

GdR Momas, méthodes numériques pour les milieux poreux

Applications d'un cadre fonctionnel à certaines méthodes de volumes finis

Robert Eymard (Marne-la-Vallée)

en collaboration avec Thierry Gallouët et Raphaèle Herbin (Marseille)

Plan

1. Méthodes numériques en milieux poreux
2. Espaces discrets pour volumes finis
3. Application aux problèmes anisotropes
4. Exemples numériques

Plan

1. Méthodes numériques en milieux poreux
2. Espaces discrets pour volumes finis
3. Application aux problèmes anisotropes
4. Exemples numériques

Écoulements dans les milieux poreux

- Dépôt couches géologiques + compaction \Rightarrow anisotropie

Écoulements dans les milieux poreux

- Dépôt couches géologiques + compaction \Rightarrow anisotropie
- Variabilité de la lithologie dans l'espace \Rightarrow hétérogénéités

Écoulements dans les milieux poreux

- Dépôt couches géologiques + compaction \Rightarrow anisotropie
- Variabilité de la lithologie dans l'espace \Rightarrow hétérogénéités
- Transport-diffusion-dispersion \Rightarrow opérateur hétérogène anisotrope

Écoulements dans les milieux poreux

- Dépôt couches géologiques + compaction \Rightarrow anisotropie
- Variabilité de la lithologie dans l'espace \Rightarrow hétérogénéités
- Transport-diffusion-dispersion \Rightarrow opérateur hétérogène anisotrope
- Modélisation et simulation des écoulements polyphasiques+transport réaction en milieu poreux : volumes finis très employés (pétrole, hydrologie, etc)

Avantages des méthodes de VF

- solutions constantes par maille : forme locale
respecte second principe de la thermodynamique

Avantages des méthodes de VF

- solutions constantes par maille : forme locale respecte second principe de la thermodynamique
- simples, robustes, convergentes

Avantages des méthodes de VF

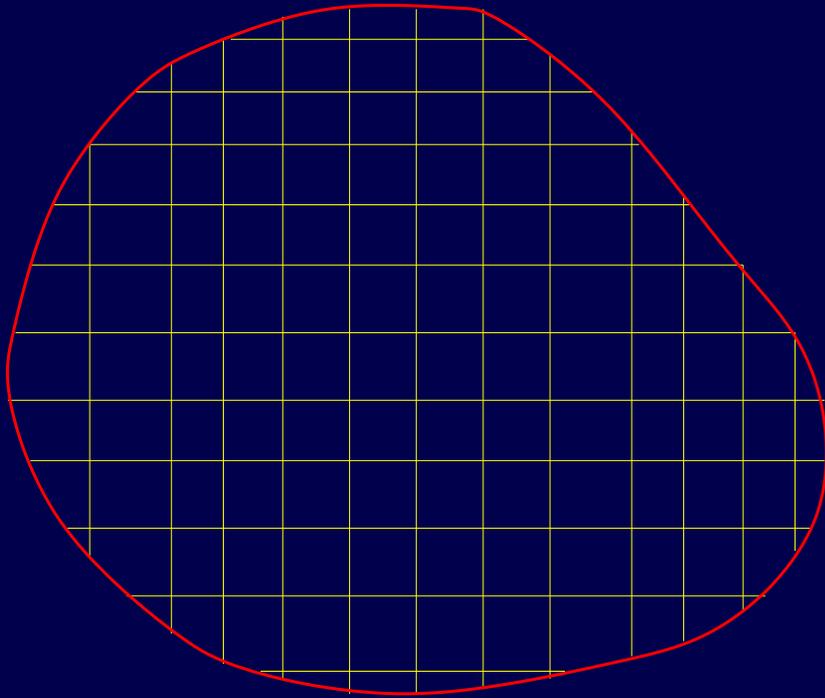
- solutions constantes par maille : forme locale respecte second principe de la thermodynamique
- simples, robustes, convergentes
- bien adaptées aux cadres hétérogènes isotropes

Avantages des méthodes de VF

- solutions constantes par maille : forme locale respecte second principe de la thermodynamique
- simples, robustes, convergentes
- bien adaptées aux cadres hétérogènes isotropes
- cadre anisotrope et hétérogène ? présent exposé.

