

Conditions limites pour les volumes finis de Petrov-Galerkin

Mohamed-Mahdi TEKITEK,
Université Paris-Sud

S.BOREL (ONERA) , F. DUBOIS (CNAM et Paris-Sud),
C. LE POTIER (CEA-Saclay)

Paris, 21 Décembre 2004

Plan de l'exposé

1. Volumes finis de Petrov-Galerkin.
2. Explicitation et mise en œuvre des conditions limites.
3. Application avec une diffusion anisotrope.
4. Conclusions.

1-Volumes finis de Petrov-Galerkin

Cette méthode repose sur une formulation en éléments finis mixtes de Petrov-Glerkin et s'appuie sur la construction d'une base duale de Raviart-Thomas par minimisation par moindres carrés. On est ramené à la détermination des flux sur les bords des mailles.

- Eléments finis mixtes.

Dans un premier lieu on considère le problème de Dirichlet homogène.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} p = \nabla u & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} p + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Formulation variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u, p) \in L^2(\Omega) \times H(\operatorname{div}, \Omega) \\ (p, q) + (u, \operatorname{div} q) = 0 \quad \forall q \in H(\operatorname{div}, \Omega) \\ (\operatorname{div} p, v) + (f, v) = 0 \quad \forall v \in L^2 \end{array} \right.$$

- Discrétisation des espaces fonctionnels.

On se donne un maillage \mathcal{T} de Ω de triangle K ($K \in \mathcal{T}^2$), d'arêtes a ($a \in \mathcal{T}^1$) et de neuds S ($S \in \mathcal{T}^0$).

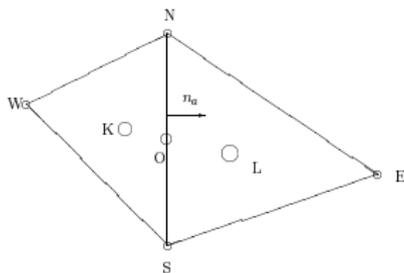
Soit $L^2_\tau(\Omega)$ l'espace d'approximation \mathbb{P}_0 de dimension fini de $L^2(\Omega)$, soit $H_\tau(\text{div}, \Omega)$ l'espace d'approximation \mathbb{RT}_0 de $H(\text{div}, \Omega)$.

- Fonctions de base de Raviart-Thomas.

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2|K|} (x - W), & x \in K \\ -\frac{1}{2|L|} (x - E), & x \in L \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\varphi_a \in H(\text{div}, \Omega)$$

$$\int_b \varphi_a \cdot n_b ds = \delta_{ab} \quad \forall a, b \in \mathcal{T}^1$$



- Volumes fins de Petrov-Galerkin.

Idée : Construire un espace fonctionnel $H_\tau^*(\text{div}, \Omega)$ généré par des fonctions vectorielles φ_a^* , $a \in \mathcal{T}^1$ duales des fonctions $\{\varphi_a, a \in \mathcal{T}^1\}$ base de $H_\tau(\text{div}, \Omega)$.

Remplacer $H(\text{div}, \Omega)$ par $H_\tau^*(\text{div}, \Omega)$ dans la première équation de la formulation variationnelle.

Formulation variationnelle :

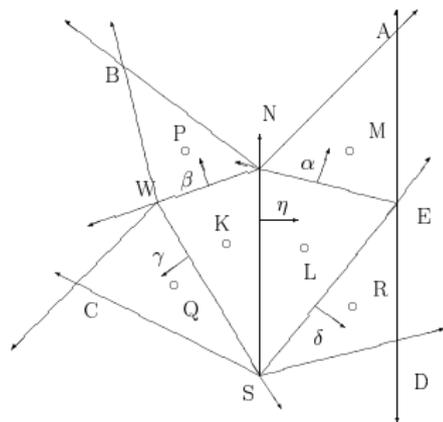
$$\left\{ \begin{array}{l} (u_\tau, p_\tau) \in L_\tau^2(\Omega) \times H_\tau(\text{div}, \Omega) \\ (p_\tau, q) + (u_\tau, \text{div}q) = 0 \quad \forall q \in H_\tau^*(\text{div}, \Omega) \\ (\text{div}p_\tau, v) + (f, v) = 0 \quad \forall v \in L_\tau^2 \end{array} \right.$$

- Construction d'une base duale représentée dans $H(\operatorname{div}, \Omega)$ des fonctions de base de Raviart-Thomas pour une arête intérieure.

$$\left\{ \begin{array}{l} (H1) : \varphi_b^* \in H(\operatorname{div}, \Omega) \quad \forall b \in \mathcal{T}^1 \\ (H2) : (\varphi_a, \varphi_b^*) = \delta_{ab} \quad \forall a, b \in \mathcal{T}^1 \\ (H3) : \operatorname{div} \varphi_b^* \in L^2_\tau(\Omega) \quad \forall b \in \mathcal{T}^1 \end{array} \right.$$

Pour chaque face intérieure $a = (SN)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu(S, N) \subset K \cup L \cup M \cup P \cup Q \cup R \\ (H4) : \operatorname{supp}(\varphi_{SN}^*) \subset \nu(S, N) \end{array} \right.$$



Comme $p \in H_\tau(\text{div}, \Omega)$ donc on peut l'exprimer dans la base de Raviart-Thomas. $p = \sum_{a \in \tau^1} p_a \varphi_a$.

