

---

# *Modélisation de la simplicité en compatibilité électromagnétique*



Les Maths du Cnam



---

*Les travaux présentés s'inscrivent en grande partie dans le cadre du REI DIAMANTS et sont financés comme tels par la DGA.*

*Contacts :*

*Mr Patrick Hoffmann, CEA : [patrick.hoffmann@cea.fr](mailto:patrick.hoffmann@cea.fr)*

*Mr Bernard Pecqueux, CEA : [bernard.pecqueux@cea.fr](mailto:bernard.pecqueux@cea.fr)*

*Mr Philippe Pouliguen, DGA : [philippe.pouliguen@dga.defense.gouv.fr](mailto:philippe.pouliguen@dga.defense.gouv.fr)*

*Pr Alain Reineix, Xlim : [alain.reineix@xlim.fr](mailto:alain.reineix@xlim.fr)*

*Pour le GERAC : [olivier.maurice@gerac.com](mailto:olivier.maurice@gerac.com)*

*Ou Philippe Boudy : [philippe.boudy@gerac.com](mailto:philippe.boudy@gerac.com)*



Les Maths du Cnam



# SOMMAIRE

---

- La complexité en compatibilité électromagnétique (CEM)
- L'évolution des architectures systèmes
- La complexité croissante des circuits électroniques
- Conséquence de la croissance des fonctions simples disponibles dans les systèmes électroniques
- Outils et démarches classiques actuels
- La limite de ces approches
- Mathématiser l'ingénierie : l'idée de Gabriel KRON
  - Travaux de Papin et Kaufmann
  - Les analyses de Banesh hoffmann
  - La mise en pratique pour la CEM : petit historique
- L'état d'avancement des travaux dans le cadre du REI DIAMANTS
  - Les objectifs du REI
  - Les interactions modélisées & techniques développées
- La capacité d'analyse théorique
- Perspectives :
  - Outils du futur



# SOMMAIRE

---

- La complexité en compatibilité électromagnétique (CEM)
- L'évolution des architectures systèmes
- La complexité croissante des circuits électroniques
- Conséquence de la croissance des fonctions simples disponibles dans les systèmes électroniques
- Outils et démarches classiques actuels
- La limite de ces approches
- Mathématiser l'ingénierie : l'idée de Gabriel KRON
  - Travaux de Papin et Kaufmann
  - Les analyses de Banesh hoffmann
  - La mise en pratique pour la CEM : petit historique
- L'état d'avancement des travaux dans le cadre du REI DIAMANTS
  - Les objectifs du REI
  - Les interactions modélisées & techniques développées
- La capacité d'analyse théorique
- Perspectives :
  - Outils du futur







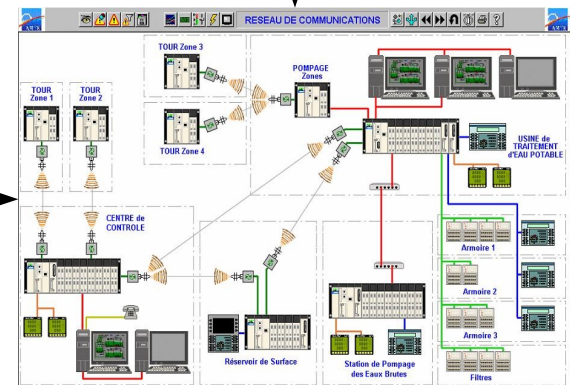
# SOMMAIRE

---

- La complexité en compatibilité électromagnétique (CEM)
- L'évolution des architectures systèmes
- La complexité croissante des circuits électroniques
- Conséquence de la croissance des fonctions simples disponibles dans les systèmes électroniques
- Outils et démarches classiques actuels
- La limite de ces approches
- Mathématiser l'ingénierie : l'idée de Gabriel KRON
  - Travaux de Papin et Kaufmann
  - Les analyses de Banesh hoffmann
  - La mise en pratique pour la CEM : petit historique
- L'état d'avancement des travaux dans le cadre du REI DIAMANTS
  - Les objectifs du REI
  - Les interactions modélisées & techniques développées
- La capacité d'analyse théorique
- Perspectives :
  - Outils du futur



# Liaison filaire





# SOMMAIRE

---

- La complexité en compatibilité électromagnétique (CEM)
- L'évolution des architectures systèmes
- La complexité croissante des circuits électroniques
- Conséquence de la croissance des fonctions simples disponibles dans les systèmes électroniques
- Outils et démarches classiques actuels
- La limite de ces approches
- Mathématiser l'ingénierie : l'idée de Gabriel KRON
  - Travaux de Papin et Kaufmann
  - Les analyses de Banesh hoffmann
  - La mise en pratique pour la CEM : petit historique
- L'état d'avancement des travaux dans le cadre du REI DIAMANTS
  - Les objectifs du REI
  - Les interactions modélisées & techniques développées
- La capacité d'analyse théorique
- Perspectives :
  - Outils du futur





# Poursuite de la loi de Moore

<i>Année de production</i>	<b>2007</b>	<b>2010</b>	<b>2013</b>	<b>2016</b>	<b>2019</b>	<b>2020</b>
<i>Nœud technologique (nm)</i>	<b>65</b>	<b>45</b>	<b>32</b>	<b>22</b>	<b>16</b>	<b>14</b>
<i>Longueur de grille physique (nm)</i>	<b>25</b>	<b>18</b>	<b>13</b>	<b>9</b>	<b>7</b>	<b>5</b>
<i>Type de dispositif</i>	« Bulk étendu »		?	Double (multi)-Grille		
<i>Épaisseur d'oxyde équivalente EOT (Å)</i>	<b>11</b>	<b>6.5</b>	<b>6.5-5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>
<i>Tension d'alimentation <math>V_{DD}</math> (V)</i>	<b>1.1</b>	<b>1.0</b>	<b>0.9</b>	<b>0.8</b>	<b>0.7</b>	<b>0.7</b>
<i>Courant à saturation <math>I_{D,sat}</math> (<math>\mu A/\mu m</math>)</i>	<b>1200</b>	<b>2050</b>	<b>2200</b>	<b>2700</b>	<b>2750</b>	<b>3000</b>
<i>Courant à l'état off <math>I_{off}</math> (<math>\mu A/\mu m</math>)</i>	<b>0.2</b>	<b>0.3</b>	<b>0.2</b>	<b>0.1</b>	<b>0.1</b>	<b>0.1</b>
<i>Délat intrinsèque (NMOS) <math>\tau=CV/I</math> (ps)</i>	<b>0.64</b>	<b>0.4</b>	<b>0.25</b>	<b>0.150</b>	<b>0.1</b>	<b>0.08</b>
<i>Vitesse de commutation intrinsèque <math>1/\tau</math> (GHz)</i>	<b>1564</b>	<b>2500</b>	<b>4000</b>	<b>6667</b>	<b>10000</b>	<b>12500</b>

## Propriétés des matériaux

- diélectriques (permittivité)
- mécaniques (contraintes)
- transport (mobilité)

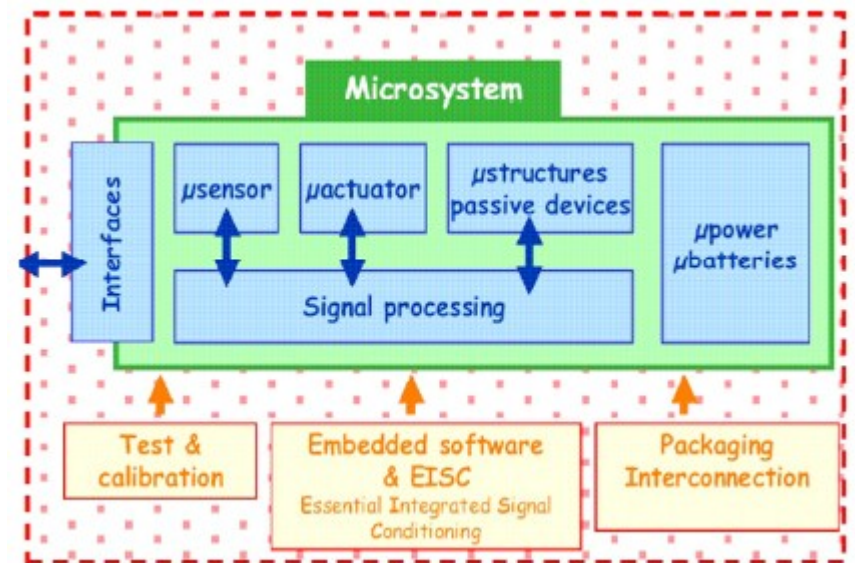
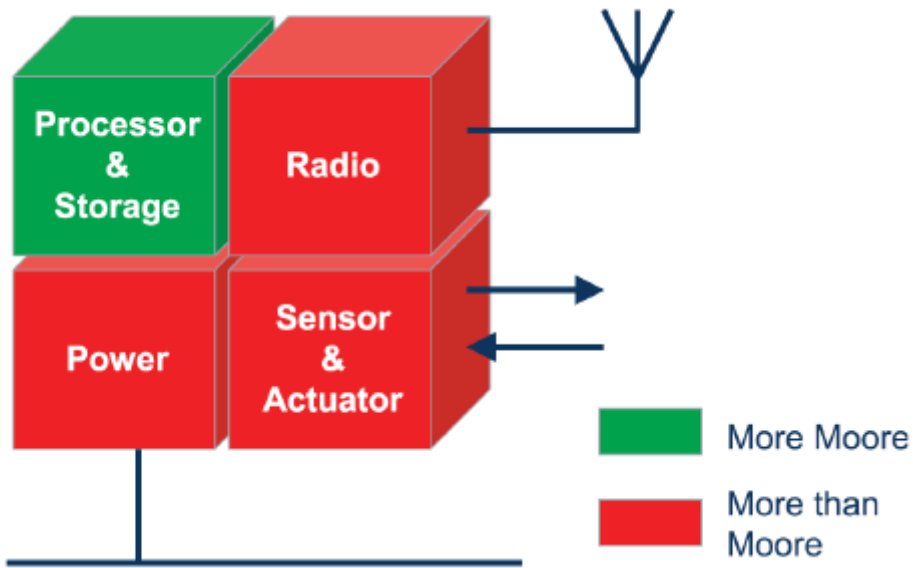
## Structure du dispositif

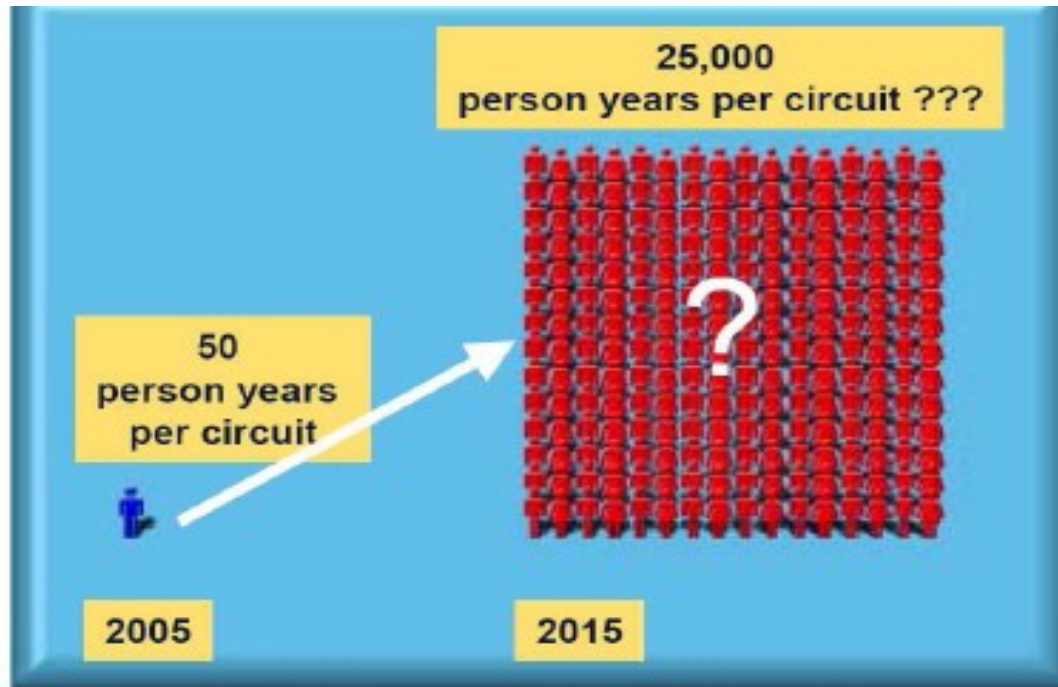
- silicium massif
- silicium-sur-isolant
- nanofil