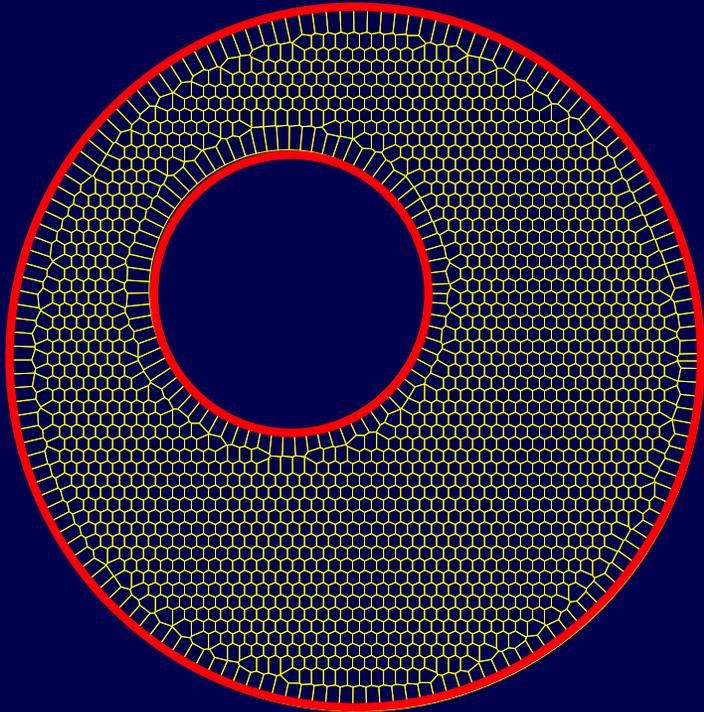
Exemple de grille pour VF

très utilisées dans l'ingénierie hydraulique et pétrolière



Rectangles

Exemple de grille pour VF

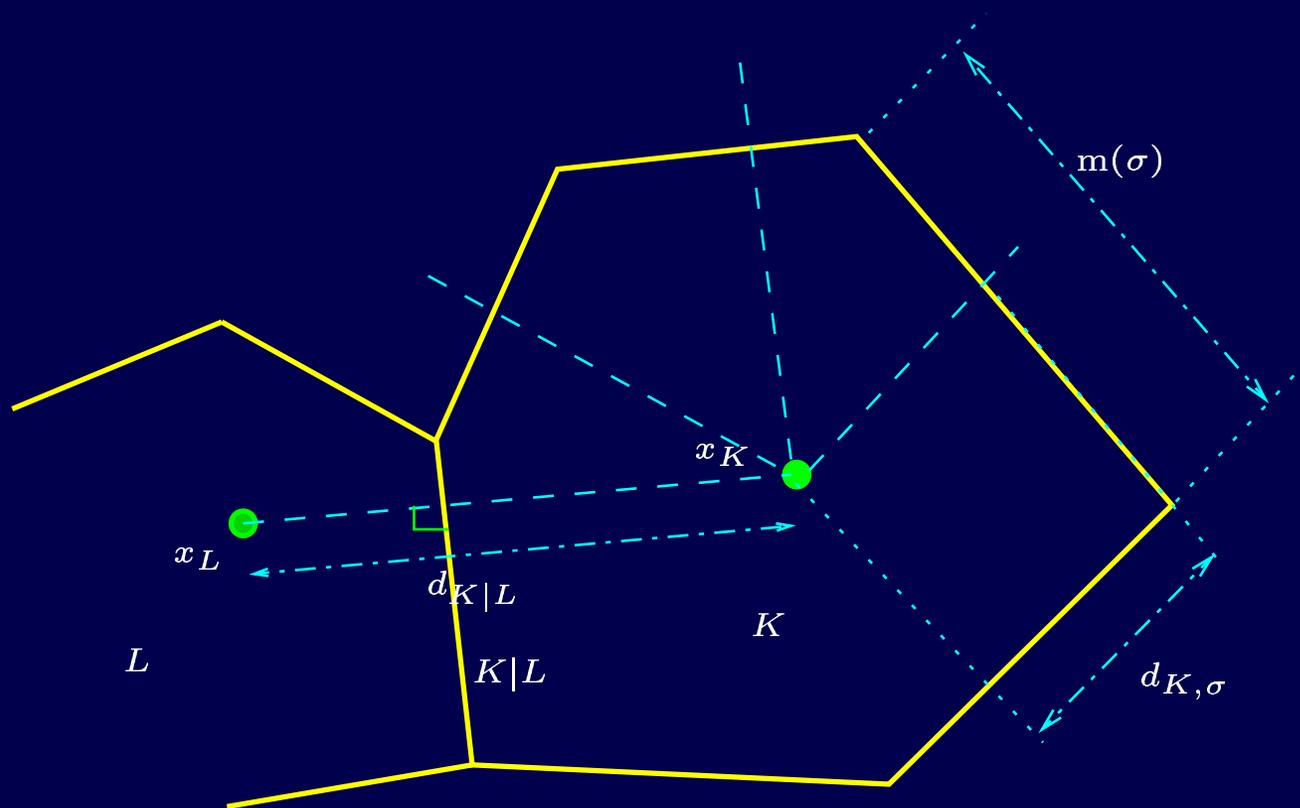


Voronoi

Plan

1. Méthodes numériques en milieux poreux
2. Espaces discrets pour volumes finis
3. Application aux problèmes anisotropes
4. Exemples numériques

Condition sur les maillages



Espace discret

- $H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ espace des fonctions constantes par maille

Espace discret

- $H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ espace des fonctions constantes par maille

- $[u, v]_{\mathcal{T}} = \left(\begin{aligned} & \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} (u_L - u_K)(v_L - v_K) \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K, \text{ext}}} \frac{m(\sigma)}{d(x_K, \sigma)} u_K v_K \end{aligned} \right)$

Espace discret

- $H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ espace des fonctions constantes par maille

- $[u, v]_{\mathcal{T}} = \left(\begin{aligned} & \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} (u_L - u_K)(v_L - v_K) \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K, \text{ext}}} \frac{m(\sigma)}{d(x_K, \sigma)} u_K v_K \end{aligned} \right)$

- $\|u\|_{1, \mathcal{T}} = ([u, u]_{\mathcal{T}})^{1/2}$

Espace discret

- $H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ espace des fonctions constantes par maille

- $[u, v]_{\mathcal{T}} = \left(\begin{aligned} & \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} (u_L - u_K)(v_L - v_K) \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K, \text{ext}}} \frac{m(\sigma)}{d(x_K, \sigma)} u_K v_K \end{aligned} \right)$

- $\|u\|_{1, \mathcal{T}} = ([u, u]_{\mathcal{T}})^{1/2}$

- Poincaré discret $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|u\|_{1, \mathcal{T}}$

Espace discret

- $H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ espace des fonctions constantes par maille

- $$[u, v]_{\mathcal{T}} = \left(\begin{aligned} & \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} (u_L - u_K)(v_L - v_K) \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K, \text{ext}}} \frac{m(\sigma)}{d(x_K, \sigma)} u_K v_K \end{aligned} \right)$$

- $\|u\|_{1, \mathcal{T}} = ([u, u]_{\mathcal{T}})^{1/2}$

- Poincaré discret $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|u\|_{1, \mathcal{T}}$

- Estimation sur les translations

$$\|u(\cdot + \xi) - u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq |\xi| (|\xi| + 4|\mathcal{T}|) \|u\|_{1, \mathcal{T}}^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$$

Propriété de compacité

- opérateur d'interpolation $P_{\mathcal{T}} : C^0(\Omega) \rightarrow H_{\mathcal{T}}(\Omega)$,
 $\varphi \mapsto P_{\mathcal{T}}\varphi$, $P_{\mathcal{T}}\varphi(x) = \varphi(x_K)$, p.p. $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}$

$$\lim_{|\mathcal{T}| \rightarrow 0} [P_{\mathcal{T}}\varphi, P_{\mathcal{T}}\varphi]_{\mathcal{T}} = \int_{\Omega} (\nabla\varphi(x))^2 dx, \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$$

Propriété de compacité

- opérateur d'interpolation $P_{\mathcal{T}} : C^0(\Omega) \rightarrow H_{\mathcal{T}}(\Omega)$,
 $\varphi \mapsto P_{\mathcal{T}}\varphi$, $P_{\mathcal{T}}\varphi(x) = \varphi(x_K)$, p.p. $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}$
$$\lim_{|\mathcal{T}| \rightarrow 0} [P_{\mathcal{T}}\varphi, P_{\mathcal{T}}\varphi]_{\mathcal{T}} = \int_{\Omega} (\nabla\varphi(x))^2 dx, \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$$
- pour toute suite $(\mathcal{T}_m, u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ avec $|\mathcal{T}_m| \rightarrow 0$,
 $\|u_m\|_{1, \mathcal{T}_m} \leq C$,
existe sous-suite et $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ tels que $u_m \rightarrow \bar{u}$ dans $L^2(\Omega)$

