac{d}{dt}\,\delta \\ 1 & \delta^2 & -2\,\frac{d}{dt}\,\delta \end{pmatrix} \in D^{2\times 3}.$$

- Soit $M = D^{1\times 3}/(D^{1\times 2}\,R)$. Le D-module $\mathrm{end}_D(M)$ est défini par:

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 2\,\alpha_3\,\frac{d}{dt}\,\delta \\ \alpha_2 + 2\,\alpha_4\,\frac{d}{dt} + 2\,\alpha_5\,\frac{d}{dt}\,\delta & \alpha_1 - 2\,\alpha_4\,\frac{d}{dt} - 2\,\alpha_5\,\frac{d}{dt}\,\delta & 2\,\alpha_3\,\frac{d}{dt}\,\delta \\ \alpha_4\,\delta + \alpha_5 & -\alpha_4\,\delta - \alpha_5 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\,(\delta^2 + 1) \end{pmatrix},$$

$$Q_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\,\alpha_4\,\frac{d}{dt} & \alpha_2 + 2\,\alpha_4\,\frac{d}{dt} \\ \alpha_2 + 2\,\alpha_5\,\frac{d}{dt}\,\delta & \alpha_1 - 2\,\alpha_5\,\frac{d}{dt}\,\delta \end{pmatrix}, \quad \forall\,\alpha_i \in D,\ i = 1, \ldots, 5.$$

Equations de Beltrami

- Soient $D = \mathbb{Q}[x, y][\partial_x, \partial_y]$ et $M = D^{1\times 2}/(D^{1\times 2}\, R)$, où:

$$R = \begin{pmatrix} \partial_x & -x\,\partial_y \\ \partial_y & x\,\partial_x \end{pmatrix} \in D^{2\times 2}.$$

  - $\mathrm{end}_D(M)_{0,1}$ est défini par $P = Q = a\, I_2$, $a \in \mathbb{Q}$.
  - $\mathrm{end}_D(M)_{1,0}$ est défini par ($a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$):

$$P = Q = \begin{pmatrix} a_1 + a_2\,\partial_y & 0 \\ 0 & a_1 + a_2\,\partial_y \end{pmatrix}.$$

  - $\mathrm{end}_D(M)_{1,1}$ est défini par ($a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}$):

$$P = \begin{pmatrix} a_3\,(y\,\partial_y + x\,\partial_x - 1) + a_2\,\partial_y + a_1 & 0 \\ -a_3\,\partial_y & a_3\,y\,\partial_y + a_2\,\partial_y + a_1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} a_3\,(y\,\partial_y + x\,\partial_x) + a_2\,\partial_y + a_1 & a_3\,x\,\partial_y \\ 0 & a_2\,\partial_y + a_3\,y\,\partial_y + a_1 \end{pmatrix}.$$

Equations de Beltrami

- Une solution sous forme fermée des équations de Beltrami:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= C_1\, x\, \mathrm{BesselJ}\left(1, \sqrt{-\alpha}\, x\right) C_3 \sin\left(\sqrt{\alpha}\, y\right) \\ &\quad + C_1\, x\, \mathrm{BesselJ}\left(1, \sqrt{-\alpha}\, x\right) C_4 \cos\left(\sqrt{\alpha}\, y\right) \\ &\quad + C_2\, x\, \mathrm{BesselY}\left(1, \sqrt{-\alpha}\, x\right) C_3 \sin\left(\sqrt{\alpha}\, y\right) \\ &\quad + C_2\, x\, \mathrm{BesselY}\left(1, \sqrt{-\alpha}\, x\right) C_4 \cos\left(\sqrt{\alpha}\, y\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \frac{\sqrt{\alpha}\left(C_3 \cos\left(\sqrt{\alpha}\, y\right) - C_4 \sin\left(\sqrt{\alpha}\, y\right)\right)}{\sqrt{-\alpha}} \\ &\quad \frac{\left(\mathrm{BesselJ}\left(0, \sqrt{-\alpha}\, x\right) C_1 + C_2\, \mathrm{BesselY}\left(0, \sqrt{-\alpha}\, x\right)\right)}{\sqrt{-\alpha}} + C_5, \end{aligned}$$

où $\mathrm{BesselJ}(v,x)$ et $\mathrm{BesselY}(v,x)$ sont les solutions fondamentales:

$$x^2\, \ddot{z}(x) + x\, \dot{z}(x) + (x^2 - v^2)\, z(x) = 0.$$

- $(\overline{u} \quad \overline{v})^T = P\,(u \quad v)^T$ est une autre solution des équations de Beltrami.

Factorisation

- Considérons une algèbre de Ore D, une matrice $R \in D^{q \times p}$ et le D-module à gauche $M = D^{1 \times p}/(D^{1 \times q}\, R)$.

- Théorème: A tout $f \in \mathrm{end}_D(M)$ non-injectif, défini par P et Q, correspond une factorisation de la matrice R de la forme

$$R = L\, S,$$

où la matrice S est définie par:

$$\ker_D \left(. \left(\begin{array}{c} P \\ R \end{array} \right) \right) = D^{1 \times r}\, (S \quad - T), \quad S \in D^{r \times p}, \quad T \in D^{r \times q}.$$

- Intérêt: $\ker_{\mathcal{F}}(S.) \subseteq \ker_{\mathcal{F}}(R.)$:

$$S\, \eta = 0 \Rightarrow R\, \eta = L\, (S\, \eta) = 0.$$

- De plus, nous avons $\mathrm{coim}\, f \triangleq M / \ker f = D^{1 \times p}/(D^{1 \times r}\, S)$.