## Architecture de grille

- grille unique
- double grille
- grille multiple







## Electronic Design Automation (EDA)

*Advanced EDA tools will be needed to maintain short time-to-market for new circuit designs*



# SOMMAIRE

---

- La complexité en compatibilité électromagnétique (CEM)
- L'évolution des architectures systèmes
- La complexité croissante des circuits électroniques
- Conséquence de la croissance des fonctions simples disponibles dans les systèmes électroniques
- Outils et démarches classiques actuels
- La limite de ces approches
- Mathématiser l'ingénierie : l'idée de Gabriel KRON
  - Travaux de Papin et Kaufmann
  - Les analyses de Banesh hoffmann
  - La mise en pratique pour la CEM : petit historique
- L'état d'avancement des travaux dans le cadre du REI DIAMANTS
  - Les objectifs du REI
  - Les interactions modélisées & techniques développées
- La capacité d'analyse théorique
- Perspectives :
  - Outils du futur







## Exemple d'une fonction simplexe : tourner en voiture.

Complexité cachée derrière cette fonction aujourd'hui :

- › Capteurs angle volant
- › Accéléromètres
- › Capteurs vitesses de roues
- › Calcul des écarts trajectoires attendue/réelle
- › Corrections possibles : freinages individuels, accélération, etc.
- › Évaluation en temps réel de la nouvelle trajectoire
  - › Asservissement, ...

## Conséquences sur la conception de la fonction « tourner » sur un véhicule.

- › Plus de 3 calculateurs impliqués
- › Des stratégies avec plus d'une façon de résoudre la même problématique
- › Une incapacité pratique à tester la fonction dans toutes les situations possibles (ouverture de test en CEM, ou dans d'autres domaines d'ailleurs)
- › La difficulté à déterminer les situations les plus critiques
- › La difficulté à appréhender le comportement de la fonction dans un environnement contraignant



# SOMMAIRE

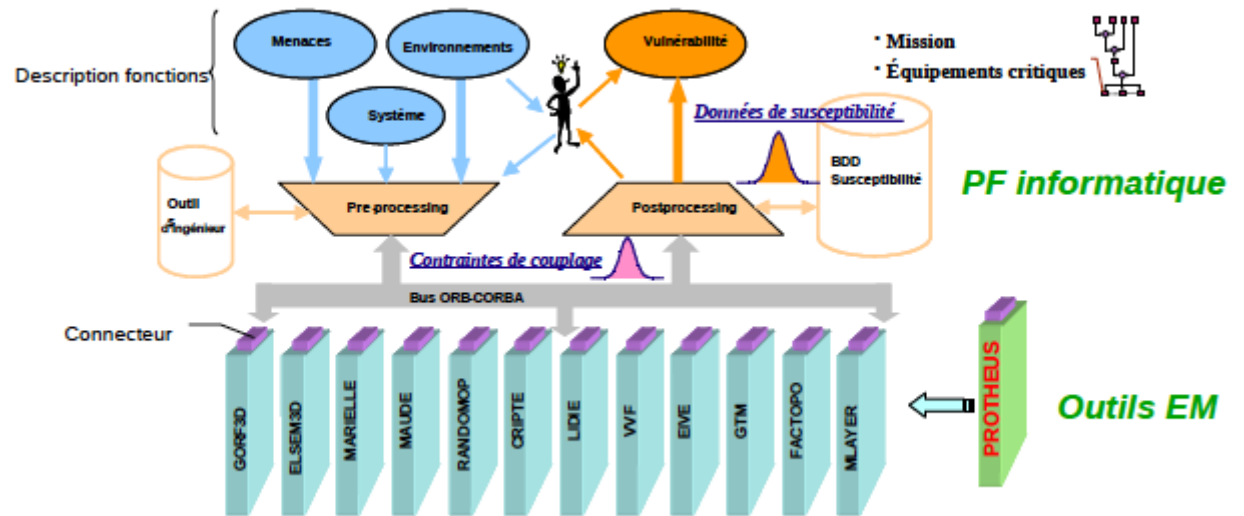
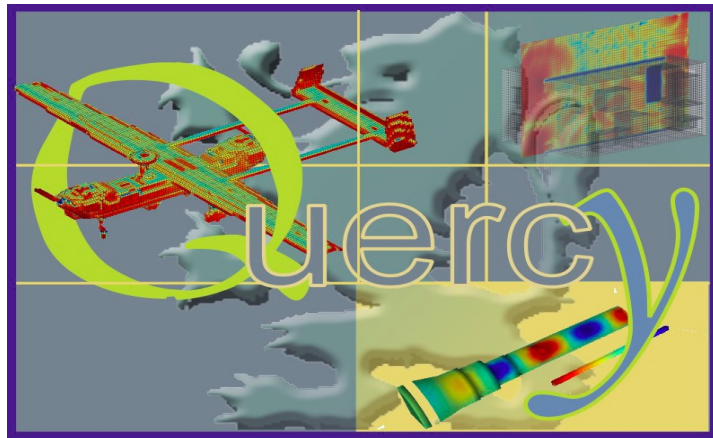
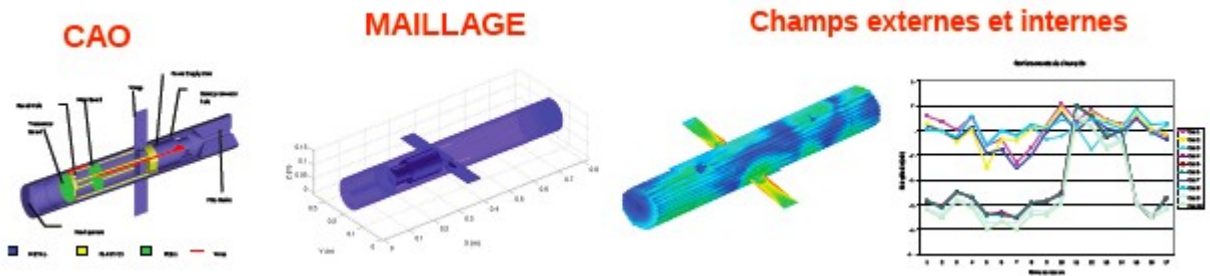
---

- La complexité en compatibilité électromagnétique (CEM)
- L'évolution des architectures systèmes
- La complexité croissante des circuits électroniques
- Conséquence de la croissance des fonctions simples disponibles dans les systèmes électroniques
- *Outils et démarches classiques actuels*
- La limite de ces approches
- Mathématiser l'ingénierie : l'idée de Gabriel KRON
  - Travaux de Papin et Kaufmann
  - Les analyses de Banesh hoffmann
  - La mise en pratique pour la CEM : petit historique
- L'état d'avancement des travaux dans le cadre du REI DIAMANTS
  - Les objectifs du REI
  - Les interactions modélisées & techniques développées
- La capacité d'analyse théorique
- Perspectives :
  - Outils du futur



# Exemples d'outils numériques et de plateforme de simulation :

Démarche générale :



Présentation Mrs Pecqueux & Pouliguen, ondes GT6 2009



# SOMMAIRE

---

- La complexité en compatibilité électromagnétique (CEM)
- L'évolution des architectures systèmes
- La complexité croissante des circuits électroniques
- Conséquence de la croissance des fonctions simples disponibles dans les systèmes électroniques
- Outils et démarches classiques actuels
- *La limite de ces approches*
- Mathématiser l'ingénierie : l'idée de Gabriel KRON
  - Travaux de Papin et Kaufmann
  - Les analyses de Banesh hoffmann
  - La mise en pratique pour la CEM : petit historique
- L'état d'avancement des travaux dans le cadre du REI DIAMANTS
  - Les objectifs du REI
  - Les interactions modélisées & techniques développées
- La capacité d'analyse théorique
- Perspectives :
  - Outils du futur





---

Les techniques numériques sont en constante progression, avec aujourd'hui des techniques de codes hybrides qui conjuguent les avantages de diverses approches (méthode intégrale + méthode nodale par exemple).

**Mais :**

- Il y a un décalage constant entre l'évolution des technologies et la disponibilité des modèles couches basses dans ces approches (exemple : travaux actuels sur l'obtention de codes numériques pour les matériaux composites);
  
- Même si l'on dispose d'un code « parfait », il fournit dans ce cas une réalité virtuelle et permet de réaliser des expérimentations virtuelles de par les approches « bas niveau » de ces codes numériques. Ils permettent de gagner du temps, d'analyser des systèmes non encore existants, mais ne constituent en aucun cas une aide à la compréhension physique des systèmes ni ne fournissent de moyens pour analyser théoriquement ces systèmes.



# SOMMAIRE

---

- La complexité en compatibilité électromagnétique (CEM)
- L'évolution des architectures systèmes
- La complexité croissante des circuits électroniques
- Conséquence de la croissance des fonctions simples disponibles dans les systèmes électroniques
- Outils et démarches classiques actuels
- La limite de ces approches
- **Mathématiser l'ingénierie : l'idée de Gabriel KRON**
  - Travaux de Papin et Kaufmann
  - Les analyses de Banesh hoffmann
  - La mise en pratique pour la CEM : petit historique
- L'état d'avancement des travaux dans le cadre du REI DIAMANTS
  - Les objectifs du REI
  - Les interactions modélisées & techniques développées
- La capacité d'analyse théorique
- Perspectives :
  - Outils du futur





Idée : appliquer le calcul tensoriel à l'analyse des systèmes complexes.

Oeuvre : « Tensorial Analysis of Networks ». Réseaux est ici pris dans le sens « graphe symbolique » le plus souvent électrocinétique dans les travaux de Kron.

# GABRIEL KRON AND SYSTEMS THEORY

*Edited by*  
*H. H. HAPP*  
GENERAL ELECTRIC COMPANY  
SCHENECTADY, N. Y.