On écrit faiblement $p = \nabla u$:

$$\int_{\Omega} p \varphi_b^* dx = \int_{\Omega} \nabla u \varphi_b^* dx = \int_{\partial \nu(S, N)} u \varphi_b^* . n ds - \sum_{K \in \nu(S, N)} u_K \int_{\partial K} \varphi_b^* . n ds$$

d'autre part $\int_{\Omega} p \varphi_b^* dx = p_b = \int_b \nabla u . n_b ds$

Méthode de volumes finis : $\int_b \nabla u . n_b ds = - \sum_{K \in \nu(S, N)} u_K \int_{\partial K} \varphi_b^* . n ds$

- Conditions nécessaires sur les fonctions de bases duales.

On pose:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta \equiv \int_{SN} \varphi_{SN}^* \cdot n_{SN} ds, \\ \alpha \equiv \int_{EN} \varphi_{SN}^* \cdot n_{EN} ds, \quad \beta \equiv \int_{NW} \varphi_{SN}^* \cdot n_{NW} ds, \\ \gamma \equiv \int_{WS} \varphi_{SN}^* \cdot n_{WS} ds, \quad \delta \equiv \int_{SE} \varphi_{SN}^* \cdot n_{SE} ds, \end{array} \right.$$

Flux normal de ∇u sur une arête intérieure $b = (SN)$

$$\int_{b=SN} \nabla u \cdot n_b ds = \eta(u_L - u_K) + \alpha(u_M - u_L) \\ + \beta(u_P - u_K) + \gamma(u_Q - u_K) + \delta(u_R - u_L)$$

Les relations d'orthogonalité impliquent (F, Dubois, FVCA 2002) :

$$\eta \overrightarrow{K\bar{L}} + \alpha \overrightarrow{L\bar{M}} + \beta \overrightarrow{K\bar{P}} + \gamma \overrightarrow{K\bar{Q}} + \delta \overrightarrow{L\bar{R}} = |SN| n_{SN} \\ \alpha \overrightarrow{L\bar{M}} \cdot \overrightarrow{W\bar{A}} + \beta \overrightarrow{K\bar{P}} \cdot \overrightarrow{E\bar{B}} + \gamma \overrightarrow{K\bar{Q}} \cdot \overrightarrow{E\bar{C}} + \delta \overrightarrow{L\bar{R}} \cdot \overrightarrow{W\bar{D}} = -3|SN| n_{SN} \cdot (\overrightarrow{O\bar{L}} + \overrightarrow{O\bar{K}})$$

- Heristique : méthode de minimisation par moindres carrés.

Idée : minimiser les termes extradiagonaux de la matrice globale de discrétisation pour tenter d'obtenir des propriétés de positivité de la matrice.

On cherche η qui minimise

$$I(\eta) = \left(\frac{|SN|}{\eta} n_{SN} - \overrightarrow{KL} \right)^2 + \left(3 \frac{|SN|}{\eta} n_{SN} \cdot (\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OK}) \right)^2$$

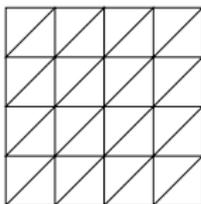
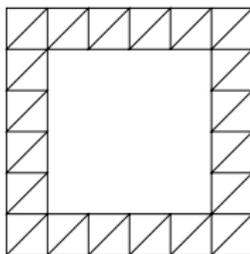
Puis on cherche α , β , γ et δ qui minimisent

$$J(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(\frac{\alpha}{\eta} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{\eta} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\eta} \right)^2 + \left(\frac{\delta}{\eta} \right)^2$$

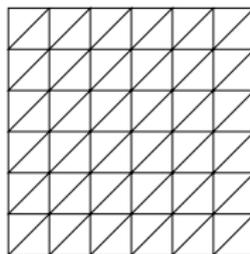
sous contrainte , η étant fixé par la précédente minimisation.

- Premier test de l'algorithme (S. Borel, 2002).

Le schéma de volumes finis est bien défini pour les arêtes intérieures ($a \in \mathcal{T}_I^1$) du maillage. Pour tester l'algorithme, on utilise une idée des mailles fictives proposer par C. Le Potier.

Maillage \mathcal{T} du domaine Ω 

Mailles fictives



Maillage total

On impose alors les conditions aux limites sur les mailles fictives.
Ainsi toute les arêtes du maillage \mathcal{T} sont intérieures.

- Algorithme.

On va remplacer le problème initial par le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \partial_t u & = & \operatorname{div} p & \text{dans } \Omega \\ p & = & \nabla u & \text{dans } \Omega \\ u(t=0) & = & u_0 & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

qui calcule la solution u du problème initiale sans inverser directement la matrice de discrétisation globale.

On utilise un schéma d'Euler explicite pour la discrétisation en temps, qui est stable.