Réservoir (Dubois-Petit-Rouchon, ECC99)

- Soient $D = \mathbb{Q}\left[\frac{d}{dt}, \delta\right]$ et le D-module $M = D^{1\times 3}/(D^{1\times 2}\, R)$, où:

$$R = \left(\begin{array}{ccc} \delta^2 & 1 & -2\,\frac{d}{dt}\,\delta \\ 1 & \delta^2 & -2\,\frac{d}{dt}\,\delta \end{array}\right) \in D^{2\times 3}.$$

- Un D-endomorphisme non-injectif est défini par les matrices:

$$P = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \quad Q = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right).$$

- Nous avons alors la factorisation suivante:

$$R = \left(\begin{array}{cc} \delta^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \delta^2 + 1 & -2\,\frac{d}{dt}\,\delta \end{array}\right).$$

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(t) = 2\,\dot{\xi}(t-h), \\ y_2(t) = 2\,\dot{\xi}(t-h), \\ y_3(t) = \xi(t-2\,h) + \xi(t), \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1(t-2\,h) + y_2(t) - 2\,\dot{y}_3(t-h) = 0, \\ y_1(t) + y_2(t-2\,h) - 2\,\dot{y}_3(t-h) = 0. \end{array}\right.$$

- Soient $D = \mathbb{Q}(\alpha)\left[\frac{d}{dt}, \delta\right]$ et le D-module $M = D^{1\times 3}/(D^{1\times 2}\, R)$:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -\frac{d}{dt}\,\delta^2 & \alpha\,\frac{d^2}{dt^2}\,\delta \\ \frac{d}{dt}\,\delta^2 & -\frac{d}{dt} & \alpha\,\frac{d^2}{dt^2}\,\delta \end{pmatrix} \in D^{2\times 3}.$$

- Un D-endomorphisme non-injectif est défini par les matrices:

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Nous avons alors la factorisation suivante:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -1 \\ \frac{d}{dt}\,\delta^2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt}\,(\delta^2+1) & -\alpha\,\frac{d^2}{dt^2}\,\delta \end{pmatrix}.$$

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(t) = -\alpha\,\dot{\xi}(t-h) - C, \\ y_2(t) = \alpha\,\dot{\xi}(t-h) + C, \\ y_3(t) = \xi(t-2\,h) + \xi(t), \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t-2\,h) + \alpha\,\ddot{y}_3(t-h) = 0, \\ \dot{y}_1(t-2\,h) - \dot{y}_2(t) + \alpha\,\ddot{y}_3(t-h) = 0. \end{array}\right.$$

Exemple: Ondes acoustiques

$$R = \begin{pmatrix} \rho_0\,\partial_1 & \rho_0\,\partial_2 & \rho_0\,\partial_3 & \partial_t/c^2 \\ \rho_0\,\partial_t & 0 & 0 & \partial_1 \\ 0 & \rho_0\,\partial_t & 0 & \partial_2 \\ 0 & 0 & \rho_0\,\partial_t & \partial_3 \end{pmatrix}$$

- Les matrices P et Q satisfont la relation $R\,P = Q\,R$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \partial_3 & -\partial_2 & 0 \\ -\partial_3 & 0 & \partial_1 & 0 \\ \partial_2 & -\partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 & -\partial_2 \\ 0 & -\partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & \partial_2 & -\partial_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Nous obtenons la factorisation $R = L\,S$ suivante:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 & 0 & 0 & \partial_t/c^2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \partial_2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \partial_3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -\rho_0\,\partial_t & 0 & 0 & 0 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 & 0 \\ 0 & \rho_0\,\partial_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_0\,\partial_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Décomposition bloc-triangulaire

- Théorème: Soient $R \in D^{q \times p}$, $M = D^{1\times p}/(D^{1\times q}\, R)$ et $f \in \mathrm{end}_D(M)$ défini par P et Q satisfaisant $R\,P = Q\,R$.

Si les D-modules à gauche

$$\left\{ \begin{array}{ll} \ker_D(.P), & \mathrm{coim}_D(.P) = D^{1\times p}/\ker_D(.P), \\ \ker_D(.Q), & \mathrm{coim}_D(.Q) = D^{1\times q}/\ker_D(.Q), \end{array} \right.$$

sont libres de rang m, $p-m$, l, $q-l$, alors il existe 2 matrices

$$U = (U_1^T \quad U_2^T)^T \in \mathrm{GL}_p(D), \quad V = (V_1^T \quad V_2^T)^T \in \mathrm{GL}_q(D),$$

telles que

$$\overline{R} = V\,R\,U^{-1} = \left(\begin{array}{cc} V_1\,R\,W_1 & 0 \\ V_2\,R\,W_1 & V_2\,R\,W_2 \end{array} \right) \in D^{q\times p},$$

où $U^{-1} = (W_1 \quad W_2)$, $W_1 \in D^{p\times m}$, $W_2 \in D^{p \times (p-m)}$ et:

$$U_1 \in D^{m\times p}, \quad U_2 \in D^{(p-m)\times p}, \quad V_1 \in D^{l\times q}, \quad V_2 \in D^{(q-l)\times q}.$$

Réservoir (Dubois-Petit-Rouchon, ECC99)

- Soient $D = \mathbb{Q}(\alpha)\left[\frac{d}{dt}, \delta\right]$ et le D-module $M = D^{1\times 3}/(D^{1\times 2}\, R)$:

$$R = \begin{pmatrix} \delta^2 & 1 & -2\,\frac{d}{dt}\,\delta \\ 1 & \delta^2 & -2\,\frac{d}{dt}\,\delta \end{pmatrix} \in D^{2\times 3}.$$

- $f \in \mathrm{end}_D(M)$ est défini par les matrices:

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow V\,R\,U^{-1} = \begin{pmatrix} \delta^2 - 1 & 0 & 0 \\ 1 & \delta^2 + 1 & -2\,\frac{d}{dt}\,\delta \end{pmatrix}.$$

Réservoir (Petit-Rouchon, IEEE TAC 02)