UNION COLLEGE PRESS



SCHENECTADY  
NEW YORK 1973



Les Maths du Cnam



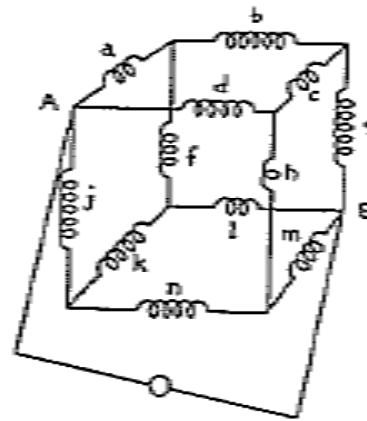
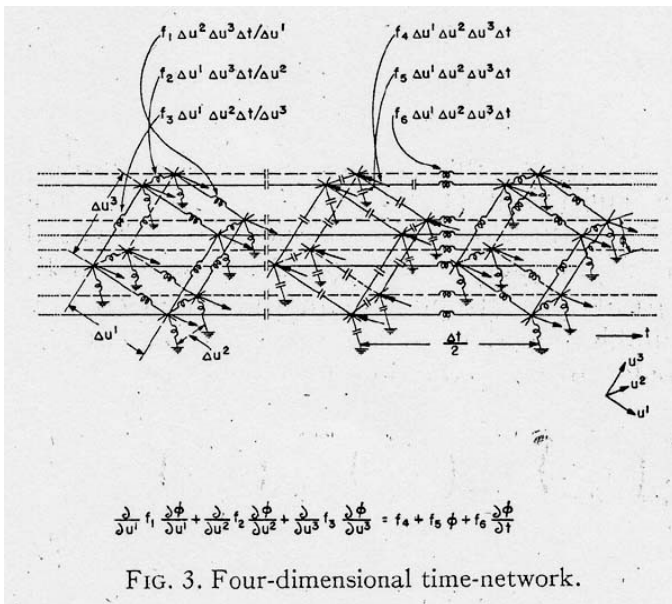


FIG. 10.5.—Impedance between Two Points A-B

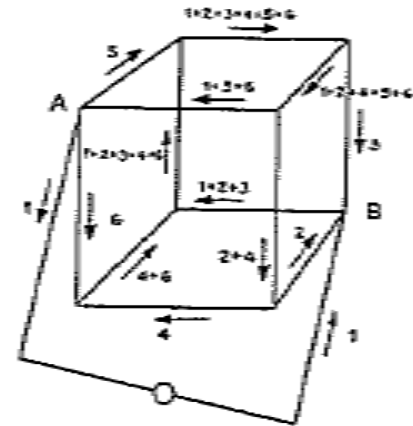


FIG. 10.6.—Currents in Individual Coils

L'idée de Kron était de profiter de l'analyse tensorielle pour développer une technique permettant de calculer les comportements de systèmes couplés, de façon à réutiliser au maximum les résultats d'un calcul précédent sur un circuit plus petit, pour élaborer un circuit plus grand, construit comme un agencement de circuits plus petits.



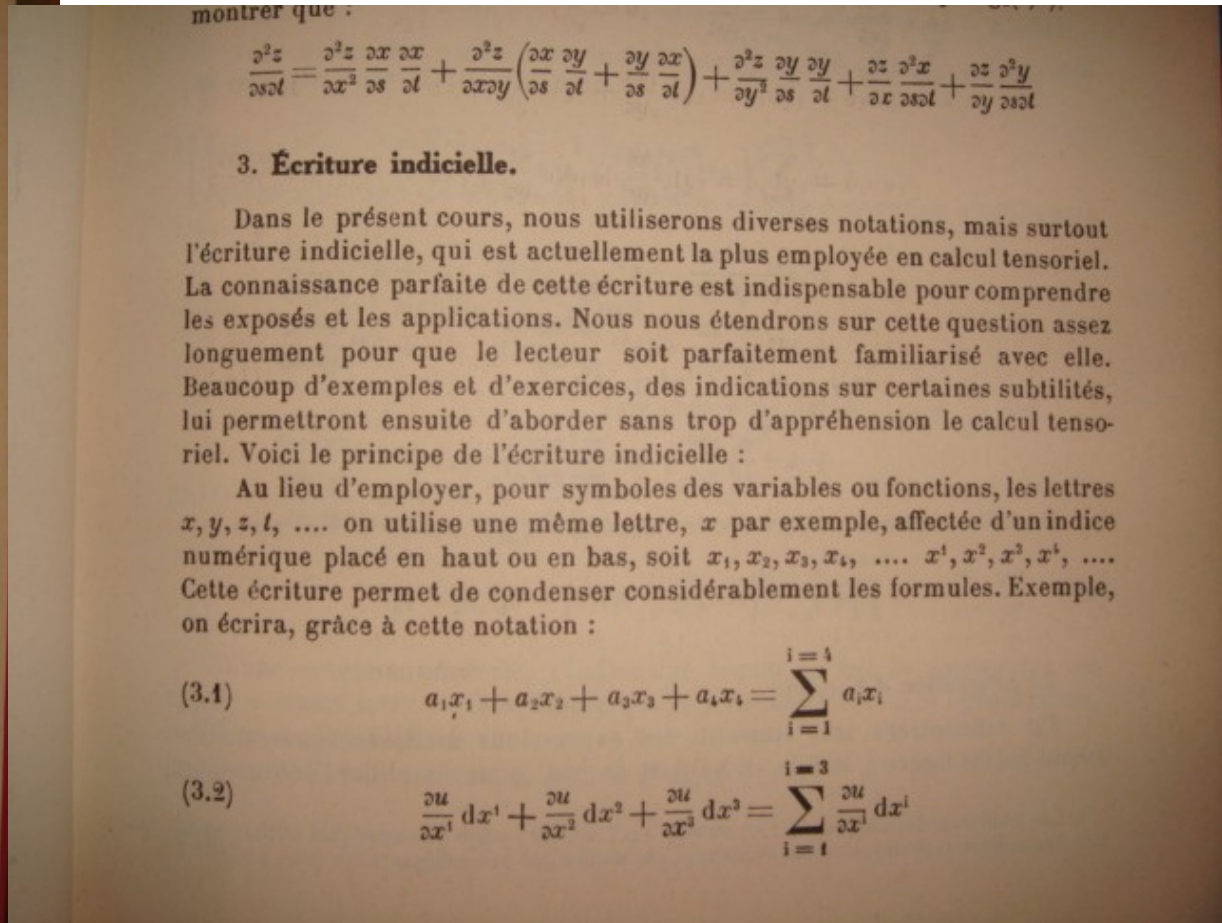
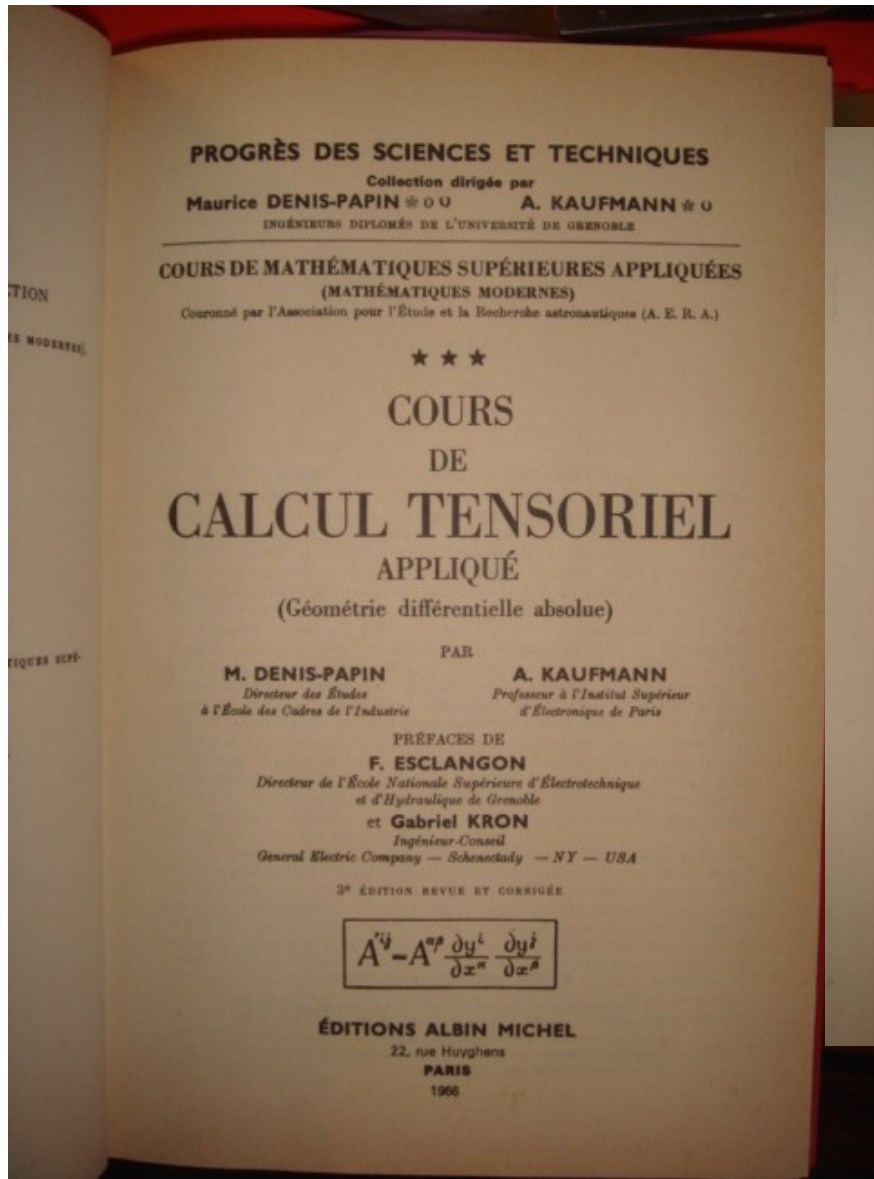


# SOMMAIRE

---

- La complexité en compatibilité électromagnétique (CEM)
- L'évolution des architectures systèmes
- La complexité croissante des circuits électroniques
- Conséquence de la croissance des fonctions simples disponibles dans les systèmes électroniques
- Outils et démarches classiques actuels
- La limite de ces approches
- **Mathématiser l'ingénierie : l'idée de Gabriel KRON**
  - *Travaux de Papin et Kaufmann*
  - Les analyses de Banesh hoffmann
  - La mise en pratique pour la CEM : petit historique
- L'état d'avancement des travaux dans le cadre du REI DIAMANTS
  - Les objectifs du REI
  - Les interactions modélisées & techniques développées
- La capacité d'analyse théorique
- Perspectives :
  - Outils du futur





Page suivante : convention de l'indice muet d'Einstein



Les Maths du Cnam





50. Opérations algébriques matricielles et indicielles.

Les opérations faites sur les grandeurs indicielles et les opérations matricielles correspondantes peuvent être associées sans difficulté si le nombre d'indices ne dépasse pas 2. Contentons-nous de donner quelques exemples élémentaires :

écriture indicielle	écriture matricielle
(50.1) $a_{ij} + b_{ij}$ $i, j = 1, 2$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$
(50.2) $a_{ij} b^j$ $i, j = 1, 2$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b^1 \\ b^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11} b^1 + a_{12} b^2 \\ a_{21} b^1 + a_{22} b^2 \end{Bmatrix}$
(50.3) $\frac{d}{dt} a_{ij}$ $i, j = 1, 2$	$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} \\ \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{22}}{dt} \end{bmatrix}$

Comme le lecteur le constatera, nous utiliserons les mêmes notations que dans notre Cours de Calcul Matriciel Appliqué. Nous ferons de même pour l'écriture matricielle abrégée :

- (50.4)  $\{ a \}$  matrice colonne,
- (50.5)  $[ a ]$  matrice rectangle,
- (50.6)  $\square a$  matrice carrée.

Rappelons les symboles que nous avons utilisés en calcul matriciel :

- (50.7)  $[ a ]^t$  matrice transposée,
- (50.8)  $\square a$  matrice adjointe,
- (50.9)  $\square a^{-1}$  matrice inverse,
- (50.10)  $\overline{[ a ]}$  matrice conjuguée,
- (50.11)  $[ a ]^+$  matrice associée.

Dans ce chapitre et ceux qui suivront, nous disposerons très souvent, côte à côte, les expressions tensorielles sous leur forme indicielle et sous leur forme matricielle.

grands services dans certains réseaux très compliqués, elle permet de changer de mailles dans un ou plusieurs des réseaux composants avant toute interconnexion. Les autres propriétés sont aussi très intéressantes. Par exemple, on utilisera (64.9) pour calculer l'admittance de maille du réseau de la figure (88.10) et, de là, celle de la figure (88.12).