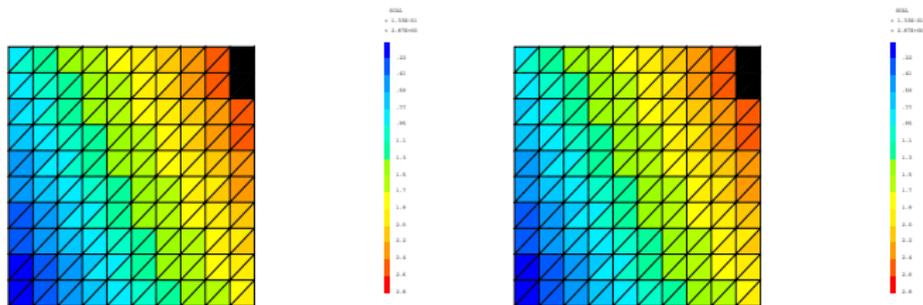
Expression de l'algorithme :

$$\left\{ \begin{array}{l} mes(K) \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{\delta t} = \sum_{a \in A_K} \int_a \nabla u^n \cdot n_a ds = [\eta_a(u_{La}^n - u_{Ka}^n) \\ + \alpha_a(u_{Ma}^n - u_{La}^n) + \beta_a(u_{Pa}^n - u_{Ka}^n) + \gamma_a(u_{Qa}^n - u_{Ka}^n) + \delta_a(u_{Ra}^n - u_{La}^n)] \end{array} \right.$$

Remarque : Le schéma est linéairement exact, c'est à dire que si on prend une solution u affine alors l'expression du gradient est exact.

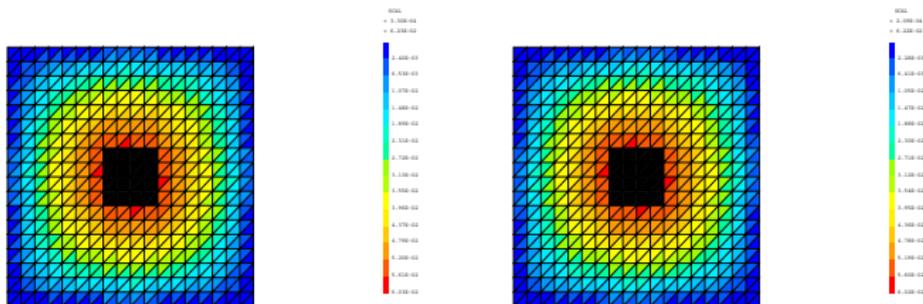
Premiers résultats numériques :

1^{er} cas test : solution affine



À gauche, interpolé de la température exacte $u(x, y) = 2x + y$, à droite, interpolé de la température calculée à $t=1.11$.

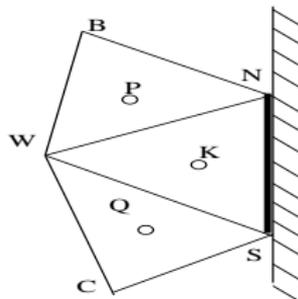
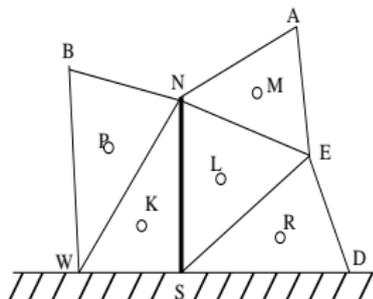
2^{eme} cas test : solution polynomiale de degré 4



À gauche, interpolé de la température exacte $u(x, y) = x(1-x)y(1-y)$, à droite, interpolé de la température calculée à $t=1.01$.

2-Explicitation des conditions limites :

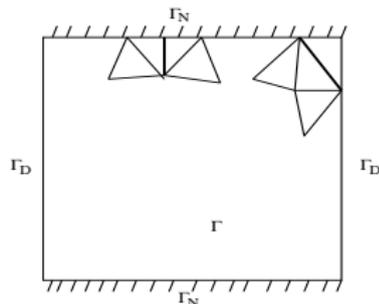
Si l'arête n'est pas intérieure.



arête (S, N) qui touche le bord arête du bord $(S, N) \subset \partial\Omega$

Un graphe de dépendance (stencil) moins riche.

De l'information en plus sur le bord $\partial\Omega$.



On introduit les notations suivantes :

Condition de Dirichlet : $\mathcal{T}_D^1 = \{a \in \mathcal{T}^1, \bar{a} \subset \Gamma_D\}$

Condition de Neumann : $\mathcal{T}_N^1 = \{a \in \mathcal{T}^1, \bar{a} \subset \Gamma_N\}$

Arête semi-bord : $\mathcal{T}_S^1 = \{a \in \mathcal{T}^1, \bar{a} \notin \mathcal{T}_D^1 \cup \mathcal{T}_N^1\}$

- Conditions limites de Dirichlet $\partial\Omega = \Gamma_D$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma_D \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} p = \nabla u & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} p + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma_D \end{array} \right.$$

On a $p \in H_\tau(\operatorname{div}, \Omega)$, donc $p = \sum_{a \in \tau^1} p_a \varphi_a$.