Propriété de compacité

- opérateur d'interpolation $P_{\mathcal{T}} : C^0(\Omega) \rightarrow H_{\mathcal{T}}(\Omega)$,
 $\varphi \mapsto P_{\mathcal{T}}\varphi$, $P_{\mathcal{T}}\varphi(x) = \varphi(x_K)$, p.p. $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}$

$$\lim_{|\mathcal{T}| \rightarrow 0} [P_{\mathcal{T}}\varphi, P_{\mathcal{T}}\varphi]_{\mathcal{T}} = \int_{\Omega} (\nabla\varphi(x))^2 dx, \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$$

- pour toute suite $(\mathcal{T}_m, u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ avec $|\mathcal{T}_m| \rightarrow 0$,
 $\|u_m\|_{1, \mathcal{T}_m} \leq C$,
existe sous-suite et $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ tels que $u_m \rightarrow \bar{u}$ dans $L^2(\Omega)$

- De plus pour toute suite $(\mathcal{T}_m, u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ avec $|\mathcal{T}_m| \rightarrow 0$,
 $\|u_m\|_{1, \mathcal{T}_m} \leq C$, et $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ tels que $u_m \rightarrow \bar{u}$ dans $L^2(\Omega)$ et pour tout $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [u_m, P_{\mathcal{T}_m}\varphi]_{\mathcal{T}_m} = \int_{\Omega} \nabla\bar{u}(x) \cdot \nabla\varphi(x) dx$$

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} [u_m, u_m]_{\mathcal{T}_m} \geq \int_{\Omega} (\nabla\bar{u}(x))^2 dx$$

VF pour pb. Dirichlet homogène

- Problème continu : trouver $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ avec

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla \bar{v}(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) \bar{v}(x) \, dx, \quad \forall \bar{v} \in H_0^1(\Omega)$$

VF pour pb. Dirichlet homogène

- Problème continu : trouver $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ avec
$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla \bar{v}(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) \bar{v}(x) \, dx, \quad \forall \bar{v} \in H_0^1(\Omega)$$
- Problème discret : trouver $u \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ avec
$$[u, v]_{\mathcal{T}} = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx, \quad \forall v \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$$

VF pour pb. Dirichlet homogène

- Problème continu : trouver $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ avec
$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla \bar{v}(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) \bar{v}(x) \, dx, \quad \forall \bar{v} \in H_0^1(\Omega)$$

- Problème discret : trouver $u \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ avec
$$[u, v]_{\mathcal{T}} = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx, \quad \forall v \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$$

- Equation discrète associée à la maille K ($v = 1_K$):

$$-\sum_{L \in V_K} \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} (u_L - u_K) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K, \text{ext}}} \frac{m(\sigma)}{d(x_K, \sigma)} u_K = \int_K f(x) \, dx$$

VF pour pb. Dirichlet homogène

- Problème continu : trouver $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ avec
$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla \bar{v}(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) \bar{v}(x) \, dx, \quad \forall \bar{v} \in H_0^1(\Omega)$$

- Problème discret : trouver $u \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ avec
$$[u, v]_{\mathcal{T}} = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx, \quad \forall v \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$$

- Equation discrète associée à la maille K ($v = 1_K$):

$$-\sum_{L \in V_K} \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} (u_L - u_K) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K, \text{ext}}} \frac{m(\sigma)}{d(x_K, \sigma)} u_K = \int_K f(x) \, dx$$

- Rmq : $m(K)(\Delta_{\mathcal{T}}u)_K = [u, 1_K]_{\mathcal{T}}$ donne $-\Delta_{\mathcal{T}}u = f_{\mathcal{T}}$

Étude de la convergence

- Estimation:

$$[u, u]_{\mathcal{T}} = \int_{\Omega} f(x)u(x) \, dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \text{ puis}$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|u\|_{1, \mathcal{T}}$$

$$\text{donc } \|u\|_{1, \mathcal{T}} \leq C$$

Étude de la convergence

- Estimation:

$$[u, u]_{\mathcal{T}} = \int_{\Omega} f(x)u(x) \, dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \text{ puis}$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|u\|_{1, \mathcal{T}}$$

$$\text{donc } \|u\|_{1, \mathcal{T}} \leq C$$

- Application du résultat de compacité: existe sous-suite $(\mathcal{T}_m, u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ avec $|\mathcal{T}_m| \rightarrow 0$, $\|u_m\|_{1, \mathcal{T}_m} \leq C$, et $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ tels que $u_m \rightarrow \bar{u}$ dans $L^2(\Omega)$

Étude de la convergence

- Estimation:

$$[u, u]_{\mathcal{T}} = \int_{\Omega} f(x)u(x) \, dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \text{ puis}$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|u\|_{1, \mathcal{T}}$$

$$\text{donc } \|u\|_{1, \mathcal{T}} \leq C$$

- Application du résultat de compacité: existe sous-suite $(\mathcal{T}_m, u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ avec $|\mathcal{T}_m| \rightarrow 0$, $\|u_m\|_{1, \mathcal{T}_m} \leq C$, et $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ tels que $u_m \rightarrow \bar{u}$ dans $L^2(\Omega)$

- pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$[u_m, P_{\mathcal{T}_m} \varphi]_{\mathcal{T}_m} \rightarrow \int_{\Omega} \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla \varphi(x) \, dx \text{ et}$$

$$\int_{\Omega} f(x) P_{\mathcal{T}_m} \varphi(x) \, dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx$$

donc \bar{u} solution faible

Étude de la convergence

- Estimation:

$$[u, u]_{\mathcal{T}} = \int_{\Omega} f(x)u(x) \, dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \text{ puis}$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|u\|_{1,\mathcal{T}}$$

$$\text{donc } \|u\|_{1,\mathcal{T}} \leq C$$

- Application du résultat de compacité: existe sous-suite $(\mathcal{T}_m, u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ avec $|\mathcal{T}_m| \rightarrow 0$, $\|u_m\|_{1,\mathcal{T}_m} \leq C$, et $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ tels que $u_m \rightarrow \bar{u}$ dans $L^2(\Omega)$
- pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$
 $[u_m, P_{\mathcal{T}_m} \varphi]_{\mathcal{T}_m} \rightarrow \int_{\Omega} \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla \varphi(x) \, dx$ et
 $\int_{\Omega} f(x) P_{\mathcal{T}_m} \varphi(x) \, dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx$
donc \bar{u} solution faible
- unicité implique $u_{\mathcal{T}} \rightarrow \bar{u}$ quand $|\mathcal{T}| \rightarrow 0$