89. Réseaux non-symétriques. Tubes électroniques.

Il est usuel de représenter une pentode (ou une triode sans courant de grille) en fonctionnement dynamique, au moyen d'un quadripôle (fig. 89.1). Il est commode de considérer le circuit équivalent donné par la fig. (89.2) où :

- $\rho$  est la résistance intérieure du tube ;
- $\mu$  est le coefficient d'amplification ;
- $z_g$  l'impédance de grille.

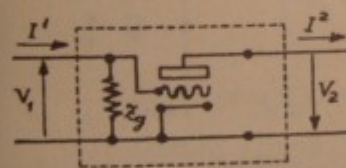


Fig. 89.1.

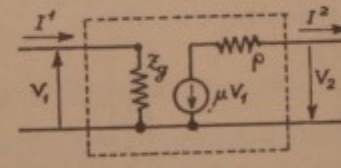


Fig. 89.2.

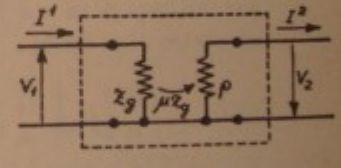


Fig. 89.3.

Il est encore plus commode de prendre, comme schéma équivalent, un « transformateur » fictif unilatéral de matrice impédance :

(89.1)  $\square z = \begin{bmatrix} z_g & 0 \\ \mu z_g & \rho \end{bmatrix}$

soit :



*Remarques générales sur les réseaux non symétriques.*

Comme l'exemple précédent le montre, la matrice impédance de maille (ou admittance) d'un réseau contenant un ou plusieurs tubes électroniques, n'est plus symétrique; c'est encore le cas lorsque le réseau contient des éléments à couplages antisymétriques ou asymétriques, tels que des quartz, des gyrateurs<sup>1</sup> des machines tournantes.

L'espace des mailles (et aussi celui des paires de nœuds) d'un réseau non symétrique ne peut être considéré comme un espace de Riemann, dont le tenseur fondamental serait la matrice  $Z_{ij}$ . Même observation pour l'espace des paires de nœuds. Toutefois, la méthode de Kron peut être appliquée, car sa démonstration reste valable pour des réseaux non symétriques; en effet, cette démonstration ne s'appuie pas sur la symétrie du tenseur fondamental; elle est d'ailleurs justifiée par des relations purement matricielles. Une théorie générale des réseaux linéaires symétriques ou non, doit s'appuyer sur la définition d'un espace métrique avec tenseur fondamental à symétrie non imposée: un tel espace peut être appelé non-Riemannien (non symétrique).

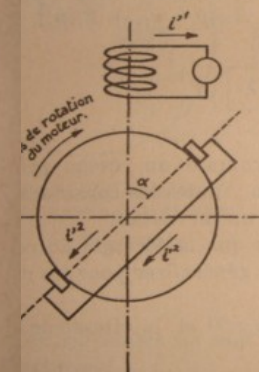
Par ailleurs, les matrices impédance (ou admittance) des réseaux non symétriques peuvent parfois être singulières (non régulières, c'est-à-dire telles que  $\det Z_{ij} = 0$ ). Il est possible dans ce cas de sortir de l'impasse en

1. Un gyrateur est un gyroscope ou son analogue électrique, électromécanique, etc... Ce sont des éléments dont les réseaux représentatifs sont antisymétriques.

8 ter)  $i^2 = L^{-1}I^2$ , soit par calcul direct, soit à l'aide de tables. Les lignes  $i^2(t)$  obtenues seront portées dans (90.18). Une série d'exemples montrera au lecteur comment exploiter les conclusions précédentes.

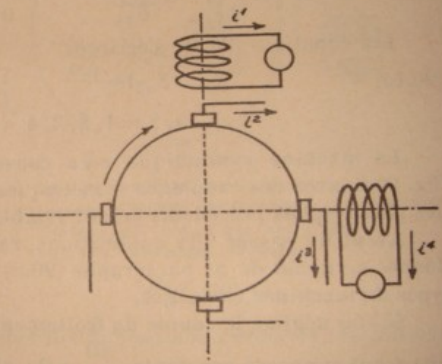
4<sup>er</sup> exemple.

Moteur à répulsion (fig. 90.7).



Principe de principe du moteur à répulsion.

Fig. 90.7.



Machine synthétique de référence.

Fig. 90.8.





# SOMMAIRE

---

- La complexité en compatibilité électromagnétique (CEM)
- L'évolution des architectures systèmes
- La complexité croissante des circuits électroniques
- Conséquence de la croissance des fonctions simples disponibles dans les systèmes électroniques
- Outils et démarches classiques actuels
- La limite de ces approches
- **Mathématiser l'ingénierie : l'idée de Gabriel KRON**
  - Travaux de Papin et Kaufmann
  - [Les analyses de Banesh hoffmann](#)
  - La mise en pratique pour la CEM : petit historique
- L'état d'avancement des travaux dans le cadre du REI DIAMANTS
  - Les objectifs du REI
  - Les interactions modélisées & techniques développées
- La capacité d'analyse théorique
- Perspectives :
  - Outils du futur





- Doctorat en 1932 à Princeton sous la direction de Veblen.
- Collaborateur d'Einstein à Princeton en 1935-1937. Publication conjointe d'un article sur le problème du mouvement en relativité générale.
- Nommé professeur de mathématiques au Queen's College de New York en 1952, où il restera jusqu'à la fin des années 1970, bien qu'il soit officiellement retraité dans les années 1960.

and if we denote the inverse of  $c_\alpha^\lambda$  by  $C_\lambda^\alpha$ , the new metric is given by

$$\bar{L}_{\lambda\mu}(x^s) = C_\lambda^\alpha C_\mu^\beta L_{\alpha\beta}. \quad (15)$$

However, as Kron pointed out, the new space is no longer Riemannian. For the law of transformation of a connection<sup>5</sup> is

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu,\lambda} = C_\lambda^\alpha C_\mu^\beta C_\nu^\gamma \Gamma_{\beta\gamma,\alpha} + L_{\alpha\beta} C_\nu^\gamma C_\lambda^\alpha (\partial C_\mu^\beta / \partial x^\gamma), \quad (16)$$

whether the transformation is holonomic or not. In the present case  $\Gamma_{\beta\gamma,\alpha}$  are Christoffel symbols formed from the metric  $L_{\alpha\beta}$ , namely  $[\beta\gamma,\alpha]$ . Owing to the special character of the transformation (11) and the cylinder condition on the electrical variables, it is here possible to form Christoffel symbols  $\langle[\mu\nu,\lambda]\rangle$  from the new metric  $\bar{L}_{\lambda\mu}$ . From (15) and (16), and the definition of the Christoffel symbols, it turns out that the original Christoffel symbols  $[\beta\gamma,\alpha]$  do not transform into the Christoffel symbols  $\langle[\mu\nu,\lambda]\rangle$  but into a connection  $\bar{\Gamma}_{\mu\nu,\lambda}$  given by

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu,\lambda} = \langle[\mu\nu,\lambda]\rangle + \Omega_{\mu\lambda\nu} + \Omega_{\nu\lambda\mu} + \Omega_{\mu\nu\lambda}, \quad (17)$$

where

$$\Omega_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} L_{\alpha\gamma} C_\nu^\gamma \left( C_\mu^\beta \frac{\partial C_\lambda^\alpha}{\partial x^\beta} - C_\lambda^\beta \frac{\partial C_\mu^\alpha}{\partial x^\beta} \right). \quad (18)$$

## Kron's Non-Riemannian Electrodynamics

BANESH HOFFMANN

Queens College, Flushing, New York

This paper discusses some aspects of Kron's tensor theories associated with the use of non-holonomic reference systems in the mathematical treatment of rotating electrical machines. The general theory is discussed in the first part, and is applied in the second part, by way of illustration, to a squirrel-cage induction motor.

Pour notre part nous n'avons pas les compétences pour rentrer dans ces discussions sur la justification formelle des travaux de Kron. Nous en constatons le bon fonctionnement dans les modélisations de systèmes complexes que nous pratiquons et utilisons fréquemment les « connectivités » de Kron, par exemple pour exploiter le lien entre les flux de branches et les modes de mailles :

$$i^b = C^b_{\nu} i^\nu$$



# SOMMAIRE

---

- La complexité en compatibilité électromagnétique (CEM)
- L'évolution des architectures systèmes
- La complexité croissante des circuits électroniques
- Conséquence de la croissance des fonctions simples disponibles dans les systèmes électroniques
- Outils et démarches classiques actuels
- La limite de ces approches
- **Mathématiser l'ingénierie : l'idée de Gabriel KRON**
  - Travaux de Papin et Kaufmann
  - Les analyses de Banesh hoffmann
  - [La mise en pratique pour la CEM : petit historique](#)
- L'état d'avancement des travaux dans le cadre du REI DIAMANTS
  - Les objectifs du REI
  - Les interactions modélisées & techniques développées
- La capacité d'analyse théorique
- Perspectives :
  - Outils du futur



Dans les années 1988, désirant prédire et comprendre les expérimentations que je réalisais en électromagnétisme, je me tournais vers les analystes numériques qui me répondaient que les codes numériques ne pouvaient me donner une réponse que dans une semaine, et sous certaines hypothèses contraignantes vis à vis de la réalité que je voulais modéliser.

Discutant de ce problème avec Jacques PIGNERET et Jean-Jacques SAMUELI, ces derniers me conseillèrent de chercher une réponse dans une analyse tensorielle des réseaux décrite dans le ANGOT.

Je trouva là une méthode qui m'a permis au fil du temps et de l'expérience de modéliser n'importe quel phénomène rencontré en CEM.

Depuis :

39 publications, 4 thèses, 1 publication à la revue de l'académie des sciences, 1 ouvrage, une session au congrès CEM2010 et en cours, recherches pour un outil logiciel pour la DGA et le CEA : REI DIAMANTS.

La compatibilité  
électromagnétique  
des systèmes complexes

Olivier Maurice

Hermines Lavoisier



Les Maths du Cnam



# SOMMAIRE

---

- La complexité en compatibilité électromagnétique (CEM)
- L'évolution des architectures systèmes
- La complexité croissante des circuits électroniques
- Conséquence de la croissance des fonctions simples disponibles dans les systèmes électroniques
- Outils et démarches classiques actuels
- La limite de ces approches
- Mathématiser l'ingénierie : l'idée de Gabriel KRON
  - Travaux de Papin et Kaufmann
  - Les analyses de Banesh hoffmann
  - La mise en pratique pour la CEM : petit historique
- **L'état d'avancement des travaux dans le cadre du REI DIAMANTS**
  - [Les objectifs du REI](#)
  - Les interactions modélisées & techniques développées
- La capacité d'analyse théorique
- Perspectives :
  - Outils du futur



---

*Développer les outils à même de permettre la prédiction du comportement électromagnétique de grands systèmes à l'architecture complexe.*

Projet financé par la DGA, sur trois ans.

Partenaires : Xlim, Pr Alain REINEIX & GERAC. Clients : CEA-DAM & DGA.

On veut pouvoir répondre à des questions du type :

Si je déplace cette baie radar dans un porte avion, quelles sont les conséquences pour la CEM?

Comment gérer l'installation de 40 antennes sur un bâtiment de la marine, tout en vérifiant la compatibilité vis à vis des avions atterrissant sur le pont?

Comment prédire les risques CEM pour un équipement complexe embarqué vis à vis des menaces front door et back door?

Etc.

Et tout cela avec des réponses délivrées en 1-2 jours!