On écrit faiblement $p = \nabla u$

$$\int_{\Omega} p \varphi_b^* dx = \int_{\Omega} \nabla u \varphi_b^* dx = \int_{\partial\nu(b)} u \varphi_b^* . n ds - \sum_{K \in \nu(b)} u_K \int_{\partial K} \varphi_b^* . n ds$$

avec $b = (S, N)$

On va adapter les fonctions duales φ_b^*

- Cas d'une arête $b = (S, N)$ qui touche le bord $b \in \mathcal{T}_S^1$:

$$H5 : \int_a \varphi_b^* \cdot n_a s ds = 0 \quad a \in \mathcal{T}_D^1, \bar{a} \cap \nu(b) \neq \emptyset.$$

$$a = (W, S)$$

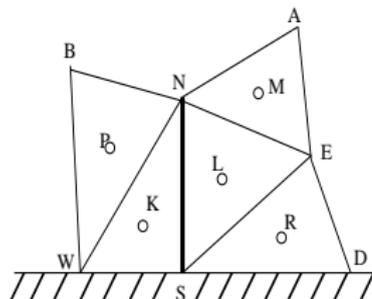
approximation affine de u sur le bord :

$$u(s) = \bar{u} + s G(0) + \mathcal{O}(s^2).$$

$$\bar{u}_a = \frac{1}{a} \int_a g(s) ds$$

$$\int_{WS} u \varphi_{SN}^* \cdot n_{WS} ds =$$

$$\bar{u}_{WS} \int_{WS} \varphi_{SN}^* \cdot n_{WS} ds + G(0) \int_{WS} \varphi_{SN}^* \cdot n_{WS} s ds = \gamma \bar{u}_{WS}$$



$$\int_{\Omega} p\varphi_b^* dx = \int_{\Omega} \nabla u \varphi_b^* dx = \gamma \bar{u}_{WS} - \sum_{K \in \nu(b)} u_K \int_{\partial K} \varphi_b^* \cdot n ds$$

$$= [\eta(u_L - u_K) + \alpha(u_M - u_L) + \beta(u_P - u_K) + \gamma(\bar{u}_{WS} - u_K) + \delta(u_R - u_L)]$$

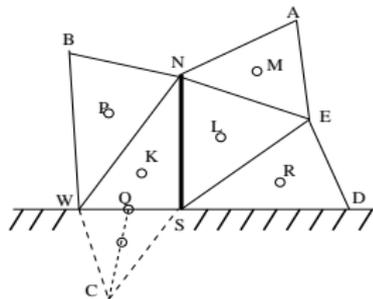
or

$$\int_{\Omega} p\varphi_b^* dx = \sum_{a \in \tau^1} p_a \int_{\Omega} \varphi_a \varphi_b^* dx = p_b = \int_b \nabla u \cdot n_b ds$$

d'où

$$\int_b \nabla u \cdot n_b ds = [\eta(u_L - u_K) + \alpha(u_M - u_L) + \beta(u_P - u_K)$$

$$+ \gamma(\bar{u}_{WS} - u_K) + \delta(u_R - u_L)]$$



L'hypothèse $H5$ revient à étudier la limite des relations d'orthogonalité lorsque le point C tend vers (W, S) .
Cela revient à rajouter un degré de liberté sur le milieu des arêtes du bord Γ_D .

Il reste à déterminer les différents flux de φ_b^* lorsque $b = (SN) \in \mathcal{T}_S^1$.
Dans les cas où on a un triangle Q en moins, on perd deux relations d'orthogonalité.

Conditions nécessaires sur les flux de la fonction φ_b^* .

$$\eta \overrightarrow{KL} + \alpha \overrightarrow{LM} + \beta \overrightarrow{KP} + \gamma \overrightarrow{KQ} + \delta \overrightarrow{LR} = |SN| n_{SN}$$

On a perdu la relation scalaire supplémentaire entre les 5 flux.

- Méthode de minimisation par moindres carrés.

On cherche η qui minimise

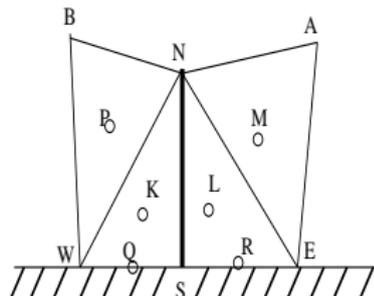
$$I(\eta) = \left(\frac{|SN|}{\eta} n_{SN} - \overrightarrow{KL} \right)^2$$

Puis on cherche α , β , γ et δ qui minimisent

$$J(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(\frac{\alpha}{\eta} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{\eta} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\eta} \right)^2 + \left(\frac{\delta}{\eta} \right)^2$$

sous contrainte , η étant fixé par la précédente minimisation.