- Soient $D = \mathbb{Q}(\alpha)\left[\frac{d}{dt}, \delta\right]$ et le D-module $M = D^{1\times 3}/(D^{1\times 2}\, R)$:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -\frac{d}{dt}\,\delta^2 & \alpha\,\frac{d^2}{dt^2}\,\delta \\ \frac{d}{dt}\,\delta^2 & -\frac{d}{dt} & \alpha\,\frac{d^2}{dt^2}\,\delta \end{pmatrix} \in D^{2\times 3}.$$

- $f \in \mathrm{end}_D(M)$ est défini par les matrices:

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow V\,R\,U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\,(1-\delta^2) & 0 & 0 \\ \frac{d}{dt}\,\delta^2 & \frac{d}{dt}\,(1+\delta^2) & \alpha\,\frac{d^2}{dt^2}\,\delta \end{pmatrix}.$$

Exemple d'électromagnétisme

$$\sigma\,\partial_t\,\vec{A} + \frac{1}{\mu}\,\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\,\vec{A} - \sigma\,\vec{\nabla}\,V = 0$$

$$\Rightarrow R = \begin{pmatrix} \sigma\,\partial_t - \frac{1}{\mu}\,(\partial_2^2 + \partial_3^2) & \frac{1}{\mu}\,\partial_1\,\partial_2 & \frac{1}{\mu}\,\partial_1\,\partial_3 & -\sigma\,\partial_1 \\ \frac{1}{\mu}\,\partial_1\,\partial_2 & \sigma\,\partial_t - \frac{1}{\mu}\,(\partial_1^2 + \partial_3^2) & \frac{1}{\mu}\,\partial_2\,\partial_3 & -\sigma\,\partial_2 \\ \frac{1}{\mu}\,\partial_1\,\partial_3 & \frac{1}{\mu}\,\partial_2\,\partial_3 & \sigma\,\partial_t - \frac{1}{\mu}\,(\partial_1^2 + \partial_2^2) & -\sigma\,\partial_3 \end{pmatrix}.$$

- Soient $D = \mathbb{Q}[\partial_t, \partial_1, \partial_2, \partial_3]$ et $M = D^{1\times 4}/(D^{1\times 3}\,R)$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma\,\mu\,\partial_t & 0 & -\sigma\,\mu\,\partial_2 \\ 0 & 0 & \sigma\,\mu\,\partial_t & -\sigma\,\mu\,\partial_3 \\ 0 & \partial_t\,\partial_2 & \partial_t\,\partial_3 & -(\partial_2^2 + \partial_3^2) \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\partial_1\,\partial_2 & \sigma\,\mu\,\partial_t - \partial_2^2 & -\partial_2\,\partial_3 \\ -\partial_1\,\partial_3 & -\partial_2\,\partial_3 & \sigma\,\mu\,\partial_t - \partial_3^2 \end{pmatrix},$$

satisfont $R\,P = Q\,R$ et définissent un morphisme $f \in \mathrm{end}_D(M)$.

Exemple d'électromagnétisme

- Les D-modules $\ker_D(.P)$, $\operatorname{coim}_D(.P)$, $\ker_D(.Q)$, $\operatorname{coim}_D(.Q)$ sont libres et nous avons les bases suivantes:

$$\begin{cases} \ker_D(.P) = D^{1\times 2}\, U_1, \quad U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & \partial_3 & -\sigma\,\mu \end{pmatrix}, \\ \operatorname{coim}_D(.P) = D^{1\times 2}\, U_2, \quad U_2 = \dfrac{1}{\sigma\,\mu} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \ker_D(.Q) = D^{1\times 2}\, V_1, \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \operatorname{coim}_D(.Q) = D^{1\times 2}\, V_2, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

- La matrice R est équivalente à $\overline{R} = V\,R\,U^{-1}$ définie par:

$$\overline{R} = \begin{pmatrix} \sigma\,\partial_t - \frac{1}{\mu}(\partial_2^2+\partial_3^2) & \frac{1}{\mu}\,\partial_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\mu}\,\partial_1\,\partial_2 & \frac{1}{\mu}\,\partial_2 & \sigma\,(\sigma\,\mu\,\partial_t - (\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2)) & 0 \\ \frac{1}{\mu}\,\partial_1\,\partial_3 & \frac{1}{\mu}\,\partial_3 & 0 & \sigma\,(\sigma\,\mu\,\partial_t - (\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2)) \end{pmatrix}.$$

Décomposition bloc-diagonale

- Théorème: Soient $R \in D^{q \times p}$, $M = D^{1 \times p}/(D^{1 \times q}\, R)$ et $f \in \mathrm{end}_D(M)$ défini par P et Q satisfaisant:

$$P^2 = P, \quad Q^2 = Q \quad \text{(idempotents)} \quad \Rightarrow f^2 = f.$$

Si les D-modules à gauche

$$\ker_D(.P), \quad \mathrm{im}_D(.P) = \ker_D(.(I_p - P)),$$
$$\ker_D(.Q), \quad \mathrm{im}_D(.Q) = \ker_D(.(I_q - Q)),$$

sont libres de rang m, $p-m$, l, $q-l$, alors il existe 2 matrices

$$U = (U_1^T \quad U_2^T)^T \in \mathrm{GL}_p(D), \quad V = (V_1^T \quad V_2^T)^T \in \mathrm{GL}_q(D),$$

telles que

$$\overline{R} = V\, R\, U^{-1} = \begin{pmatrix} V_1\, R\, W_1 & 0 \\ 0 & V_2\, R\, W_2 \end{pmatrix} \in D^{q \times p},$$

où $U^{-1} = (W_1 \quad W_2)$, $W_1 \in D^{p \times m}$, $W_2 \in D^{p \times (p-m)}$ et:

$$U_1 \in D^{m \times p}, \quad U_2 \in D^{(p-m) \times p}, \quad V_1 \in D^{l \times q}, \quad V_2 \in D^{(q-l) \times q}.$$