Les Maths du Cnam





# SOMMAIRE

---

- La complexité en compatibilité électromagnétique (CEM)
- L'évolution des architectures systèmes
- La complexité croissante des circuits électroniques
- Conséquence de la croissance des fonctions simples disponibles dans les systèmes électroniques
- Outils et démarches classiques actuels
- La limite de ces approches
- Mathématiser l'ingénierie : l'idée de Gabriel KRON
  - Travaux de Papin et Kaufmann
  - Les analyses de Banesh hoffmann
  - La mise en pratique pour la CEM : petit historique
- **L'état d'avancement des travaux dans le cadre du REI DIAMANTS**
  - Les objectifs du REI
  - *Les interactions modélisées & techniques développées*
- La capacité d'analyse théorique
- Perspectives :
  - Outils du futur



- 
- Les tenseurs vus en listes
  - L'invariant de Kron – la métrique d'opérateurs - connectivité de Kron
  - Assemblages
  - Branchements
  - Interactions de champ proches
  - Interactions de champ lointain
  - Interactions de Branin
  - Couplages entre réseaux attachés à diverses physiques
  - Disponibilité d'un couplage vers des réseaux hamiltoniens
  - Équation tensorielle finale



- 
- **Les tenseurs vus en listes**
  - L'invariant de Kron – la métrique d'opérateurs - connectivité de Kron
  - Assemblages
  - Branchements
  - Interactions de champ proches
  - Interactions de champ lointain
  - Interactions de Branin
  - Couplages entre réseaux attachés à diverses physiques
  - Disponibilité d'un couplage vers des réseaux hamiltoniens
  - Équation tensorielle finale



$$T_{abc\dots} \left( V^a \otimes V^b \otimes V^c \right) \dots \rightarrow n(a, b, c, \dots) = a + b.D^a + c.D^a D^b + \dots$$

Par exemple en deux dimensions :



La composante du tenseur correspondant au produit des éléments  $i$  et  $j$  des deux espaces de départ se trouve à la position de la combinaison  $i.D^1+j$  dans la liste.

Cette représentation facilite celle de tenseurs d'ordre  $N$  supérieur à 3.

Toutes les opérations de l'algèbre tensorielle ont été implémentée en PERL, langage qui comprend de nombreuses et puissantes instructions de manipulation des listes.



- 
- Les tenseurs vus en listes
  - **L'invariant de Kron – la métrique d'opérateurs - connectivité de Kron**
  - Assemblages
  - Branchements
  - Interactions de champ proches
  - Interactions de champ lointain
  - Interactions de Branin
  - Couplages entre réseaux attachés à diverses physiques
  - Disponibilité d'un couplage vers des réseaux hamiltoniens
  - Équation tensorielle finale





## Premiers développement de Kron :

$i^k \rightarrow$  espace naturel  $\vec{i} = i^k \vec{u}_k$  espace des branches

$$\vec{u}_j \hat{u}^k = \delta_j^k \Rightarrow \vec{V} = v_k \hat{u}^k$$

invariant :  $v_k i^k = s$  puissance généralisée du réseau

métrique  $z_{jk} i^k = v_j$

## Généralisation de Kron :

- 1)  $z_{jk} (i^k)$
- 2)  $i^k = C^k_{\nu} i^{\nu}$



## Aspect lagrangien de la métrique de Kron

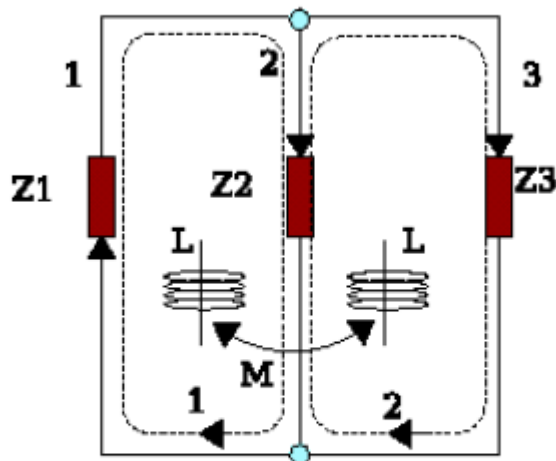
$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = e_\alpha \rightarrow L = \frac{1}{2} \frac{1}{C^{\nu\alpha}} q^\alpha q^\nu - \frac{1}{2} L_{\alpha\nu} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\nu - \frac{1}{2} R_{\alpha\nu} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\nu$$

$$e_\alpha = z_{\alpha\nu} \dot{q}^\nu$$



# La connectivité de Gabriel KRON

## *L'espace des mailles*



Espace des courants fondamentaux,  
espace de Lagrange,  
espace où apparaissent les inductances  
et mutuelles.

L'espace des mailles est l'espace dans lequel on exprime l'équation finale

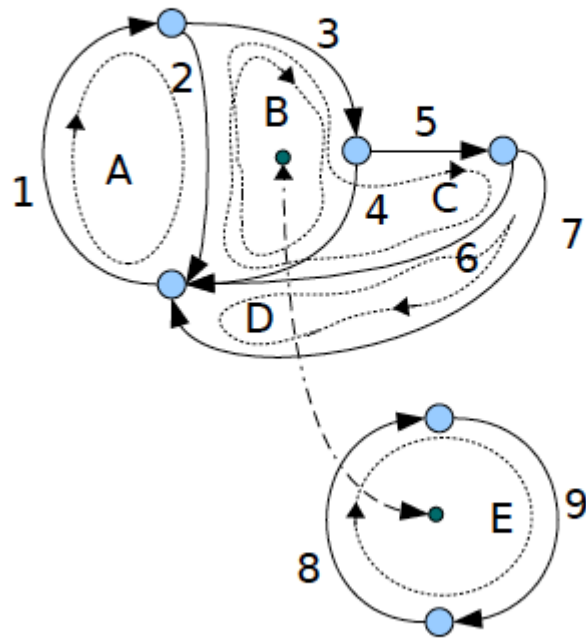


On renseigne la métrique Z dans l'espace des branches: R, C, fonctions(i)

$$Z_{ab} = \begin{bmatrix} R_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \int_t dt(.) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Mos(.) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Diode(.) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L \frac{d}{dt} (.) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{y} \int_t dt(.) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{50} \end{bmatrix}$$



On définit une connectivité pour traduire Z dans l'espace des mailles et y ajouter des éléments inductifs propres à cet espace.



$$\begin{cases}
 i^1 = J^A \\
 i^2 = J^A - J^B - J^C \\
 i^3 = J^B + J^C \\
 i^4 = J^B \\
 i^5 = J^C \\
 i^6 = J^C - J^D \\
 i^7 = J^D \\
 i^8 = J^E \\
 i^9 = J^E
 \end{cases}
 \Rightarrow L = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}$$

La connectivité (ici appelée L) n'est pas une matrice carrée → premières difficultés rencontrées par Kron vis à vis de la communauté des « tensoristes » de l'époque.





On calcule Z dans l'espace des mailles:

$$Z'_{\mu\nu} = L_{\mu.}^a Z_{ab} L_{\nu}^b$$

On y ajoute la métrique des inductances:

Les couplages entre réseaux  
sont résolus dans l'espace  
des moments

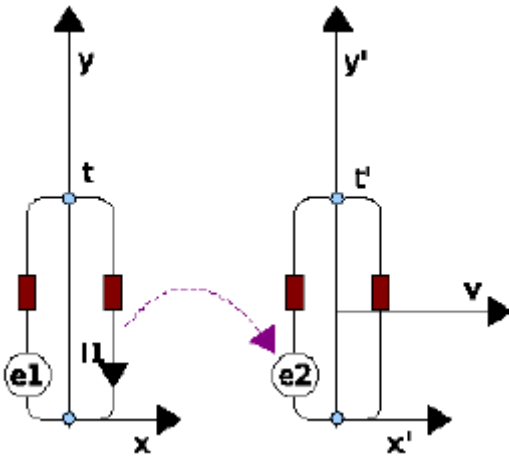
$$M_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{22} & 0 & 0 & S_{2.}^2 \alpha_{25} S_5^5 \\ 0 & 0 & L_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{44} & 0 \\ 0 & S_{5.}^5 \alpha_{52} S_2^2 & 0 & 0 & L_{55} \end{bmatrix}$$

Finalemment:

$$\zeta_{\mu\nu} = Z'_{\mu\nu} + M_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial t} (.) \quad f_{\mu.} = \zeta_{\mu\nu} (J^{\nu})$$



(Extraits de mon livre)



énergies électriques et magnétiques contenues dans ce circuit :  $i = i^1 - i^2$ . Les des charges des trois condensateurs et des courants de mailles qui circulent dans les inductances :

$$\begin{cases} W_E = \frac{1}{2C_1}(q^1)^2 + \frac{1}{2C_2}(q^2)^2 + \frac{1}{2g}(q)^2 \\ W_H = \frac{L_1}{2}(i^1)^2 + \frac{L_2}{2}(i^2)^2 \end{cases} \quad [18.1]$$

Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} i^1 = \dot{q}^1 \\ i^2 = \dot{q}^2 \end{cases} \quad \begin{cases} q^1 = \int_t dt i^1 \\ q^2 = \int_t dt i^2 \\ q = \int_t dt i = \int_t dt (i^1 - i^2) \end{cases} \quad [18.2]$$

on a donc :

$$\begin{cases} q = q^1 - q^2 \\ q^2 = (q^1)^2 + (q^2)^2 - 2q^1 q^2 \end{cases} \quad [18.3]$$

Les expressions obtenues dans l'espace des mailles sont les opérateurs de Lagrange.

$$\Lambda_{x'}^x \rightarrow \begin{cases} \Delta_x = \Delta_{x'} + 0\Delta_{y'} + 0\Delta_{t'} \\ \Delta_y = 0\Delta_{x'} + \Delta_{y'} + 0\Delta_{t'} \\ \Delta_t = 0\Delta_{x'} + 0\Delta_{y'} + \gamma\Delta_{t'} \end{cases} \quad \vec{u}_{x'} = \vec{u}_x \Lambda_{x'}^x$$

248 La CEM des systèmes complexes

on peut de fait exprimer complètement l'état électrique du circuit en fonction des deux paramètres  $q^1$  et  $q^2$  qui représentent les deux degrés de liberté du circuit :

$$\begin{cases} W_E = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{g} \right) (q^1)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{C_2} + \frac{1}{g} \right) (q^2)^2 - \frac{1}{g} q^1 q^2 \\ W_H = \frac{1}{2} L_1 (\dot{q}^1)^2 + \frac{1}{2} L_2 (\dot{q}^2)^2 \end{cases} \quad [18.4]$$

L'énergie électrique  $W_E$  est l'énergie potentielle du circuit. L'énergie magnétique  $W_H$  jouant le rôle de l'énergie cinétique associée aux mouvements des charges (courants). On peut écrire les matrices des deux opérateurs linéaires U et T associés aux deux énergies :

$$U = \begin{bmatrix} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{g} \right) & -\frac{1}{g} \\ -\frac{1}{g} & \left( \frac{1}{C_2} + \frac{1}{g} \right) \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \quad [18.5]$$

De ces deux matrices on déduit le Lagrangien  $L = T^{-1}U$ . L'équation caractéristique et les fréquences propres du réseau sont données par :

$$\det[T^{-1}U - \omega^2 \Gamma] = 0 \quad [18.6]$$

où T est la matrice identité. Ecrivons maintenant le tenseur impédance des mailles :

$$\zeta_{\omega\omega} = \begin{bmatrix} p(C_1) + p(g) & -p(g) \\ -p(g) & p(C_2) + p(g) \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \quad [18.7]$$

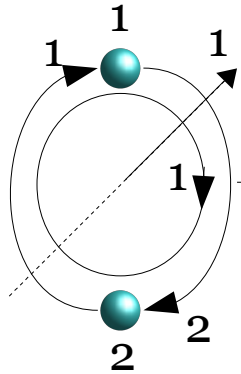
où  $p(C)$  est la susceptance de la capacité C. le tenseur  $M_{\omega\omega}$  correspond strictement à la matrice opérateur énergie cinétique T, et les coefficients des intégrales dans le tenseur  $Z_{\omega\omega}$  correspondent aux éléments de la matrice de l'opérateur énergie potentielle U. Les opérateurs énergies de Lagrange correspondent aux tenseurs Z et M dans l'espace des mailles.