Étude de la convergence

- Estimation:

$$[u, u]_{\mathcal{T}} = \int_{\Omega} f(x)u(x) \, dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \text{ puis}$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|u\|_{1, \mathcal{T}}$$

$$\text{donc } \|u\|_{1, \mathcal{T}} \leq C$$

- Application du résultat de compacité: existe sous-suite $(\mathcal{T}_m, u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ avec $|\mathcal{T}_m| \rightarrow 0$, $\|u_m\|_{1, \mathcal{T}_m} \leq C$, et $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ tels que $u_m \rightarrow \bar{u}$ dans $L^2(\Omega)$

- pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$[u_m, P_{\mathcal{T}_m} \varphi]_{\mathcal{T}_m} \rightarrow \int_{\Omega} \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla \varphi(x) \, dx \text{ et}$$

$$\int_{\Omega} f(x) P_{\mathcal{T}_m} \varphi(x) \, dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx$$

donc \bar{u} solution faible

- unicité implique $u_{\mathcal{T}} \rightarrow \bar{u}$ quand $|\mathcal{T}| \rightarrow 0$
- $\|u_{\mathcal{T}}\|_{1, \mathcal{T}} \rightarrow \|\nabla \bar{u}\|_{L^2(\Omega)^d}$ (cv d'un gradient approché...)

Plan

1. Méthodes numériques en milieux poreux
2. Espaces discrets pour volumes finis
3. Application aux problèmes anisotropes
4. Exemples numériques

Le problème continu

- $\xi \cdot \Lambda(x)\zeta = \zeta \cdot \Lambda(x)\xi, \forall \xi, \zeta \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega$

Le problème continu

- $\xi \cdot \Lambda(x)\zeta = \zeta \cdot \Lambda(x)\xi, \forall \xi, \zeta \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega$
- réels $0 < \alpha \leq \beta$ tels que
 $\alpha|\xi|^2 \leq \xi \cdot \Lambda(x)\xi \leq \beta|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega$

Le problème continu

- $\xi \cdot \Lambda(x)\zeta = \zeta \cdot \Lambda(x)\xi, \forall \xi, \zeta \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega$
- réels $0 < \alpha \leq \beta$ tels que
 $\alpha|\xi|^2 \leq \xi \cdot \Lambda(x)\xi \leq \beta|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega$
- trouver $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \Lambda(x) \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla \bar{v}(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \bar{v}(x) dx, \forall \bar{v} \in H_0^1(\Omega)$$

Supposons....

- il existe un opérateur discret $\nabla_{\mathcal{T}} : H_{\mathcal{T}}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)^d$ tel que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, alors $\nabla_{\mathcal{T}} P_{\mathcal{T}}\varphi \rightarrow \nabla\varphi$ dans $L^2(\Omega)$ quand $|\mathcal{T}| \rightarrow 0$

Supposons....

- il existe un opérateur discret $\nabla_{\mathcal{T}} : H_{\mathcal{T}}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)^d$ tel que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, alors $\nabla_{\mathcal{T}} P_{\mathcal{T}}\varphi \rightarrow \nabla\varphi$ dans $L^2(\Omega)$ quand $|\mathcal{T}| \rightarrow 0$
- pour toute suite $(\mathcal{T}_m, u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ avec $|\mathcal{T}_m| \rightarrow 0$ et $\|u_m\|_{1, \mathcal{T}_m} \leq C$, $u_m \rightarrow \bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ $\nabla_{\mathcal{T}_m} u_m \rightharpoonup \nabla \bar{u}$ dans $L^2(\Omega)^d$

Supposons....

- il existe un opérateur discret $\nabla_{\mathcal{T}} : H_{\mathcal{T}}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)^d$ tel que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, alors $\nabla_{\mathcal{T}} P_{\mathcal{T}}\varphi \rightarrow \nabla\varphi$ dans $L^2(\Omega)$ quand $|\mathcal{T}| \rightarrow 0$
- pour toute suite $(\mathcal{T}_m, u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ avec $|\mathcal{T}_m| \rightarrow 0$ et $\|u_m\|_{1, \mathcal{T}_m} \leq C$, $u_m \rightarrow \bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ $\nabla_{\mathcal{T}_m} u_m \rightharpoonup \nabla\bar{u}$ dans $L^2(\Omega)^d$
- Alors schéma numérique naturel : trouver $u \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ tel que
$$\int_{\Omega} \Lambda(x) \nabla_{\mathcal{T}} u(x) \cdot \nabla_{\mathcal{T}} v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx,$$
$$\forall v \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$$

Construction de l'opérateur - 1

- Pour chaque $\sigma \in \mathcal{E}_K$, problème de Neumann

$$\begin{cases} \Delta w_{K,\sigma}(x) = \frac{m(\sigma)}{m(K)} \text{ p.p. } x \in K \\ \nabla w_{K,\sigma}(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = \begin{cases} 1 \text{ p.p. } x \in \sigma \\ 0 \text{ p.p. } x \in \sigma' \neq \sigma \end{cases} \end{cases}$$

Construction de l'opérateur - 1

- Pour chaque $\sigma \in \mathcal{E}_K$, problème de Neumann

$$\begin{cases} \Delta w_{K,\sigma}(x) = \frac{m(\sigma)}{m(K)} \text{ p.p. } x \in K \\ \nabla w_{K,\sigma}(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = \begin{cases} 1 \text{ p.p. } x \in \sigma \\ 0 \text{ p.p. } x \in \sigma' \neq \sigma \end{cases} \end{cases}$$