Exemple: équations de Cauchy-Riemann

- Considérons les équations de Cauchy-Riemann:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{array}\right. \Rightarrow R = \begin{pmatrix} \partial_x & -\partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{pmatrix}.$$

- Les matrices P et Q définies par $P = Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

satisfont $R\,P = P\,R$ et $P^2 = P$.

$$\left\{\begin{array}{l} \ker_{\mathbb{Q}(i)}(.P) = \mathbb{Q}(i)\,(1 \quad -i), \\ \mathrm{im}_{\mathbb{Q}(i)}(.P) = \mathbb{Q}(i)\,(1 \quad i), \end{array}\right. \Rightarrow U = V = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \overline{R} = U\,R\,U^{-1} = \begin{pmatrix} \partial_x - i\,\partial_y & 0 \\ 0 & \partial_x + i\,\partial_y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \overline{\partial} & 0 \\ 0 & \partial \end{pmatrix}.$$

Exemple: équation des ondes

- Equations des ondes (acoustiques, ligne de transmission LC):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial x} + a\,\dfrac{\partial y_2}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial t} + b\,\dfrac{\partial y_2}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

- $D = \mathbb{Q}(a, b)[\partial_x, \partial_t]$, $R = \begin{pmatrix} \partial_x & a\,\partial_t \\ \partial_t & b\,\partial_x \end{pmatrix}$, $M = D^{1\times 2}/(D^{1\times 2}\,R)$.

- Un idempotent $f \in \mathrm{end}_D(M)$ est défini par les idempotents

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2\,a\,b\,\alpha \\ 2\,\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2\,a\,\alpha \\ 2\,b\,\alpha & 1 \end{pmatrix},$$

où α satisfait $4\,a\,b\,\alpha^2 - 1 = 0$.

Exemple: équation des ondes

- Dénotons $D' = \mathbb{Q}(a, b, \alpha)/(4\,a\,b\,\alpha^2 - 1)[\partial_x, \partial_t]$.
- Grâce à l'algèbre linéaire, nous obtenons:

$$\left\{\begin{array}{l} \ker_{D'}(.P) = D'\,U_1, \quad U_1 = (-1\alpha \quad 1/2\,\alpha)\,, \\ \mathrm{im}_{D'}(.P) = D'\,U_2, \quad U_2 = (1 \quad 1/2\,\alpha)\,. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \ker_{D'}(.Q) = D'\,V_1, \quad V_1 = (2\,b\,\alpha \quad -1)\,, \\ \mathrm{im}_{D'}(.Q) = D'\,V_2, \quad V_2 = (2\,b\,\alpha \quad 1)\,. \end{array}\right.$$

- $U = (U_1^T \quad U_2^T)^T \in \mathrm{GL}_2(D')$, $V = (V_1^T \quad V_2^T)^T \in \mathrm{GL}_2(D')$.
- La matrice R est équivalente à (Théorème de d'Alembert):

$$\overline{R} = V\,R\,U^{-1} = \begin{pmatrix} \partial_t - 2\,\alpha\,b\,\partial_x & 0 \\ 0 & \partial_t + 2\,\alpha\,b\,\partial_x \end{pmatrix}.$$

Exemple: ligne de transmission

- Considérons la ligne de transmission:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial x} + L\,\dfrac{\partial I}{\partial t} + R\,I = 0, \\[2ex] C\,\dfrac{\partial V}{\partial t} + G\,V + \dfrac{\partial I}{\partial x} = 0. \end{array}\right.$$

- Considérons $D = \mathbb{Q}(C, G, L, R)[\partial_x, \partial_t]$,

$$S = \begin{pmatrix} \partial_x & L\,\partial_t + R \\ C\,\partial_t + G & \partial_x \end{pmatrix}, \quad M = D^{1\times 2}/(D^{1\times 2}\,S).$$

- Un idempotent $f \in \mathrm{end}_D(M)$ est défini par

$$P = \frac{1}{C\,R - L\,G}\begin{pmatrix} C\,L\,\partial_t - \alpha\,\partial_x + C\,R & L\,\partial_x - \alpha\,L\,\partial_t - \alpha\,R \\ \alpha\,C\,\partial_t - C\,\partial_x + \alpha\,G & \alpha\,\partial_x - C\,L\,\partial_t - L\,G \end{pmatrix},$$

où α satisfait $\alpha^2 - L\,C = 0$ et $Q \in D^{2\times 2}$ est telle que $S\,P = Q\,S$.

Exemple: ligne de transmission

- Dénotons $D' = \mathbb{Q}(C, G, L, R, \alpha)/(\alpha^2 - L\,C)[\partial_x, \partial_t]$.
- $\ker_{D'}(.P)$, $\mathrm{im}_{D'}(.P)$, $\ker_{D'}(.Q)$ et $\mathrm{im}_{D'}(.Q)$ sont libres de bases:

$$\left\{\begin{array}{l} U_1 = (C\,\partial_x - \alpha\,C\,\partial_t - \alpha\,G \quad C\,L\,\partial_t - \alpha\,\partial_x + C\,R), \\ U_2 = (C \quad -\alpha), \\ V_1 = (C \quad -\alpha), \\ V_2 = (-C\,\partial_x - \alpha\,C\,\partial_t - \alpha\,G \quad \alpha\,\partial_x + C\,L\,\partial_t + C\,R). \end{array}\right.$$

- $U = (U_1^T \quad U_2^T)^T \in \mathrm{GL}_2(D')$, $V = (V_1^T \quad V_2^T)^T \in \mathrm{GL}_2(D')$.
- La matrice R est équivalente à:

$$\Rightarrow \overline{S} = V\,S\,U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (R + L\,\partial_t)\,(G + C\,\partial_t) - \partial_x^2 \end{pmatrix}.$$