- 
- Les tenseurs vus en listes
  - L'invariant de Kron – la métrique d'opérateurs - connectivité de Kron
  - **Assemblages**
  - Branchements
  - Interactions de champs proches
  - Interactions de champ lointain
  - Interactions de Branin
  - Couplages entre réseaux attachés à diverses physiques
  - Disponibilité d'un couplage vers des réseaux hamiltoniens
  - Équation tensorielle finale

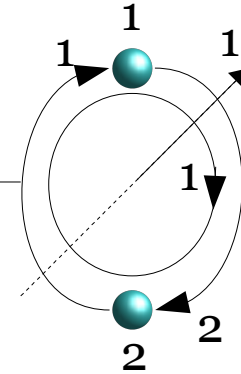


# Assemblages



$$Z_{ab} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

$$Z_{cd} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$



$$Z_{ef} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & 0 & 0 \\ Z_{21} & Z_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{33} & Z_{34} \\ 0 & 0 & Z_{43} & Z_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z1 & 0 \\ 0 & Z2 \end{bmatrix}$$



- 
- Les tenseurs vus en listes
  - L'invariant de Kron – la métrique d'opérateurs - connectivité de Kron
  - Assemblages
  - **Branchements**
  - Interactions de champs proches
  - Interactions de champ lointain
  - Interactions de Branin
  - Couplages entre réseaux attachés à diverses physiques
  - Disponibilité d'un couplage vers des réseaux hamiltoniens
  - Équation tensorielle finale

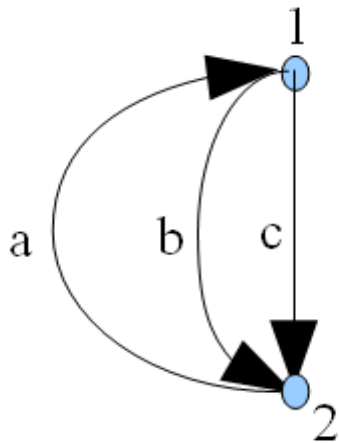




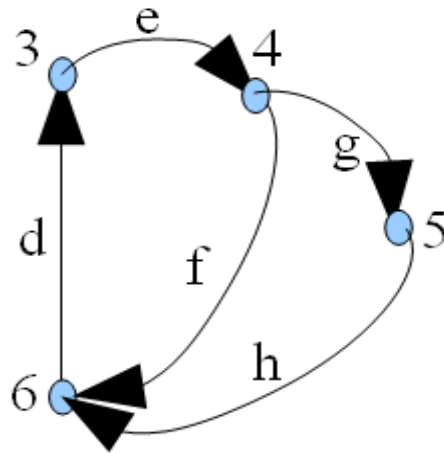
Cette technique a été élaborée par Maxime BREANT, GERAC

Connexion de noeuds :

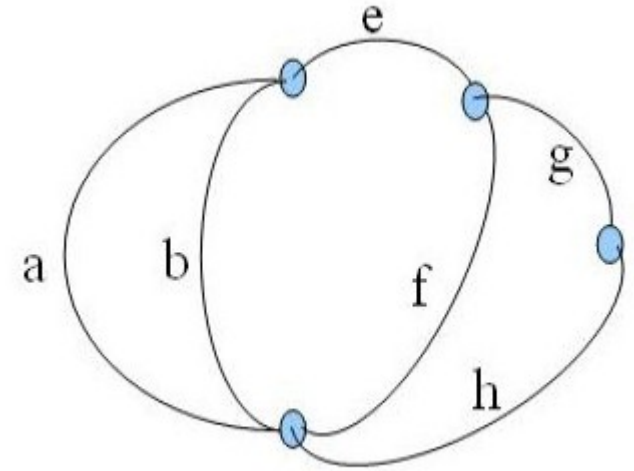
$$B'_{b^{q'}} = B_b^q Q_q^{q'}$$



Réseau A



Réseau B



Suppression de branches :

$$Z'_{ab} = F_a^m Z_{mn} F_b^n$$

$$B''_{b'^{q'}} = F_{b'}^b B'_b{}^{q'}$$

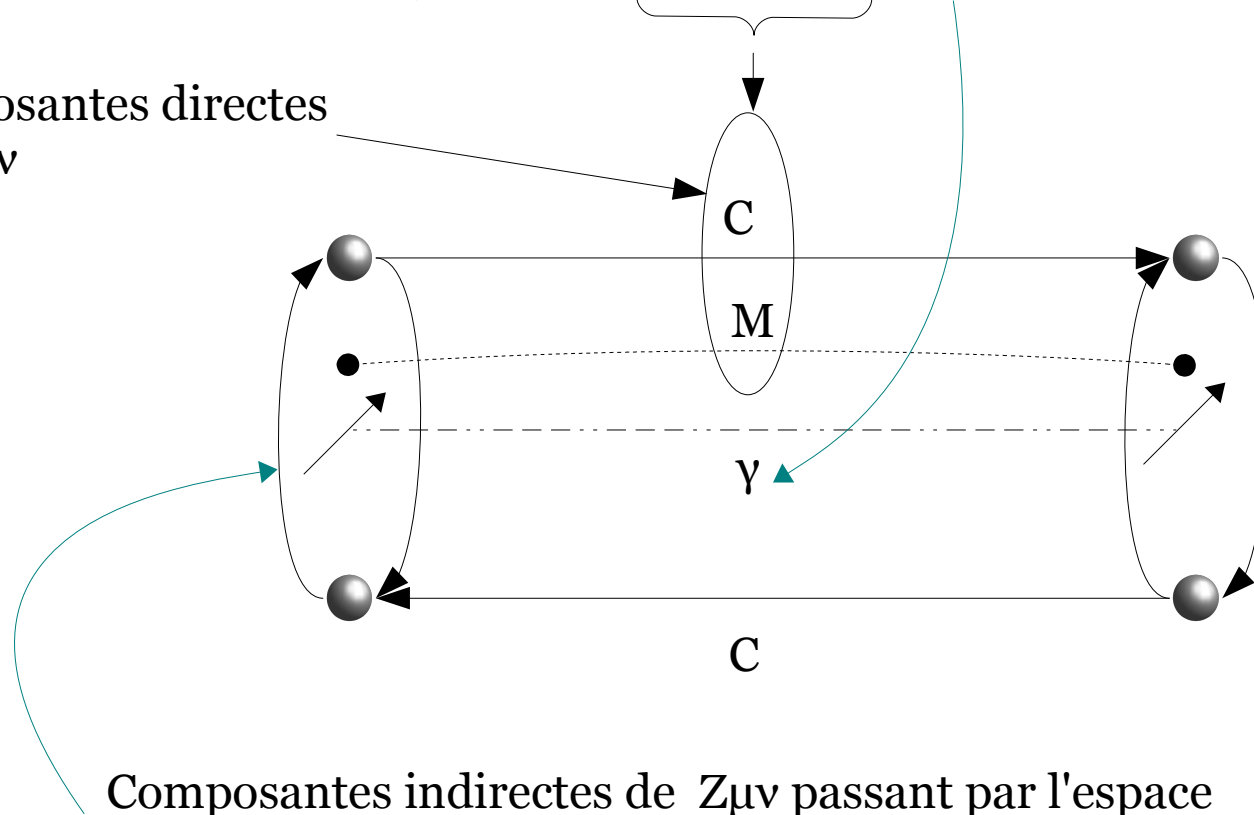


- 
- Les tenseurs vus en listes
  - L'invariant de Kron – la métrique d'opérateurs - connectivité de Kron
  - Assemblages
  - Branchements
  - **Interactions de champs proches**
  - Interactions de champ lointain
  - Interactions de Branin
  - Couplages entre réseaux attachés à diverses physiques
  - Disponibilité d'un couplage vers des réseaux hamiltoniens
  - Équation tensorielle finale



$$\begin{cases} |\vec{E}| \\ |\vec{B}| \end{cases} = f \left( \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^3} + \frac{e^{-p\tau}}{R} \right)$$

Composantes directes  
de  $Z_{\mu\nu}$

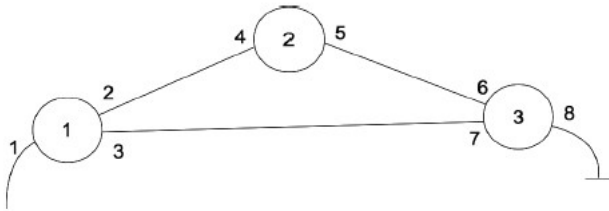


Composantes indirectes de  $Z_{\mu\nu}$  passant par l'espace  
des moments



- 
- Les tenseurs vus en listes
  - L'invariant de Kron – la métrique d'opérateurs - connectivité de Kron
  - Assemblages
  - Branchements
  - Interactions de champs proches
  - **Interactions de champ lointain**
  - Interactions de Branin
  - Couplages entre réseaux attachés à diverses physiques
  - Disponibilité d'un couplage vers des réseaux hamiltoniens
  - Équation tensorielle finale





$$S = \begin{bmatrix} S_1^1 & S_2^1 & S_3^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_1^2 & S_2^2 & S_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_1^3 & S_2^3 & S_3^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_4^4 & S_5^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_4^5 & S_5^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_6^6 & S_7^6 & S_8^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_6^7 & S_7^7 & S_8^7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_6^8 & S_7^8 & S_8^8 \end{bmatrix} \longleftrightarrow S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & G_1^2 & G_1^3 \\ G_2^1 & 0 & G_2^3 \\ G_3^1 & G_3^2 & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_7^3 & 0 \\ 0 & G_2^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_6^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5^6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



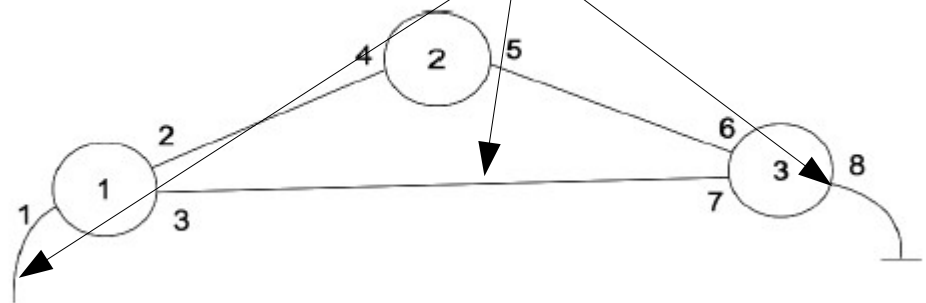


$$p^a = \begin{bmatrix} p^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec  $p^1(t) = p_0 e^{-\left(\frac{t-\tau_0}{\sigma}\right)^n} \sin(\omega_0 t)$

$$w_1 = \underbrace{h_{11} S_1^\mu}_{\text{antenna}} \underbrace{\left(G_\mu^\nu S_\nu^\mu\right)^N}_{\text{medium}} \underbrace{g_{\mu a} p^a}_{\text{source}}$$

$$w_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_{44} S_4^3 G_3^2 S_2^1 g_{11} p_1 \end{bmatrix}$$



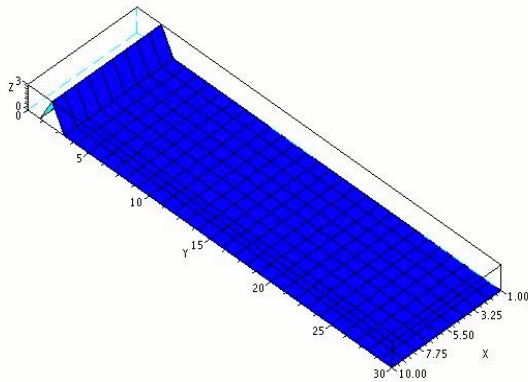
Une fois l'expression générale d'une onde obtenue en un port, on remplace les termes symboliques dans l'expression de cette onde par des « gamma-matrices » qui donnent le résultat exact (publication HaL Maurice - Reineix).