- $$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} u(x) = \left(\begin{array}{l} \sum_{L \in V_K} \frac{(u_L - u_K)}{d(x_K, x_L)} \nabla w_{K,K|L}(x) \\ + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K,\text{ext}}} \frac{0 - u_K}{d(x_K, \sigma)} \nabla w_{K,\sigma}(x) \end{array} \right)$$

p.p. $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}$

Construction de l'opérateur - 1

- Pour chaque $\sigma \in \mathcal{E}_K$, problème de Neumann

$$\begin{cases} \Delta w_{K,\sigma}(x) = \frac{m(\sigma)}{m(K)} \text{ p.p. } x \in K \\ \nabla w_{K,\sigma}(x) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = \begin{cases} 1 \text{ p.p. } x \in \sigma \\ 0 \text{ p.p. } x \in \sigma' \neq \sigma \end{cases} \end{cases}$$

- $$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}} u(x) = \left(\begin{array}{l} \sum_{L \in V_K} \frac{(u_L - u_K)}{d(x_K, x_L)} \nabla w_{K,K|L}(x) \\ + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K,\text{ext}}} \frac{0 - u_K}{d(x_K, \sigma)} \nabla w_{K,\sigma}(x) \end{array} \right)$$

p.p. $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}$

- Rmq: $\nabla w_{K,\sigma}$ généralise fonctions de R-T, difficiles à exprimer en dehors de triangles et rectangles, mais

on a
$$\int_K \nabla w_{K,\sigma}(x) dx = m(\sigma)(\bar{x}_\sigma - \bar{x}_K)$$

Construction de l'opérateur - 2

- $\nabla_{\mathcal{T}}u(x) =$
$$\frac{1}{m(K)} \left(\begin{array}{l} \sum_{L \in V_K} \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} (u_L - u_K) (\bar{x}_{K|L} - y_K) \\ + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K, \text{ext}}} \frac{m(\sigma)}{d(x_K, \sigma)} (0 - u_K) (\bar{x}_{\sigma} - y_K) \end{array} \right)$$

p.p. $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}, y_K$ à définir

Construction de l'opérateur - 2

- $\nabla_{\mathcal{T}}u(x) =$
$$\frac{1}{m(K)} \left(\begin{array}{l} \sum_{L \in V_K} \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} (u_L - u_K) (\bar{x}_{K|L} - y_K) \\ + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K, \text{ext}}} \frac{m(\sigma)}{d(x_K, \sigma)} (0 - u_K) (\bar{x}_{\sigma} - y_K) \end{array} \right)$$

p.p. $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}, y_K$ à définir

- propriété : $\nabla_{\mathcal{T}}P_{\mathcal{T}}\varphi \rightarrow \nabla\varphi$ dans $L^2(\Omega)^d$ quand $|\mathcal{T}| \rightarrow 0$
vraie quel que soit le choix de $(y_K)_{K \in \mathcal{T}}$

Construction de l'opérateur - 2

- $$\nabla_{\mathcal{T}} u(x) = \frac{1}{m(K)} \left(\begin{array}{l} \sum_{L \in V_K} \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} (u_L - u_K) (\bar{x}_{K|L} - y_K) \\ + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K, \text{ext}}} \frac{m(\sigma)}{d(x_K, \sigma)} (0 - u_K) (\bar{x}_{\sigma} - y_K) \end{array} \right)$$

p.p. $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}, y_K$ à définir

- propriété : $\nabla_{\mathcal{T}} P_{\mathcal{T}} \varphi \rightarrow \nabla \varphi$ dans $L^2(\Omega)^d$ quand $|\mathcal{T}| \rightarrow 0$
 vraie quel que soit le choix de $(y_K)_{K \in \mathcal{T}}$

- preuve : consistance approx. de $\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}$ et

$$\int_K \partial_i x^{(j)} dx = \delta_{ij} m(K) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma) \bar{x}^{(j)} \mathbf{e}^{(i)} \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma}$$

Construction de l'opérateur - 2

- $$\nabla_{\mathcal{T}} u(x) = \frac{1}{m(K)} \left(\begin{array}{l} \sum_{L \in V_K} \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} (u_L - u_K) (\bar{x}_{K|L} - y_K) \\ + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K, \text{ext}}} \frac{m(\sigma)}{d(x_K, \sigma)} (0 - u_K) (\bar{x}_{\sigma} - y_K) \end{array} \right)$$

p.p. $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}, y_K$ à définir

- propriété : $\nabla_{\mathcal{T}} P_{\mathcal{T}} \varphi \rightarrow \nabla \varphi$ dans $L^2(\Omega)^d$ quand $|\mathcal{T}| \rightarrow 0$
 vraie quel que soit le choix de $(y_K)_{K \in \mathcal{T}}$
- preuve : consistance approx. de $\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}$ et

$$\int_K \partial_i x^{(j)} dx = \delta_{ij} m(K) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma) \bar{x}^{(j)} \mathbf{e}^{(i)} \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma}$$
- $\nabla_{\mathcal{T}_m} u_m \rightarrow \nabla \bar{u}$ dans $L^2(\Omega)^d$? pas clair quand $y_K = \bar{x}_K$

Construction de l'opérateur - 3

- $\nabla_{\mathcal{T}}u(x) =$
$$\frac{1}{m(K)} \left(\begin{aligned} &\sum_{L \in V_K} \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} (u_L - u_K)(y_{K|L} - x_K) \\ &+ \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K, \text{ext}}} \frac{m(\sigma)}{d(x_K, \sigma)} (0 - u_K)(y_\sigma - x_K) \end{aligned} \right)$$

p.p. $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}, (y_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}}$ à définir

Construction de l'opérateur - 3

- $$\nabla_{\mathcal{T}} u(x) = \frac{1}{m(K)} \left(\sum_{L \in V_K} \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} (u_L - u_K)(y_{K|L} - x_K) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K, \text{ext}}} \frac{m(\sigma)}{d(x_K, \sigma)} (0 - u_K)(y_\sigma - x_K) \right)$$

p.p. $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}, (y_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}}$ à définir

- propriété : pour toute suite $(\mathcal{T}_m, u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ avec $|\mathcal{T}_m| \rightarrow 0$ et $\|u_m\|_{1, \mathcal{T}_m} \leq C, u_m \rightarrow \bar{u} \in H_0^1(\Omega)$
 $\nabla_{\mathcal{T}_m} u_m \rightharpoonup \nabla \bar{u}$ dans $L^2(\Omega)^d$
 vraie quel que soit le choix de $(y_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}}$

Construction de l'opérateur - 3

- $$\nabla_{\mathcal{T}} u(x) = \frac{1}{m(K)} \left(\sum_{L \in V_K} \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} (u_L - u_K)(y_{K|L} - x_K) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K, \text{ext}}} \frac{m(\sigma)}{d(x_K, \sigma)} (0 - u_K)(y_\sigma - x_K) \right)$$

p.p. $x \in K, \forall K \in \mathcal{T}, (y_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}}$ à définir