Exemple: équations de Beltrami

- Considérons les équations de Beltrami:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} - x\,\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + x\,\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{array}\right. \quad \Rightarrow R = \begin{pmatrix} \partial_x & -x\,\partial_y \\ \partial_y & x\,\partial_x \end{pmatrix}.$$

- Les matrices P et Q définies par

$$P = \begin{pmatrix} 1 - x\,\partial_x + i\,x\,\partial_y & x^2\,(\partial_y + i\,\partial_x) \\ \partial_y + i\,\partial_x & 1 + x\,\partial_x - i\,x\,\partial_y \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} -x\,\partial_x - i\,x\,\partial_y & -x\,\partial_y + i\,(1 + x\,\partial_x) \\ -x\,\partial_y + i\,x\,\partial_x & 1 + x\,\partial_x + i\,x\,\partial_y \end{pmatrix},$$

satisfont

$$P\,R = Q\,R, \quad P^2 = P, \quad Q^2 = Q,$$

i.e., définissent un idempotent f de $\mathrm{end}_D(M)$ ($f^2 = f$).

- Les D-modules à gauche $\ker_D(.P)$, $\mathrm{im}_D(.P)$, $\ker_D(.Q)$, $\mathrm{im}_D(.Q)$ sont libres de bases:

$$\begin{cases} \ker_D(.P) = D\,(-\partial_x + i\,\partial_y \quad x\,(\partial_y + i\,\partial_x)), \\ \mathrm{im}_D(.P) = D\,(i \quad x), \\ \ker_D(.Q) = D\,(-1 \quad i), \\ \mathrm{im}_D(.Q) = D\,(-x\,(\partial_y - i\,\partial_x) \quad (1 + x\,\partial_x) + i\,x\,\partial_y). \end{cases}$$

- Formons les matrices unimodulaires suivantes:

$$U = \begin{pmatrix} -\partial_x + i\,\partial_y & x\,(\partial_y + i\,\partial_x) \\ i & x \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(D),$$

$$V = \begin{pmatrix} -1 & i \\ -x\,(\partial_y - i\,\partial_x) & (1 + x\,\partial_x) + i\,x\,\partial_y \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(D).$$

La matrices R est alors équivalent à:

$$\overline{R} = V\,R\,U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x\,\Delta - i\,\partial_y \end{pmatrix}.$$

Exemple: Système du second ordre

• Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists, Polyanin-Manzhirov, 1341:

$$R = \begin{pmatrix} \partial_t - k\,\partial_x - a_1 & -b_1 \\ -a_2 & \partial_t - k\,\partial_x - b_2 \end{pmatrix}$$

$$U = V = \begin{pmatrix} 2\,a_2\,\alpha & (b_2 - a_1)\,\alpha - 1 \\ 2\,a_2\,\alpha & (b_2 - a_1)\,\alpha + 1 \end{pmatrix},$$

$$((a_1 - b_2)^2 + 4\,a_2\,b_1)\,\alpha^2 - 1 = 0,$$

$$\Rightarrow \overline{R} = U\,R\,U^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_t - k\,\partial_x - \dfrac{(a_1 + b_2)}{2} + \dfrac{1}{2\,\alpha} & 0 \\ 0 & \partial_t - k\,\partial_x - \dfrac{(a_1 + b_2)}{2} - \dfrac{1}{2\,\alpha} \end{pmatrix}.$$

Exemple: Système du second ordre

• Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists, Polyanin-Manzhirov, 1341:

$$R = \begin{pmatrix} \partial_t - k\,\partial_x^2 - a_1 & -b_1 \\ -a_2 & \partial_t - k\,\partial_x^2 - b_2 \end{pmatrix}$$

$$U = V = \begin{pmatrix} 2\,a_2\,\alpha & (b_2 - a_1)\,\alpha - 1 \\ 2\,a_2\,\alpha & (b_2 - a_1)\,\alpha + 1 \end{pmatrix},$$

$$((a_1 - b_2)^2 + 4\,a_2\,b_1)\,\alpha^2 - 1 = 0,$$

$$\Rightarrow \overline{R} = U\,R\,U^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_t - k\,\partial_x^2 - \dfrac{(a_1 + b_2)}{2} + \dfrac{1}{2\,\alpha} & 0 \\ 0 & \partial_t - k\,\partial_x^2 - \dfrac{(a_1 + b_2)}{2} - \dfrac{1}{2\,\alpha} \end{pmatrix}.$$

Equations de Dirac

$$R = \begin{pmatrix} d_4 & 0 & -i\,d_3 & -(i\,d_1+d_2) \\ 0 & d_4 & -i\,d_1+d_2 & i\,d_3 \\ i\,d_3 & i\,d_1+d_2 & -d_4 & 0 \\ i\,d_1-d_2 & -i\,d_3 & 0 & -d_4 \end{pmatrix}.$$

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow V\,R\,U^{-1} = \begin{pmatrix} i\,d_3-d_4 & -i\,d_1-d_2 & 0 & 0 \\ i\,d_1-d_2 & i\,d_3+d_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\,d_3+d_4 & i\,d_1+d_2 \\ 0 & 0 & i\,d_1-d_2 & -i\,d_3+d_4 \end{pmatrix}.$$

Ecoulement 2-D isentropique (Courant-Hilbert)

- Considérons α satisfaisant $1+4\,(c^2-u^2)\,\alpha^2=0$ et l'anneau d'opérateurs $D'=\mathbb{Q}(u,\rho,c,\alpha)/(1+4\,(c^2-u^2)\,\alpha^2)[\partial_x,\partial_y]$.