$$\tilde{w}_1 = \begin{bmatrix} h_{11} S_1^2 \gamma_2^4 \gamma_4^1 g_{11} p^1 \\ 0 \\ x + x \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow w_1 = h_{11} S_1^\mu \left( G_\mu^\nu S_\nu^\mu \right)^N g_{\mu\alpha} p^a$$

$$h_{ij} = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_j^i = \begin{bmatrix} s(i,j) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G_j^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_{ij} \end{bmatrix}$$

$$s(i,j) = \begin{bmatrix} (s_{ij})_1 & 0 \\ 0 & (s_{ij})_2 \end{bmatrix} \quad x_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad p^1 = \begin{bmatrix} (p_0)_1 \\ (p_0)_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$





$$\tilde{w}_1 = \begin{bmatrix} h_{11} S_1^2 \gamma_2^4 \gamma_4^1 g_{11} p^1 \\ 0 \\ x + x \\ 1 \end{bmatrix}$$

Champ radiatif

$$\hat{w}(1) = \frac{|(\tilde{w}_1)^1|}{4\pi(\tilde{w}_1)^3} e^{-ik(\tilde{w}_1)^3}$$

Ondes de puissance

$$\hat{w} = |(\tilde{w}_1)^1| \frac{\lambda^2}{16\pi^2 [(\tilde{w}_1)^3]^2}$$

Ondes guidées

$$\hat{w}(1) = |(\tilde{w}_1)^1| e^{-i\beta(\tilde{w}_1)^3}$$

Champ E ou B

$$\hat{w}(1) = \frac{|(\tilde{w}_1)^1|}{4\pi [(\tilde{w}_1)^3]^2} e^{-ik(\tilde{w}_1)^3}$$



Le moment dipolaire électrique résultant dans l'espace orthogonal local des multiples branches « capacitives » présentes dans le réseau se calcule par contraction avec la métrique de l'opérateur  $C \rightarrow$  changement d'échelle

$$p^x = v_b C^{bb} u_b^x \quad \text{avec :} \quad u_b^x = B_b^q u_q^x$$

On doit ensuite projeter ce vecteur sur la sphère normée entourant le réseau.

$$E^\omega = p^x \epsilon_x^\omega = v_b C^{bb} u_b^x \epsilon_x^\omega$$

Donne la connexion entre les directions de l'espace orthogonal et les « ports » projetés sur la sphère entourant le réseau.

Un processus semblable se retrouve avec le moment dipolaire résultant magnétique. Quel est le lien avec le formalisme des gamma-matrices?

$$v_b C^{bb} u_b^x \epsilon_x^\omega \rightarrow S_b^\omega g_{bb} p_b \Rightarrow g_{bb} p_b = v_b C^{bb} \quad S_b^\omega \approx u_b^x \epsilon_x^\omega$$



La contraction du rayonnement en émissions et réceptions et l'aspect multi-échelle de la méthode → connexion spatiale.

$$\text{à l'émission : } E^\omega = \epsilon_x^\omega \left[ V_b C^{bb} u_b^x \right] = \epsilon_x^\omega p^x$$

$$\text{à la réception : } e_\mu = L_\mu^b u_b^x \epsilon_\omega^x E^\omega (p^x)$$

*(mêmes processus en dipôles magnétiques)*

Un système complexe se ramène ici en électromagnétisme à des ports de conduction & des cordes de champ proche et des ports sur des jonctions de rayonnements (diagrammes de rayonnements discrétisés) avec une surface apparente (SER) vis à vis des champs incidents.

Processus multi-échelle de la poupée russe.

Nota : pour la couche quantique, connexion par les fonctions de calcul de probabilité de présence





- 
- Les tenseurs vus en listes
  - L'invariant de Kron – la métrique d'opérateurs - connectivité de Kron
  - Assemblages
  - Branchements
  - Interactions de champs proches
  - Interactions de champ lointain
  - **Interactions de Branin**
  - Couplages entre réseaux attachés à diverses physiques
  - Disponibilité d'un couplage vers des réseaux hamiltoniens
  - Équation tensorielle finale



Branin, disciple de Kron, continuera son oeuvre sur la topologie des réseaux.

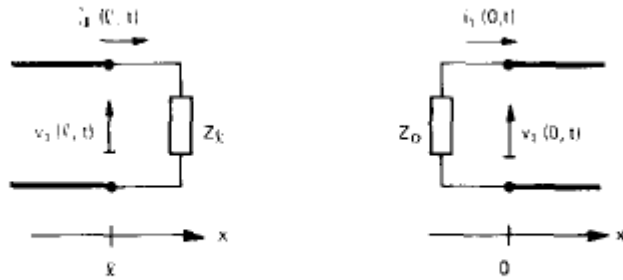


FIG. 7. — Schémas pour le calcul des conditions aux limites.

Schéma de Branin décrit dans la monographie de Jean-Paul VABRE (accessible sous SpringerLink)

$$\begin{cases} e_{(\mu)}(x=L) = \beta_{(\mu)}^{\mu} * [V_{\mu}(x=0) + Zc_{\mu\nu} i^{\nu}(x=0)] \\ e_{(\mu)}(x=0) = \beta_{(\mu)}^{\mu} * [V_{\mu}(x=L) - Zc_{\mu\nu} i^{\nu}(x=L)] \end{cases}$$

The Algebraic - Topological Basis  
For Network Analogies and the  
Vector Calculus

F. H. Branin, Jr.

IBM Systems Development Division, Kingston, N. Y.



- 
- Les tenseurs vus en listes
  - L'invariant de Kron – la métrique d'opérateurs - connectivité de Kron
  - Assemblages
  - Branchements
  - Interactions de champs proches
  - Interactions de champ lointain
  - Interactions de Branin
  - **Couplages entre réseaux attachés à diverses physiques**
  - Disponibilité d'un couplage vers des réseaux hamiltoniens
  - Équation tensorielle finale



## Réseau physique 1

$$p_{\alpha} + \beta_{\alpha}^{\beta} * [\psi'_{\beta} + Zc_{\beta\nu} i'^{\nu}] + G_{\alpha}^{\xi} p'_{\xi} = Z_{\alpha\nu} \{ i^{\nu} + J^{\nu} + G_{\omega}^{\nu} i'^{\omega} \} + \Gamma_{\alpha\eta,t} i^{\eta}$$

$$p'_{\alpha} + \beta'_{\alpha}{}^{\beta} * [\psi_{\beta} + Zc_{\beta\nu} i^{\nu}] + G'_{\alpha}{}^{\xi} p_{\xi} = Z'_{\alpha\nu} \{ i'^{\nu} + J'^{\nu} + G'_{\omega}{}^{\nu} i^{\omega} \} + \Gamma'_{\alpha\eta,t} i'^{\eta}$$

## Réseau physique 2



- 
- Les tenseurs vus en listes
  - L'invariant de Kron – la métrique d'opérateurs - connectivité de Kron
  - Assemblages
  - Branchements
  - Interactions de champs proches
  - Interactions de champ lointain
  - Interactions de Branin
  - Couplages entre réseaux attachés à diverses physiques
  - **Disponibilité d'un couplage vers des réseaux nodaux ou hamiltoniens**
  - Équation tensorielle finale





$$\begin{cases} p_\alpha + \beta_\alpha^\beta * [\psi'_\beta + Zc_{\beta\nu} i'^\nu] + G_\alpha^\xi p'_\xi = Z_{\alpha\nu} \{i^\nu + J^\nu + G^\nu_\omega i'^\omega\} + \Gamma_{\alpha\eta,t} i^\eta \\ J^\nu = Y^{\nu\mu} \psi'_\mu \end{cases}$$

Kron → forme modale, lagrangien. L'équation couplée peut aussi être une équation exprimée sous une forme hamiltonienne (travaux d'Alain REINEIX).

$$R_{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial \phi_\nu} + \frac{\partial H}{\partial q^\mu} = u_\mu - \dot{\phi}_\mu$$

Expression synthétique par les « h-tenseurs » (tenseurs hybrides de Maurice - Reineix)

$$\begin{pmatrix} p_\alpha \\ J^\nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_\alpha^\xi & 0 \\ 0 & \beta_\alpha^\beta * Zc_{\beta\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_\xi \\ i'^\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\eta,t} & 0 \\ 0 & Y^{\nu\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^\nu \\ \psi'_\mu \end{pmatrix}$$



- 
- Les tenseurs vus en listes
  - L'invariant de Kron – la métrique d'opérateurs - connectivité de Kron
  - Assemblages
  - Branchements
  - Interactions de champs proches
  - Interactions de champ lointain
  - Interactions de Branin
  - Couplages entre réseaux attachés à diverses physiques
  - Disponibilité d'un couplage vers des réseaux hamiltoniens
  - **Équation tensorielle finale**



$$\begin{cases} p_\alpha + \beta_\alpha^\beta * [\psi'_\beta + Zc_{\beta\nu} i'^\nu] + G_\alpha^\xi p'_\xi = Z_{\alpha\nu} \{ i^\nu + J^\nu + G^\nu_\omega i'^\omega \} + \Gamma_{\alpha\eta,t} i^\eta \\ J^\nu = Y^{\nu\mu} \psi'_\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} p'_\alpha + \beta'_\alpha^\beta * [\psi_\beta + Zc_{\beta\nu} i^\nu] + G'^\alpha_\xi p_\xi = Z'_{\alpha\nu} \{ i'^\nu + J'^\nu + G'^\nu_\omega i^\omega \} + \Gamma'_{\alpha\eta,t} i'^\eta \\ J'^\nu = Y'^{\nu\mu} \psi_\mu \end{cases}$$



# SOMMAIRE

---

- La complexité en compatibilité électromagnétique (CEM)
- L'évolution des architectures systèmes
- La complexité croissante des circuits électroniques
- Conséquence de la croissance des fonctions simples disponibles dans les systèmes électroniques
- Outils et démarches classiques actuels
- La limite de ces approches
- Mathématiser l'ingénierie : l'idée de Gabriel KRON
  - Travaux de Papin et Kaufmann
  - Les analyses de Banesh hoffmann
  - La mise en pratique pour la CEM : petit historique
- L'état d'avancement des travaux dans le cadre du REI DIAMANTS
  - Les objectifs du REI
  - Les interactions modélisées & techniques développées
- *La capacité d'analyse théorique*
- Perspectives :
  - Outils du futur



L'analyse tensorielle des réseaux permet d'étudier théoriquement les systèmes.

Supposons un système avec une métrique séparable en parties statique et propagée :

$$z_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + m_{\mu\nu}$$

Les opérateurs en propagation ont l'allure suivante :  $c \frac{e^{-\tau p}}{R}$  et  $m$  :

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{c}{R} e^{-\tau p} \\ \frac{c}{R} e^{-\tau p} & 0 \end{bmatrix}$$

Si ce système est plongé dans un milieu gazeux d'indice relatif supérieur à 1, la partie propagation se trouve dilatée suivant :

$$m_{\mu\nu} \rightarrow m_{\mu\nu} \Lambda_{\alpha}^{\nu}$$

Une telle transformation peut être réalisée par la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} \frac{R}{R'} e^{(\tau-\tau')p} & 0 \\ 0 & \frac{R}{R'} e^{(\tau-\tau')p} \end{bmatrix}$$





---

Comment varient les intensités de flux en fonction de l'indice?

$$i^\nu = \frac{1}{g_{\mu\nu} + m_{\mu\beta} \Lambda^\beta_\nu} e_\mu \Rightarrow \frac{\partial i^\nu}{\partial \tau'} = \frac{-p m_{\mu\beta} \Lambda^\beta_\nu}{\left(g_{\mu\nu} + m_{\mu\beta} \Lambda^\beta_\nu\right)^2} e_\mu$$

Supposons la partie propagée de première influence par rapport à la partie statique →

$$\frac{\partial i^\nu}{\partial \tau'} \approx -p Y^{\nu\mu} e_\mu \quad \text{avec :} \quad \frac{1}{m_{\mu\beta} \Lambda^\beta_\nu} = Y^{\nu\mu}$$

Les flux engendrés vont varier comme les dérivées de sources.