- Dirichlet avec deux triangles en moins.



$$H5 : \int_{WS} \varphi_{(SN)}^* \cdot n_{WS} s ds = 0, \int_{ES} \varphi_{(SN)}^* \cdot n_{ES} s ds = 0$$

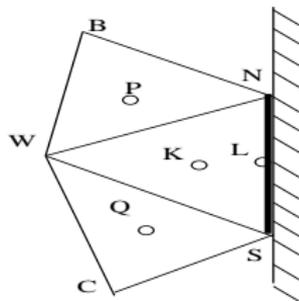
$$\int_b \nabla u \cdot n_b ds = [\eta(u_L - u_K) + \alpha(u_M - u_L) + \beta(u_P - u_K) + \gamma(\bar{u}_{WS} - u_K) + \delta(\bar{u}_{ES} - u_L)]$$

$$\text{avec } \bar{u}_{WS} = \frac{1}{WS} \int_{WS} g(s) ds, \bar{u}_{ES} = \frac{1}{ES} \int_{ES} g(s) ds$$

C.N :

$$\eta \overrightarrow{KL} + \alpha \overrightarrow{LM} + \beta \overrightarrow{KP} + \gamma \overrightarrow{KQ} + \delta \overrightarrow{LR} = |SN| n_{SN}$$

- Cas d'une arête $b = (S, N)$ du bord Γ_D , $b \in \mathcal{T}_D^1$:



$$H5 : \int_{SN} \varphi_{(SN)}^* \cdot n_{SN} \, ds = 0.$$

Calcul du flux :

$$\int_b \nabla u \cdot n_b \, ds = [\eta(\bar{u}_{SN} - u_K) + \beta(u_P - u_K) + \gamma(u_Q - u_K)]$$

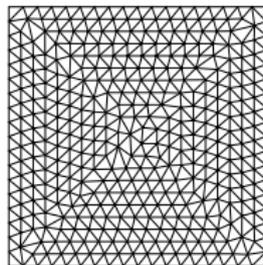
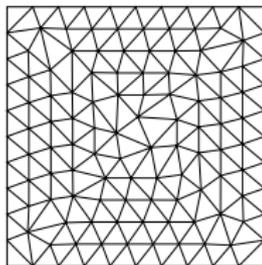
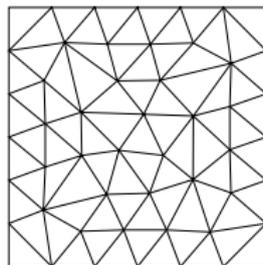
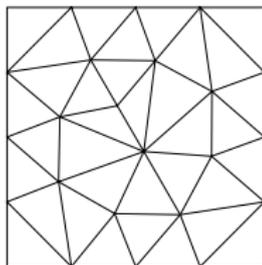
avec $\bar{u}_{NS} = \frac{1}{NS} \int_{NS} g(s) \, ds.$

C.N :

$$\eta \overrightarrow{KL} + \beta \overrightarrow{KP} + \gamma \overrightarrow{KQ} = |SN| n_{SN}$$

Résultats numériques :

- Le domaine Ω est un carré maillé en triangles quelconques :

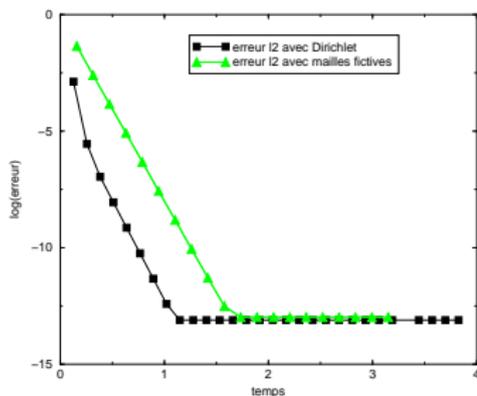


Erreurs calculées :

$$Err (l^2) = \left(\sum_{K \in \mathcal{E}_\tau} \text{mes}(K) |Num(K) - Exacte(K)|^2 \right)^{1/2}$$

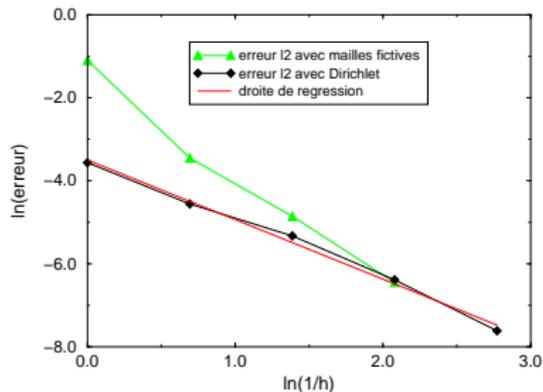
$$Err (L^\infty) = \max_{K \in \mathcal{E}_\tau} |Num(K) - Exacte(K)|$$

- 1^{er} cas test : solution affine $u(x, y) = 2x + y$.

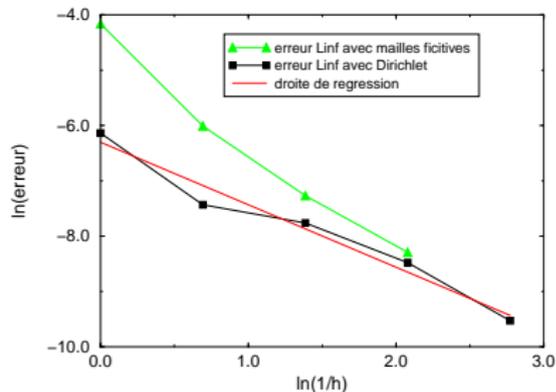


Comparaison des courbes d'erreurs ℓ^2 pour le cas où on tient compte des conditions de Dirichlet et le cas où on utilise les mailles fictives. Les courbes d'erreurs indiquent une erreur de l'ordre de l'erreur machine. On retrouve le fait que le schéma est exact pour une solution affine.