$$U=\left(\begin{array}{ccc} 0 & 2\,\alpha\,c\,(c^2-u^2) & u\,\rho \\ 0 & 2\,\alpha\,c\,(c^2-u^2) & -u\,\rho \\ u\,\rho & c^2 & 0 \end{array}\right)\in \mathrm{GL}_3(D'),$$

$$V=\left(\begin{array}{ccc} 2\,\alpha\,c & 1 & -2\,\alpha\,c\,u \\ 2\,\alpha\,c & -1 & -2\,\alpha\,c\,u \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\in \mathrm{GL}_3(D'),$$

$$\Rightarrow V\left(\begin{array}{ccc} u\,\rho\,\partial_x & c^2\,\partial_x & 0 \\ 0 & c^2\,\partial_y & u\,\rho\,\partial_x \\ \rho\,\partial_x & u\,\partial_x & \rho\,\partial_y \end{array}\right)U^{-1}=\left(\begin{array}{ccc} \partial_x-2\,\alpha\,c\,\partial_y & 0 & 0 \\ 0 & \partial_x+2\,\alpha\,c\,\partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_x \end{array}\right).$$

Réservoir (Dubois-Petit-Rouchon, ECC99)

- Considérons l'anneau $D = \mathbb{Q}\left[\frac{d}{dt}, \delta\right]$, la matrice du système

$$R = \begin{pmatrix} \delta^2 & 1 & -2\,\frac{d}{dt}\,\delta \\ 1 & \delta^2 & -2\,\frac{d}{dt}\,\delta \end{pmatrix} \in D^{2\times 3},$$

et le D-module $M = D^{1\times 3}/(D^{1\times 2}\,R)$.

- Les matrices $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ satisfont:

$$R\,P = Q\,R, \quad P^2 = P, \quad Q^2 = Q.$$

- En utilisant l'algèbre linéaire, nous obtenons alors:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \overline{R} = V\,R\,U^{-1} = \begin{pmatrix} \delta^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \delta^2 & -4\,\frac{d}{dt}\,\delta \end{pmatrix}.$$

Réservoir (Dubois-Petit-Rouchon, ECC99)

$$\overline{R} = \begin{pmatrix} \delta^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \delta^2 & -4\,\frac{d}{dt}\,\delta \end{pmatrix}.$$

- Soient $\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R})$ et ψ une fonction lisse $2\,h$-périodique, alors:

$$\overline{R} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} z_1(t) = \psi(t), \\ z_2(t) = 4\,\dot{\xi}(t - h), \\ z_3(t) = \xi(t - 2\,h) + \xi(t), \end{cases} \qquad \xi \in \mathcal{F}.$$

- Nous obtenons la paramétrisation suivante de $\ker_{\mathcal{F}}(R.)$:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,\psi(t) + 2\,\dot{\xi}(t - h) \\ -\frac{1}{2}\,\psi(t) + 2\,\dot{\xi}(t - h) \\ \xi(t - 2\,h) + \xi(t) \end{pmatrix}.$$

Réservoir (Petit-Rouchon, IEEE TAC 02)

- Considérons $D=\mathbb{Q}(\alpha)\left[\frac{d}{dt},\delta\right]$, la matrice du système

$$R=\left(\begin{array}{ccc} \frac{d}{dt} & -\frac{d}{dt}\,\delta^2 & \alpha\,\frac{d^2}{dt^2}\,\delta \\ \frac{d}{dt}\,\delta^2 & -\frac{d}{dt} & \alpha\,\frac{d^2}{dt^2}\,\delta \end{array}\right)\in D^{2\times 3},$$

et le D-module $M=D^{1\times 3}/(D^{1\times 2}\,R)$.

- Les matrices $P=\frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ et $Q=\frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$ satisfont:

$$R\,P=Q\,R, \quad P^2=P, \quad Q^2=Q.$$

- En utilisant l'algèbre linéaire, nous obtenons alors:

$$U=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\in \mathrm{GL}_3(D), \quad V=\left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)\in \mathrm{GL}_2(D),$$

$$\Rightarrow \overline{R}=V\,R\,U^{-1}=\left(\begin{array}{ccc} \frac{d}{dt}\,(1-\delta)\,(1+\delta) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt}\,(\delta^2+1) & 2\,\alpha\,\frac{d^2}{dt^2}\,\delta \end{array}\right).$$

Réservoir (Petit-Rouchon, IEEE TAC 02)

$$\overline{R} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\,(1-\delta)\,(1+\delta) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt}\,(\delta^2+1) & 2\,\alpha\,\frac{d^2}{dt^2}\,\delta \end{pmatrix}.$$

- Soient $\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R})$, $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$ et $\psi \in \mathcal{F}$ $\;2\,h$-périodique.

$$\overline{R} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} z_1(t) = \psi(t) + C_1\,t, \\ z_2(t) = -2\,\alpha\,\dot{\xi}(t-h) + C_2, \quad \xi \in \mathcal{F}. \\ z_3(t) = \xi(t-2\,h) + \xi(t), \end{array} \right.$$

- Nous obtenons la paramétrisation suivante de $\ker_{\mathcal{F}}(R.)$:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,(\psi(t) + C_1\,t + C_2) - \alpha\,\dot{\xi}(t-h) \\ \frac{1}{2}\,(\psi(t) + C_1\,t - C_2) + \alpha\,\dot{\xi}(t-h) \\ \xi(t-2\,h) + \xi(t) \end{pmatrix}.$$

Barre flexible (Mounier-Rudolph-Petitot-Fliess ECC95)

- Considérons le système différentiel retardé suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot y_1(t) - \dot y_2(t-1) - u(t) = 0, \\ 2\,\dot y_1(t-1) - \dot y_2(t) - \dot y_2(t-2) = 0. \end{array}\right.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1+\delta^2 & -\frac{1}{2}\,\delta\,(1+\delta^2) & 0 \\ 2\,\delta & -\delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\,\delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} -2\,\delta & \delta^2+1 & 0 \\ 2\,\frac{d}{dt}\,(1-\delta^2) & \frac{d}{dt}\,\delta\,(\delta^2-1) & -2 \\ -1 & \frac{1}{2}\,\delta & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -\delta \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow V \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -\frac{d}{dt}\,\delta & -1 \\ 2\,\frac{d}{dt}\,\delta & -\frac{d}{dt}\,(\delta^2+1) & 0 \end{pmatrix} U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Barre flexible (Mounier-Rudolph-Petitot-Fliess ECC95)

$$\overline{R} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Considérons $\mathcal{F} = C^{\infty}(\mathbb{R})$. Les éléments du système $\ker_{\mathcal{F}}(R.)$