- propriété : pour toute suite $(\mathcal{T}_m, u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ avec $|\mathcal{T}_m| \rightarrow 0$ et $\|u_m\|_{1, \mathcal{T}_m} \leq C, u_m \rightarrow \bar{u} \in H_0^1(\Omega)$

$\nabla_{\mathcal{T}_m} u_m \rightharpoonup \nabla \bar{u}$ dans $L^2(\Omega)^d$

vraie quel que soit le choix de $(y_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}}$

- preuve : orthogonalité $K|L$ et (x_K, x_L) et regroupement par arête

Construction de l'opérateur - 4

- synthèse : pour tout $u \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$, $\nabla_{\mathcal{T}}u \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)^d$:

$$\nabla_{\mathcal{T}}u_K = \frac{1}{m(K)} \left(\begin{array}{l} \sum_{L \in V_K} \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} (u_L - u_K) (\bar{x}_{K|L} - x_K) \\ + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K,\text{ext}}} \frac{m(\sigma)}{d(x_K, \sigma)} (0 - u_K) (\bar{x}_{\sigma} - x_K) \end{array} \right)$$

Construction de l'opérateur - 4

- synthèse : pour tout $u \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$, $\nabla_{\mathcal{T}}u \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)^d$:

$$\nabla_{\mathcal{T}}u_K = \frac{1}{m(K)} \left(\begin{array}{l} \sum_{L \in V_K} \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} (u_L - u_K) (\bar{x}_{K|L} - x_K) \\ + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K,\text{ext}}} \frac{m(\sigma)}{d(x_K, \sigma)} (0 - u_K) (\bar{x}_{\sigma} - x_K) \end{array} \right)$$

- schéma : trouver $u \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \Lambda(x) \nabla_{\mathcal{T}}u(x) \cdot \nabla_{\mathcal{T}}v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx,$$

$\forall v \in H_{\mathcal{T}}(\Omega) ?$

Construction de l'opérateur - 4

- synthèse : pour tout $u \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$, $\nabla_{\mathcal{T}}u \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)^d$:

$$\nabla_{\mathcal{T}}u_K = \frac{1}{m(K)} \left(\begin{array}{l} \sum_{L \in V_K} \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} (u_L - u_K) (\bar{x}_{K|L} - x_K) \\ + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K, \text{ext}}} \frac{m(\sigma)}{d(x_K, \sigma)} (0 - u_K) (\bar{x}_{\sigma} - x_K) \end{array} \right)$$

- schéma : trouver $u \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \Lambda(x) \nabla_{\mathcal{T}}u(x) \cdot \nabla_{\mathcal{T}}v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx,$$

$\forall v \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$?

- **non**, car $C \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla_{\mathcal{T}}u\|_{L^2(\Omega)^d}$, $\forall \mathcal{T}$, $\forall u \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$
 $\Rightarrow C = 0 \dots$

Schéma VF pour op. elliptique

- trouver $u \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} (\Lambda(x) - \alpha I) \nabla_{\mathcal{T}} u(x) \cdot \nabla_{\mathcal{T}} v(x) dx + \alpha [u, v]_{\mathcal{T}} = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \forall v \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$$

Schéma VF pour op. elliptique

- trouver $u \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} (\Lambda(x) - \alpha I) \nabla_{\mathcal{T}} u(x) \cdot \nabla_{\mathcal{T}} v(x) dx + \alpha [u, v]_{\mathcal{T}} = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \forall v \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$$

- expression du flux obtenue avec $v = 1_K$

$$F_{KL} = \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} \begin{pmatrix} \alpha(u_K - u_L) + \\ \Lambda_L(\bar{x}_{K|L} - x_L) \cdot (\nabla_{\mathcal{T}} u)_L \\ -\Lambda_K(\bar{x}_{K|L} - x_K) \cdot (\nabla_{\mathcal{T}} u)_K \end{pmatrix}$$

avec

$$\Lambda_K = \frac{1}{m(K)} \int_K (\Lambda(x) - \alpha I) dx$$

Schéma VF pour op. elliptique

- trouver $u \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} (\Lambda(x) - \alpha I) \nabla_{\mathcal{T}} u(x) \cdot \nabla_{\mathcal{T}} v(x) dx + \alpha [u, v]_{\mathcal{T}} = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \forall v \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$$

- expression du flux obtenue avec $v = 1_K$

$$F_{KL} = \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} \begin{pmatrix} \alpha(u_K - u_L) + \\ \Lambda_L(\bar{x}_{K|L} - x_L) \cdot (\nabla_{\mathcal{T}} u)_L \\ -\Lambda_K(\bar{x}_{K|L} - x_K) \cdot (\nabla_{\mathcal{T}} u)_K \end{pmatrix}$$

avec

$$\Lambda_K = \frac{1}{m(K)} \int_K (\Lambda(x) - \alpha I) dx$$

- Propriété : $u_{\mathcal{T}} \rightarrow \bar{u}$ dans $L^2(\Omega)$ et $\nabla_{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}} \rightarrow \nabla \bar{u}$ dans $L^2(\Omega)^d$

Preuve de $u_{\mathcal{T}} \rightarrow \bar{u}$

- estimation $\alpha[u, u]_{\mathcal{T}} \leq \int_{\Omega} f(x)u(x)dx$ donc $\|u\|_{1, \mathcal{T}} \leq C$

Preuve de $u_{\mathcal{T}} \rightarrow \bar{u}$

- estimation $\alpha[u, u]_{\mathcal{T}} \leq \int_{\Omega} f(x)u(x)dx$ donc $\|u\|_{1, \mathcal{T}} \leq C$
- compacité : sous suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ convergente vers \bar{u}

Preuve de $u_{\mathcal{T}} \rightarrow \bar{u}$

- estimation $\alpha[u, u]_{\mathcal{T}} \leq \int_{\Omega} f(x)u(x)dx$ donc $\|u\|_{1, \mathcal{T}} \leq C$
- compacité : sous suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ convergente vers \bar{u}