- 2^{eme} cas test : solution polynomiale de degré 4 :
 $u(x, y) = x(1 - x)y(1 - y)$

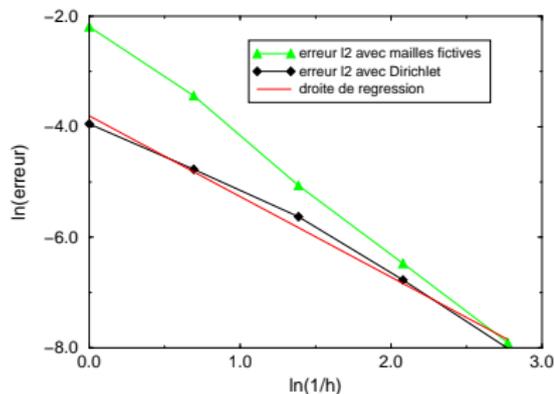


Convergence ℓ^2 : ordre 1.7

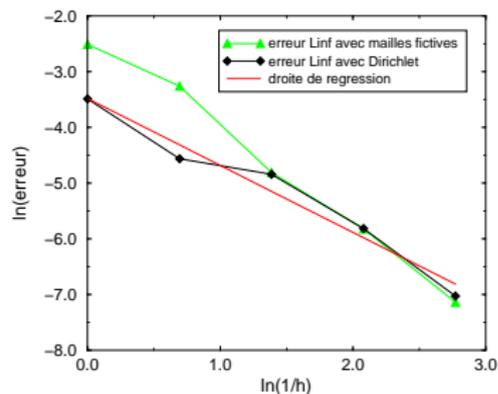


Convergence L^∞ : ordre 1.5

- 3^{eme} cas test : solution en produit de sinus :
 $u(x, y) = \sin(\pi x) * \sin(\pi x)$



Convergence ℓ^2 : ordre 1.8



Convergence L^∞ : ordre 1.7

Conditions limites de Neumann $\partial\Omega = \Gamma_N$

(M. Tekitek, 2003).

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h & \text{sur } \Gamma_N \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} p = \nabla u & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} p + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h & \text{sur } \Gamma_h \end{array} \right.$$

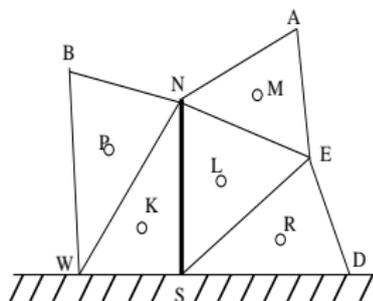
Si l'arête $b \in \mathcal{T}_N^1$ avec $\mathcal{T}_N^1 = \{a \in \mathcal{T}^1, \bar{a} \subset \Gamma_N\}$.

$$\int_b p \cdot n_b = \int_b \frac{\partial u}{\partial n} = \int_b h = \bar{p}_b$$

On a alors la décomposition suivante de p dans $H_\tau(\operatorname{div}, \Omega)$:

$$p = \sum_{a \in \tau^1 \setminus \tau_N^1} p_a \varphi_a + \sum_{b \in \tau_N^1} \bar{p}_b \varphi_b$$

- Flux de gradient u à travers une arête $b = (SN) \in \tau_S^1$.



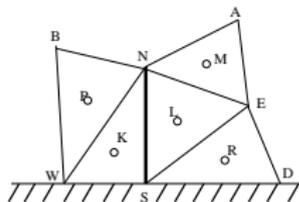
tenir compte de \bar{p}_b .

$$\int_{\Omega} p \varphi_b^* dx = \int_{\partial\nu(b)} u \varphi_b^* . n ds - \sum_{K \in \nu(b)} u_K \int_{\partial K} \varphi_b^* . n ds$$

- Hypothèses sur les φ_b^* avec $b = (SN) \in \tau_S^1$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} (H1) : \varphi_b^* \in H(\operatorname{div}, \Omega) & \forall b \in \mathcal{T}_S^1 \\ (H'2) : (\varphi_a, \varphi_b^*) = \int_{\Omega} \varphi_a \varphi_b^* dx = \delta_{ab} & \forall a \in \mathcal{T}^1 \setminus \tau_N^1 \\ \text{donc } (\varphi_a, \varphi_b^*) = \int_{\Omega} \varphi_a \varphi_b^* dx \neq 0 & \text{\`a priori pour } a \in \tau_N^1 \\ (H3) : \operatorname{div} \varphi_b^* \in L^2_{\tau}(\Omega) & \forall b \in \mathcal{T}^1 \\ (H4) : \text{idem pour } \varphi_b^* & \forall b \in \mathcal{T}_S^1 \\ (H'5) : \varphi_b^* \cdot n_a \equiv 0 & \forall a \in \tau_N^1 \end{array} \right.$$