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t-1) - u(t) = 0, \\ 2\,\dot{y}_1(t-1) - \dot{y}_2(t) - \dot{y}_2(t-2) = 0, \end{cases}$$

sont de la forme

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \xi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,c - \xi(t-2) - \xi(t) \\ c - 2\,\xi(t-1) \\ \dot{\xi}(t-2) - \dot{\xi}(t) \end{pmatrix},$$

où c (resp., ξ) est une constante (resp., fonction de $\mathcal{F}$) arbitraire.

Corde (Mounier-Rudolph-Fliess-Rouchon, COCV 98)

- Considérons le modèle d'une corde avec une masse intérieure:

$$\left\{\begin{array}{l} \phi_1(t) + \psi_1(t) - \phi_2(t) - \psi_2(t) = 0, \\ \dot{\phi}_1(t) + \dot{\psi}_1(t) + \eta_1\, \phi_1(t) - \eta_1\, \psi_1(t) - \eta_2\, \phi_2(t) + \eta_2\, \psi_2(t) = 0, \\ \phi_1(t - 2\, h_1) + \psi_1(t) - u(t - h_1) = 0, \\ \phi_2(t) + \psi_2(t - 2\, h_2) - v(t - h_2) = 0, \end{array}\right.$$

où h_1 et $h_2 \in \mathbb{R}_+$ satisfont $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\, h_1 + \mathbb{Q}\, h_2) = 2$.

- Considérons $D = \mathbb{Q}(\eta_1, \eta_2)\left[\frac{d}{dt}, \sigma_1, \sigma_2\right]$, $M = D^{1\times 6}/(D^{1\times 4}\, R)$,

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{d}{dt} + \eta_1 & \frac{d}{dt} - \eta_1 & -\eta_2 & \eta_2 & 0 & 0 \\ \sigma_1^2 & 1 & 0 & 0 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sigma_2^2 & 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix} \in D^{4\times 6}.$$

Corde (Mounier-Rudolph-Fliess-Rouchon, COCV 98)

- Les matrices suivantes satisfont $R\,P = Q\,R$, $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_2^2 & 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{d}{dt} + \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Les modules $\ker_D(.P)$, $\mathrm{im}_D(.P)$, $\ker_D(.P)$, $\mathrm{im}_D(.P)$ sont libres:

$$U = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 1 & 0 & 0 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sigma_2^2 & 0 & -\sigma_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{d}{dt} - \eta_1 & -\eta_2 \end{pmatrix}.$$

Corde (Mounier-Rudolph-Fliess-Rouchon, COCV 98)

- R est donc équivalente à la matrice bloc-diagonale:

$$\overline{R} = V\,R\,U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sigma_1^2 & \sigma_2^2 - 1 & \sigma_1 & -\sigma_2 \\ 0 & 0 & \sigma_1^2\left(\frac{d}{dt} - \eta_1\right) - \left(\frac{d}{dt} + \eta_1\right) & -\eta_2\,(\sigma_2^2+1) & -\sigma_1\left(\frac{d}{dt}+\eta_1\right) & \eta_2\,\sigma_2 \end{pmatrix}.$$

- Considérons la seconde matrice diagonale

$$S = \begin{pmatrix} 1-\sigma_1^2 & \sigma_2^2 - 1 & \sigma_1 & -\sigma_2 \\ \sigma_1^2\left(\frac{d}{dt} - \eta_1\right) - \left(\frac{d}{dt} + \eta_1\right) & -\eta_2\,(\sigma_2^2+1) & -\sigma_1\left(\frac{d}{dt}+\eta_1\right) & \eta_2\,\sigma_2 \end{pmatrix},$$

et le D-module $N = D^{1\times 4}/(D^{1\times 2}\,S)$.

- Un projecteur $g \in \mathrm{end}_D(N)$ est défini par les matrices:

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 + 1 & (\sigma_2^2 - 1)/\eta_2 \\ -\eta_2\,(\sigma_2^2+1) & -\sigma_2^2 + 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} a = (\sigma_1^2\,\left(\frac{d}{dt} - (\eta_1+\eta_2)\right) - \frac{d}{dt} + (\eta_2 - \eta_1))/(2\,\eta_2), \\ b = -\sigma_1\,(\frac{d}{dt} - (\eta_1+\eta_2))/(2\,\eta_2). \end{cases}$$

- Les modules $\ker_D(.P)$, $\mathrm{im}\,(.P)$, $\ker_D(.Q)$ et $\mathrm{im}\,(.Q)$ sont libres.

$$U' = \begin{pmatrix} \sigma_1^2\left(\frac{d}{dt}-\eta_1-\eta_2\right)-\left(\frac{d}{dt}+\eta_1-\eta_2\right) & -2\,\eta_2 & -\sigma_1\left(\frac{d}{dt}-\eta_1-\eta_2\right) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & 0 & 1 & 0 \\ \sigma_1^2\,\sigma_2\,(d-\eta_1-\eta_2)-\sigma_2\,(d+\eta_1-\eta_2) & 0 & -\sigma_1\,\sigma_2\,(d-\eta_1-\eta_2) & -2\,\eta_2 \end{pmatrix},$$

$$V' = \begin{pmatrix} \eta_2 & 1 \\ \eta_2\,(\sigma_2^2+1) & \sigma_2^2-1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \overline{S} = V'\,S\,U'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt}+\eta_1+\eta_2 & \sigma_1\left(\frac{d}{dt}+\eta_2-\eta_1\right) & \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