- $$\int_{\Omega} (\Lambda(x) - \alpha I) \nabla_{\mathcal{T}_m} u_m(x) \cdot \nabla_{\mathcal{T}_m} P_{\mathcal{T}_m} \varphi(x) dx \rightarrow$$
$$\int_{\Omega} (\Lambda(x) - \alpha I) \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx$$

$$\alpha[u_m, P_{\mathcal{T}_m} \varphi]_{\mathcal{T}_m} \rightarrow \alpha \int_{\Omega} \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx$$

$$\int_{\Omega} f(x) P_{\mathcal{T}_m} \varphi(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$$

Preuve de $u_{\mathcal{T}} \rightarrow \bar{u}$

- estimation $\alpha[u, u]_{\mathcal{T}} \leq \int_{\Omega} f(x)u(x)dx$ donc $\|u\|_{1, \mathcal{T}} \leq C$

- compacité : sous suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ convergente vers \bar{u}

- $$\int_{\Omega} (\Lambda(x) - \alpha I) \nabla_{\mathcal{T}_m} u_m(x) \cdot \nabla_{\mathcal{T}_m} P_{\mathcal{T}_m} \varphi(x) dx \rightarrow$$
$$\int_{\Omega} (\Lambda(x) - \alpha I) \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx$$

$$\alpha[u_m, P_{\mathcal{T}_m} \varphi]_{\mathcal{T}_m} \rightarrow \alpha \int_{\Omega} \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx$$

$$\int_{\Omega} f(x) P_{\mathcal{T}_m} \varphi(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$$

- donc \bar{u} solution faible ; unicité \Rightarrow cv quand $|\mathcal{T}| \rightarrow 0$

Preuve de $\nabla_{\mathcal{T}_m} u_m \rightarrow \nabla \bar{u}$

- $\liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\Lambda(x) - \alpha I) \nabla_{\mathcal{T}_m} u_m(x) \cdot \nabla_{\mathcal{T}_m} u_m(x) dx \geq \int_{\Omega} (\Lambda(x) - \alpha I) \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla \bar{u}(x) dx$

Preuve de $\nabla_{\mathcal{T}_m} u_m \rightarrow \nabla \bar{u}$

- $\liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\Lambda(x) - \alpha I) \nabla_{\mathcal{T}_m} u_m(x) \cdot \nabla_{\mathcal{T}_m} u_m(x) dx \geq \int_{\Omega} (\Lambda(x) - \alpha I) \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla \bar{u}(x) dx$
- $\lim_{m \rightarrow \infty} [u_m, u_m]_{\mathcal{T}_m} = \int_{\Omega} (\nabla \bar{u}(x))^2 dx$

Preuve de $\nabla_{\mathcal{T}_m} u_m \rightarrow \nabla \bar{u}$

- $\liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\Lambda(x) - \alpha I) \nabla_{\mathcal{T}_m} u_m(x) \cdot \nabla_{\mathcal{T}_m} u_m(x) dx \geq \int_{\Omega} (\Lambda(x) - \alpha I) \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla \bar{u}(x) dx$
- $\lim_{m \rightarrow \infty} [u_m, u_m]_{\mathcal{T}_m} = \int_{\Omega} (\nabla \bar{u}(x))^2 dx$
- $\int_{\Omega} (\nabla_{\mathcal{T}_m} u_m(x) - \nabla_{\mathcal{T}_m} P_{\mathcal{T}_m} \varphi(x))^2 dx \leq C (\|u_m(x) - \nabla_{\mathcal{T}_m} P_{\mathcal{T}_m} \varphi\|_{1, \mathcal{T}_m})^2$

Preuve de $\nabla_{\mathcal{T}_m} u_m \rightarrow \nabla \bar{u}$

- $\liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\Lambda(x) - \alpha I) \nabla_{\mathcal{T}_m} u_m(x) \cdot \nabla_{\mathcal{T}_m} u_m(x) dx \geq \int_{\Omega} (\Lambda(x) - \alpha I) \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla \bar{u}(x) dx$
- $\lim_{m \rightarrow \infty} [u_m, u_m]_{\mathcal{T}_m} = \int_{\Omega} (\nabla \bar{u}(x))^2 dx$
- $\int_{\Omega} (\nabla_{\mathcal{T}_m} u_m(x) - \nabla_{\mathcal{T}_m} P_{\mathcal{T}_m} \varphi(x))^2 dx \leq C (\|u_m(x) - \nabla_{\mathcal{T}_m} P_{\mathcal{T}_m} \varphi\|_{1, \mathcal{T}_m})^2$
- $\limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\nabla_{\mathcal{T}_m} u_m(x) - \nabla_{\mathcal{T}_m} P_{\mathcal{T}_m} \varphi(x))^2 dx \leq C \int_{\Omega} (\nabla \bar{u}(x) - \nabla \varphi(x))^2 dx$

Preuve de $\nabla_{\mathcal{T}_m} u_m \rightarrow \nabla \bar{u}$

- $\liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\Lambda(x) - \alpha I) \nabla_{\mathcal{T}_m} u_m(x) \cdot \nabla_{\mathcal{T}_m} u_m(x) dx \geq \int_{\Omega} (\Lambda(x) - \alpha I) \nabla \bar{u}(x) \cdot \nabla \bar{u}(x) dx$
- $\lim_{m \rightarrow \infty} [u_m, u_m]_{\mathcal{T}_m} = \int_{\Omega} (\nabla \bar{u}(x))^2 dx$
- $\int_{\Omega} (\nabla_{\mathcal{T}_m} u_m(x) - \nabla_{\mathcal{T}_m} P_{\mathcal{T}_m} \varphi(x))^2 dx \leq C (\|u_m(x) - \nabla_{\mathcal{T}_m} P_{\mathcal{T}_m} \varphi\|_{1, \mathcal{T}_m})^2$
- $\limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\nabla_{\mathcal{T}_m} u_m(x) - \nabla_{\mathcal{T}_m} P_{\mathcal{T}_m} \varphi(x))^2 dx \leq C \int_{\Omega} (\nabla \bar{u}(x) - \nabla \varphi(x))^2 dx$
- $\varphi \rightarrow \bar{u}$ (preuve reste valable quand $\Lambda = \alpha I$)

Plan

1. Méthodes numériques en milieux poreux
2. Espaces discrets pour volumes finis
3. Application aux problèmes anisotropes
4. Exemples numériques

Cas homogènes isotropes

- Laplacien, maillage uniforme rectangles
VF4 : ordre 2 sur u , ordre 1 sur ∇u (EGH 00)
VF13 : ordre 2.5 sur u , ordre 1.5 sur ∇u , ($\alpha = 1.5$)