- Cas d'un triangle manquant :



$$(H'2) : \int_{\Omega} \varphi_{(WS)} \varphi_{(SN)}^* = \bar{\gamma}, \quad (H'5) : \varphi_{(SN)}^* \cdot n_{WS} = 0$$

$$\int_{\Omega} p \varphi_b^* dx = - \sum_{K \in \nu(b)} u_K \int_{\partial K} \varphi_b^* \cdot n ds$$

$$= [\eta(u_L - u_K) + \alpha(u_M - u_L) + \beta(u_P - u_K) + \delta(u_R - u_L)]$$

or

$$\int_{\Omega} p \varphi_b^* dx = \sum_{a \in \tau^1 \setminus \tau_N^1} p_a \int_{\Omega} \varphi_a \varphi_b^* dx + \sum_{a \in \tau_N^1} \bar{p}_a \int_{\Omega} \varphi_a \varphi_b^* dx = p_b + \bar{\gamma} \bar{p}_{WS}$$

$$p_b = \sum_{a \in \tau^1} p_a \int_b \varphi_a \cdot n_b ds = \int_b \nabla u \cdot n_b ds$$

Le flux est donné par :

$$\int_b \nabla u \cdot n_b ds = [\eta(u_L - u_K) + \alpha(u_M - u_L) + \beta(u_P - u_K) + \delta(u_R - u_L)] - \tilde{\gamma} \bar{p}_{WS}$$

avec $\bar{p}_{WS} = \int_{WS} h(s) ds$

Conditions nécessaires :

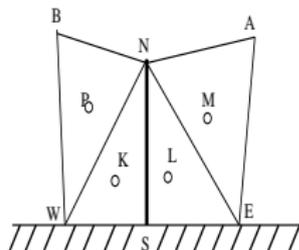
$$\left(\eta \overrightarrow{KL} + \alpha \overrightarrow{LM} + \beta \overrightarrow{KP} + \delta \overrightarrow{LR} \right) \cdot \frac{\overrightarrow{SN}}{SN} = -\frac{2|K|}{SN} \tilde{\gamma}$$

$$\frac{1}{SN} \left[\left(\eta \overrightarrow{KL} + \alpha \overrightarrow{LM} + \beta \overrightarrow{KP} + \delta \overrightarrow{LR} \right) \cdot n_{SN} \right] + \tilde{\gamma} \left(1 - \overrightarrow{WN} \cdot \frac{\overrightarrow{SN}}{SN^2} \right) = 1$$

Idee : on va utiliser la méthode de minimisation par moindres carrés sous contraintes pour déterminer $\eta, \alpha, \gamma, \delta$ et $\tilde{\beta}$.

Le schéma est linéairement exact.

- Cas de deux triangles manquants :



$$\int_b \nabla u \cdot n_b ds = [\eta(u_L - u_K) + \alpha(u_M - u_L) + \beta(u_P - u_K)] - \tilde{\gamma} \bar{p}_{WS} - \bar{\delta} \bar{p}_{ES}$$

$$\text{avec } \bar{p}_{WS} = \int_{WS} h(s) ds, \bar{p}_{ES} = \int_{ES} h(s) ds$$

Conditions nécessaires :

$$\left(\eta \overrightarrow{KL} + \alpha \overrightarrow{LM} + \beta \overrightarrow{KP} \right) \cdot \frac{\overrightarrow{SN}}{SN} = \frac{2|K|}{SN} (\tilde{\delta} - \tilde{\gamma})$$

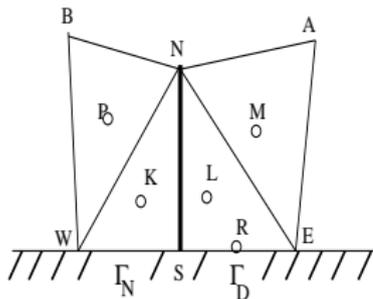
$$\frac{1}{SN} \left[\left(\eta \overrightarrow{KL} + \alpha \overrightarrow{LM} + \beta \overrightarrow{KP} \right) \cdot n_{SN} \right] + \frac{\tilde{\delta}}{2} \left(1 + (\overrightarrow{EN} + \overrightarrow{WN}) \cdot \frac{\overrightarrow{SN}}{SN^2} \right) \\ + \frac{\tilde{\gamma}}{2} \left(1 - (\overrightarrow{EN} + \overrightarrow{WN}) \cdot \frac{\overrightarrow{SN}}{SN^2} \right) = 1$$

Conditions limites mixtes

$$\int_{ES} \varphi_b^* \cdot n_{ES} s ds = 0$$

$$\int_{\Omega} \varphi_{WS}, \varphi_b^* dx = \bar{\gamma} \neq 0$$

$$\varphi_b^* \cdot n_{WS} = 0$$



Le flux est donné par :

$$\int_b \nabla u \cdot n_b ds = [\eta(u_L - u_K) + \alpha(u_M - u_L) + \beta(u_P - u_K) + \delta(\bar{u}_{SE} - u_L)] - \bar{\gamma} \bar{p}_{WS}$$

avec

$$\bar{p}_{WS} = \int_{WS} h(s) ds, \quad \bar{u}_{ES} = \frac{1}{ES} \int_{ES} g(s) ds$$