- Soient $U'' = \mathrm{diag}(I_2, U')$, $V'' = \mathrm{diag}(I_2, V')$. Nous avons alors:

$$\overline{\overline{R}} = (V''\,V)\,R\,(U''\,U)^{-1} = \mathrm{diag}(I_2, \overline{S}).$$

Corde (Mounier-Rudolph-Fliess-Rouchon, COCV 98)

- Notons $\alpha = \eta_1 + \eta_2$ et $\beta = \eta_2 - \eta_1$. Nous avons alors:

$$\left\{\begin{array}{l} \phi_1(t) + \psi_1(t) - \phi_2(t) - \psi_2(t) = 0, \\ \dot{\phi}_1(t) + \dot{\psi}_1(t) + \eta_1\, \phi_1(t) - \eta_1\, \psi_1(t) - \eta_2\, \phi_2(t) + \eta_2\, \psi_2(t) = 0, \\ \phi_1(t - 2\, h_1) + \psi_1(t) - u(t - h_1) = 0, \\ \phi_2(t) + \psi_2(t - 2\, h_2) - v(t - h_2) = 0, \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\dot{z}_1(t) + \alpha\, z_1(t) + \dot{z}_2(t - h_1) + \beta\, z_2(t - h_1) + z_3(t - h_2) = 0.$$

$\Rightarrow$ On peut calculer facilement une paramétrisation de la corde.

$\Rightarrow$ Le système est σ_2-libre et σ_1-libre...

- Considérons le mélangeur suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) + \dfrac{1}{2\,\theta}\, x_1(t) - u_1(t) - u_2(t) = 0, \\ \dot{x}_2(t) + \dfrac{1}{\theta}\, x_2(t) - \dfrac{(c_1 - c_0)}{V_0}\, u_1(t-\tau) - \dfrac{(c_2 - c_0)}{V_0}\, u_2(t-\tau) = 0. \end{cases}$$

$$U = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 - c_1 & c_0 - c_2 \\ \frac{d}{dt} + \frac{1}{2\,\theta} & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad V = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right),$$

$$V \left(\begin{array}{cccc} \frac{d}{dt} + \frac{1}{2\,\theta} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{d}{dt} + \frac{1}{\theta} & -\frac{(c_1 - c_0)}{V_0}\,\delta & -\frac{(c_2 - c_0)}{V_0}\,\delta \end{array} \right) U^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} \frac{d}{dt} + \frac{1}{\theta} & \frac{1}{V_0}\,\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Modèle de soufflerie (Manitius, IEEE TAC 84)

- Considérons le modèle de soufflerie suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) + a\,x_1(t) - k\,a\,x_2(t-h) = 0, \\ \dot{x}_2(t) - x_3(t) = 0, \\ \dot{x}_3(t) + \omega^2\,x_2(t) + 2\,\zeta\,\omega\,x_3(t) - \omega^2\,u(t) = 0. \end{cases}$$

$$U = \begin{pmatrix} \omega^2 & \frac{d}{dt} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \omega^2\left(\frac{d}{dt}+a\right) & -\omega^2\,(k\,a\,\delta+1) & -\left(\frac{d}{dt}+2\,\omega\,\zeta\right) & \omega^2 \\ 0 & \frac{d}{dt} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \omega^2 & \frac{d}{dt}+a & 0 \\ \omega^2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$V \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}+a & -k\,a\,\delta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} & -1 & 0 \\ 0 & \omega^2 & \frac{d}{dt}+2\,\zeta\,\omega & -\omega^2 \end{pmatrix} U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}+a & -a\,k\,\omega^2\,\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorèmes de Quillen-Suslin et de Stafford

- Grâce aux théorèmes de Quillen-Suslin (conjecture de Serre) et de Stafford, nous savons reconnaître quand un module est libre et calculer des bases dans les cas suivants:
  - $D = \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$: package QuillenSuslin (Fabiańska).
  - $D = A[\partial_1, \ldots, \partial_n]$, $A = \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ ou $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$: package Stafford (Q.-Robertz).
  - Autres algèbres: heuristiques dans OreModules.
- $P^2 = P \Rightarrow \ker_D(.P)$ est un D-module libre dans le cas:
  - $D = \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$,
  - $D = A[\partial_1, \ldots, \partial_n]$, $A = \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ ou $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$, sous la condition $\mathrm{rank}_D(\ker_D(.P)) \geq 2$.

Le package MORPHISMS

- Les algorithmes correspondants ont été implementés dans le package Maple MORPHISMS basé sur la librairie OREMODULES dévelopée par Q. et Robertz:

http://wwwb.math.rwth-aachen.de/OreModules

- Liste des fonctions:
  - Morphisms, MorphismsConst, MorphismsRat, MorphismsRat1.
  - Projectors, ProjectorsConst, ProjectorsRat, Idempotents.
  - KerMorphism, ImMorphism, CokerMorphism, CoimMorphism.
  - TestSurj, TestInj, TestIso.
  - QuadraticFirstIntegralConst...

- Il sera bientôt librement accessible avec une libraire d'exemples.

Conclusion

• Nous avons utilisé des techniques algébriques et de calcul formel pour simplifier des systèmes fonctionnels linéaires.

$\Rightarrow$ Algorithmes & Implantation & Questions ouvertes.

• Cette approche permet aussi de calculer des lois de conservation quadratiques intervenant dans les sciences de l'ingénieur (e.g., élasticité, électromagnétisme, hydrodynamique).

• Liens avec l'intégrabilité des systèmes hamiltoniens (e.g., paires de Lax, théorie de Galois différentielle).

• T. Cluzeau, A. Quadrat, "Factoring and decomposing a class of linear functional systems", à paraître dans Linear Algebra and Its Applications, 58 pages.