Cas homogènes isotropes

- Laplacien, maillage uniforme rectangles
VF4 : ordre 2 sur u , ordre 1 sur ∇u (EGH 00)
VF13 : ordre 2.5 sur u , ordre 1.5 sur ∇u , ($\alpha = 1.5$)
- Laplacien, maillage regulier triangles
VF4 : ordre 2 sur u , ordre 1 sur ∇u (EGH 00)
VF10 : ordre 2 sur u , ordre 1 sur ∇u

Cas anisotrope homogène

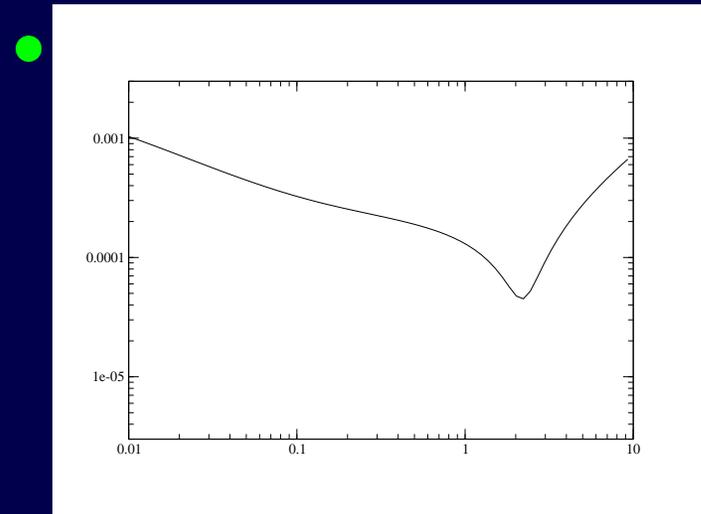
- $\Lambda = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$ (valeurs propres 1 et 2)

$$u(x^{(1)}, x^{(2)}) = x^{(1)}(1 - x^{(1)})x^{(2)}(1 - x^{(2)})$$

Cas anisotrope homogène

- $\Lambda = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$ (valeurs propres 1 et 2)

$$u(x^{(1)}, x^{(2)}) = x^{(1)}(1 - x^{(1)})x^{(2)}(1 - x^{(2)})$$

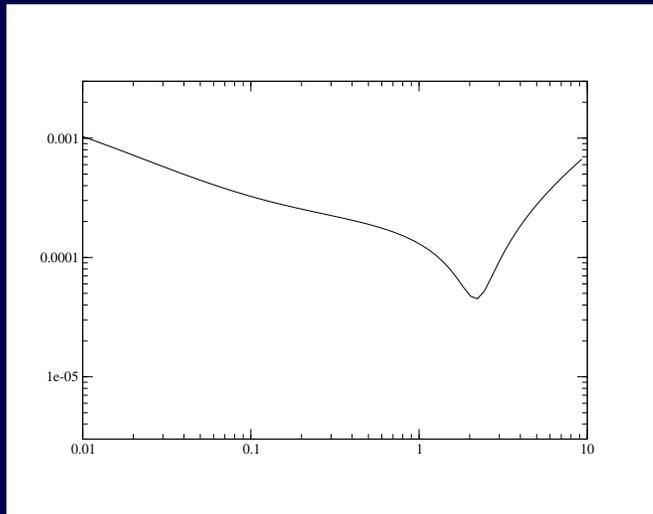


Erreur en fonction de α
grille 25×25

Cas anisotrope homogène

- $\Lambda = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$ (valeurs propres 1 et 2)

$$u(x^{(1)}, x^{(2)}) = x^{(1)}(1 - x^{(1)})x^{(2)}(1 - x^{(2)})$$



Erreur en fonction de α
grille 25×25

- VF13 (rect.) : ordre 2 pour u , ordre 1.5 pour ∇u
VF10 (tri.) : ordre 2 pour u , ordre 1 pour ∇u

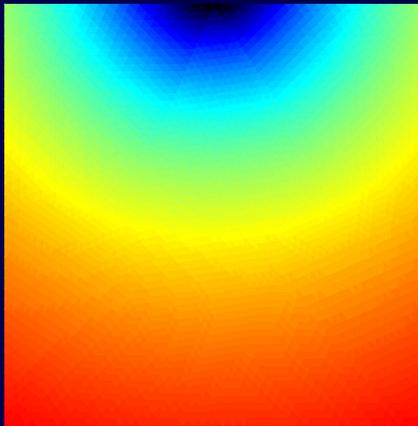
Cas anisotrope hétérogène

- $\Lambda(x) = \begin{pmatrix} 10 & .2 \\ .2 & 10 \end{pmatrix}$ dans repère $(r(x), \theta(x))$,
 $p(x) = \ln(|x|)$, origine extérieure au domaine

Cas anisotrope hétérogène

- $\Lambda(x) = \begin{pmatrix} 10 & .2 \\ .2 & 10 \end{pmatrix}$ dans repère $(r(x), \theta(x))$,
 $p(x) = \ln(|x|)$, origine extérieure au domaine

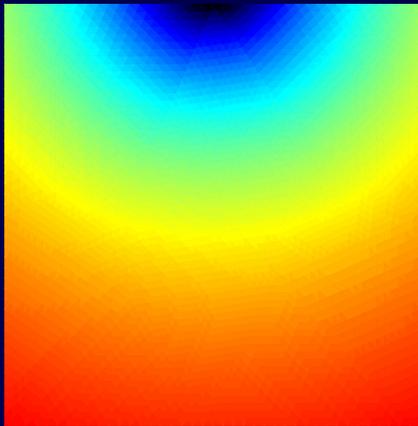
-



Cas anisotrope hétérogène

- $\Lambda(x) = \begin{pmatrix} 10 & .2 \\ .2 & 10 \end{pmatrix}$ dans repère $(r(x), \theta(x))$,
 $p(x) = \ln(|x|)$, origine extérieure au domaine

-



- VF13 (rect.) : ordre 2.07 pour u , ordre 1.65 pour ∇u
VF10 (tri.) : ordre 2.02 pour u , ordre 1.3 pour ∇u

Conclusions

- schéma VF pour problèmes anisotropes hétérogènes

Conclusions

- schéma VF pour problèmes anisotropes hétérogènes
- convergence, estimation d'erreur

Conclusions

- schéma VF pour problèmes anisotropes hétérogènes
- convergence, estimation d'erreur
- applications aux écoulements en milieu poreux