Conditions nécessaires :

$$\left(\eta\overrightarrow{KL} + \alpha\overrightarrow{LM} + \beta\overrightarrow{KP} + \delta\overrightarrow{LR}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{SN}}{SN} = -\frac{2|K|}{SN} \tilde{\gamma}$$

$$\frac{1}{SN} \left[\left(\eta\overrightarrow{KL} + \alpha\overrightarrow{LM} + \beta\overrightarrow{KP} + \delta\overrightarrow{LR}\right) \cdot n_{SN} \right] + \tilde{\gamma} \left(1 - \overrightarrow{WN} \cdot \frac{\overrightarrow{SN}}{SN^2} \right) = 1$$

Théorème :

La méthode est linéairement exacte. Ceci signifie que le calcul du gradient est exact si les degrés de liberté sont ceux d'une fonction affine.

3-Application avec une diffusion anisotrope

On se donne un champ de matrices $D(x)$ symétriques définies positives (où $x \in \Omega$), Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 et $f \in L^2(\Omega)$.

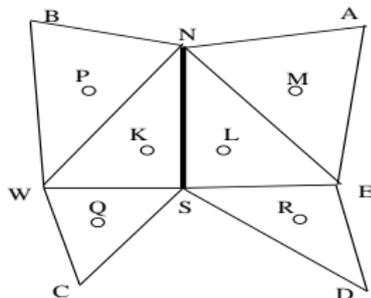
$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(D(x)\nabla u(x)) = f(x) \quad \forall \quad x \in \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p(x) = D(x)\nabla u(x) \quad \forall \quad x \in \Omega \\ \operatorname{div}p(x) + f(x) = 0 \quad \forall \quad x \in \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{array} \right.$$

Formulation variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u, p) \in L^2(\Omega) \times H(\operatorname{div}, \Omega) \\ (p, q) + (u, \operatorname{div}(D^t q)) = 0 \quad \forall D^t q \in H(\operatorname{div}, \Omega) \\ (\operatorname{div} p, v) + (f, v) = 0 \quad \forall v \in L^2 \end{array} \right.$$

- Construction de nouvelles fonctions de base duales.



$$\left\{ \begin{array}{ll} (H1) : \varphi_b^* \in H(\operatorname{div}, \Omega) & \forall b \in \mathcal{T}^1 \\ (H2) : \left(D^{-\frac{1}{2}}\varphi_a, D^{-\frac{1}{2}}\varphi_b^* \right) = \delta_{ab} & \forall a, b \in \mathcal{T}^1 \\ (H3) : \operatorname{div}\varphi_b^* \in L^2_\tau(\Omega) & \forall b \in \mathcal{T}^1 \end{array} \right.$$

Pour chaque face intérieure $a = (SN)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu(S, N) \subset K \cup L \cup M \cup P \cup Q \cup R \\ (H4) : \operatorname{supp}(\varphi_{SN}^*) \subset \nu(S, N) \end{array} \right.$$

$p \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ alors on a : $p = \sum_{a \in \tau^1} p_a \varphi_a$

$$\int_{SN} D\nabla u \cdot n_{SN} ds = \int_{SN} p \cdot n_{SN} ds = p_{SN}.$$

$$\int_{\Omega} p \cdot D^{-1} \varphi_{SN}^* = \sum_{a \in \tau^1} p_a \int_{\Omega} \varphi_a D^{-1} \varphi_{SN}^*$$

$$= \sum_{a \in \tau^1} p_a \int_{\Omega} D^{-\frac{1}{2}} \varphi_a D^{-\frac{1}{2}} \varphi_{SN}^* = p_{SN}.$$

$$\int_{\Omega} p \cdot D^{-1} \varphi_{SN}^* = \int_{\Omega} D\nabla u \cdot D^{-1} \varphi_{SN}^*$$

$$= - \sum_{K \in \nu(SN)} u_K \int_{\partial K} D^t D^{-1} \varphi_{SN}^* \cdot n ds$$

$$= \eta(u_L - u_K) + \alpha(u_M - u_L) + \beta(u_P - u_K) \\ + \gamma(u_Q - u_K) + \delta(u_R - u_L)$$

On a alors la décomposition suivante du flux de gradient u :

$$\int_{SN} D\nabla u \cdot n_{SN} ds = [\eta(u_L - u_K) + \alpha(u_M - u_L) + \beta(u_P - u_K) + \gamma(\bar{u}_{WS} - u_K) + \delta(u_R - u_L)]$$

Il reste à déterminer les différents flux η , α , β , γ et surtout trouver les conditions nécessaires entre ces flux qui découlent de l'hypothèse (H2) d'orthogonalité.

4-Conclusions et perspectives

- Le schéma proposé pour les conditions limites de type Dirichlet donne des résultats satisfaisants.
- On a proposé un schéma pour les conditions limites de type Neumann, mais il reste encore à le tester numériquement.
- Possibilité d'appliquer cette méthode à des problèmes de type elliptique, avec des tenseurs.
- S'intéresser à la limite de stabilité du schéma, et à l'amélioration de la méthode de minimisation par moindres carrés.