# SOMMAIRE

---

- La complexité en compatibilité électromagnétique (CEM)
- L'évolution des architectures systèmes
- La complexité croissante des circuits électroniques
- Conséquence de la croissance des fonctions simples disponibles dans les systèmes électroniques
- Outils et démarches classiques actuels
- La limite de ces approches
- Mathématiser l'ingénierie : l'idée de Gabriel KRON
  - Travaux de Papin et Kaufmann
  - Les analyses de Banesh hoffmann
  - La mise en pratique pour la CEM : petit historique
- L'état d'avancement des travaux dans le cadre du REI DIAMANTS
  - Les objectifs du REI
  - Les interactions modélisées & techniques développées
- La capacité d'analyse théorique
- **Perspectives :**
  - [Outils du futur](#)



---

Réalisation d'un compilateur d'analyse de netlists où sont possibles des opérations d'assemblages, transformations, connexions de branchements, interactions de champs proches, champ lointain, etc.

Le compilateur construira automatiquement les opérations citées et construira le fichier de résolution du système d'équations intégrées-différentielles.



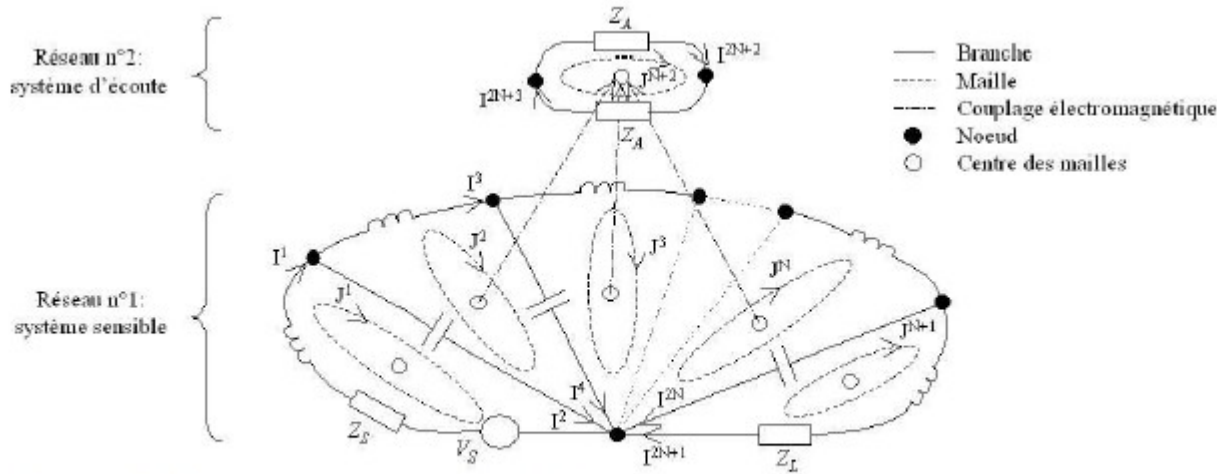


Fig. 2 – Graphe topologique équivalent à la Fig. 1 incluant les couplages électromagnétiques (type champ lointain) provenant du réseau n°1 vers le réseau n°2.

Temps de calcul qq sec vs qq minutes voire qq heures!

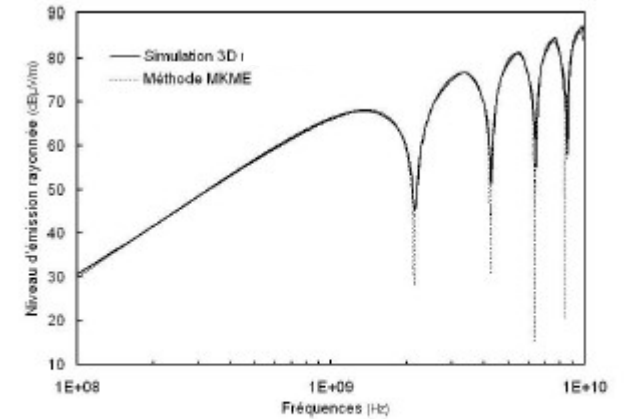


Fig. 3 – Comparaison des résultats du champ électrique rayonné par le système sensible calculés par la méthode MKME et une méthode 3D.



# Both EMC and SEE constraints on electronics

Guillaume Hubert<sup>1</sup>, Olivier Maurice<sup>2</sup>, Rémi Gaillard<sup>3</sup>, Jean-Claude Boudenot<sup>†</sup>

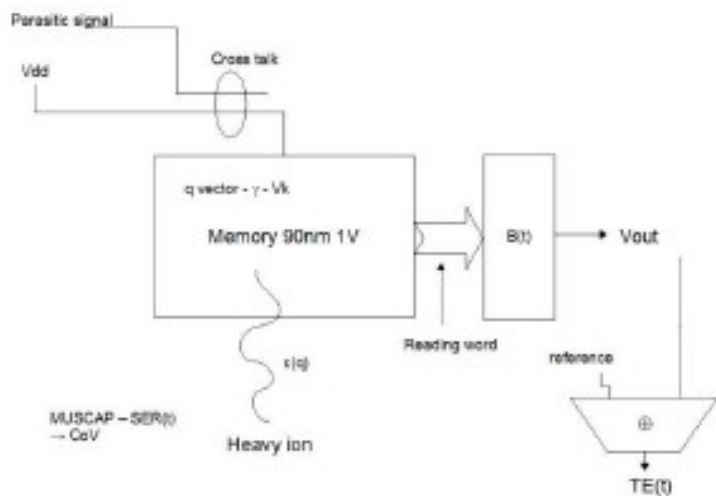


Fig. 1. Schematic of the problem solved.

$$V_k(t) = \delta_k^g(t, Vdd) [U_g(t)] = \delta_k^g(t, Vdd) [\gamma_{gm} q^m(t)]$$

Connexion vers un espace de l'information  $q^m$ .

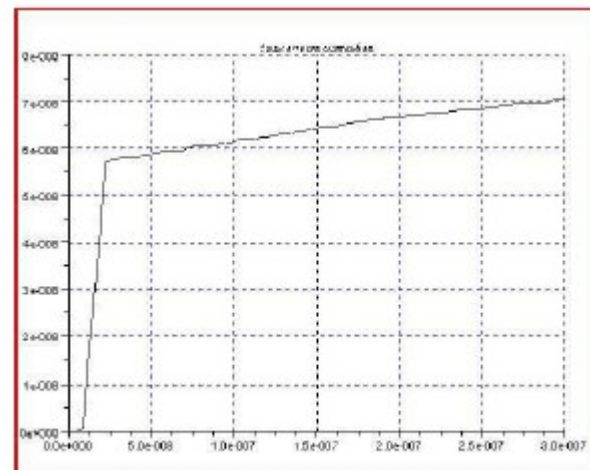
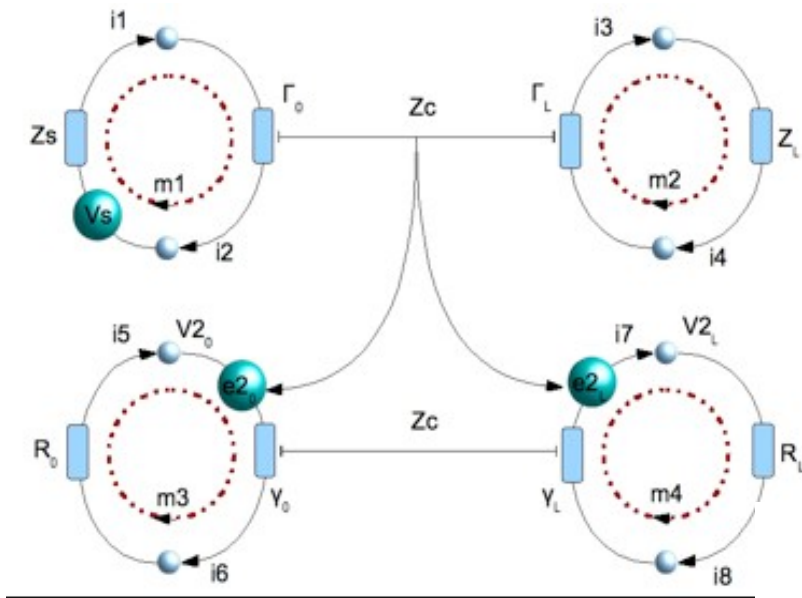


Fig.3. TE function obtain in case of continuous SEP illumination





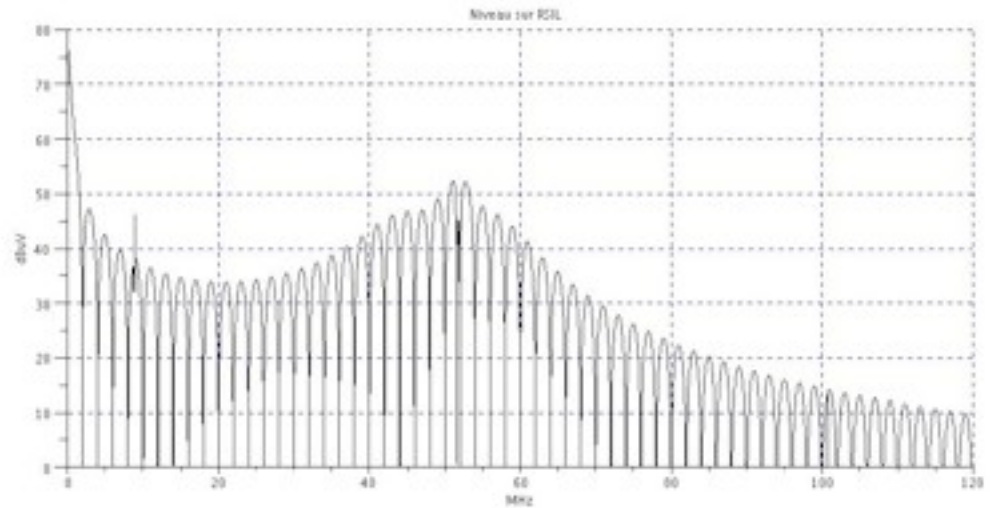
# Calcul de lignes couplées



$$V_2(0, p) = \frac{\alpha}{2} \frac{1+y_0}{1-y_0 y_L e^{-2\tau p}} \frac{1-\Gamma_0}{1-\Gamma_0 \Gamma_L e^{-2\tau p}} \left[ \frac{K+1}{4} (1-e^{-2\tau p}) (1+y_L \Gamma_L e^{-2\tau p}) - \frac{K-1}{2} (y_L + \Gamma_L) p \tau e^{-2\tau p} \right] V_S(p)$$

$$V_2(L, p) = \frac{\alpha}{2} \frac{1+y_L}{1-y_0 y_L e^{-2\tau p}} \frac{1-\Gamma_0}{1-\Gamma_0 \Gamma_L e^{-2\tau p}} \left[ \frac{K+1}{4} (1-e^{-2\tau p}) (y_0 + \Gamma_L) - \frac{K-1}{2} (1+y_0 \Gamma_L e^{-2\tau p}) p \tau \right] V_S(p) e^{-pL}$$

$$e_{IL} = \left[ \frac{Z_o(L) + R_L}{R_L} \left( \frac{\alpha}{2} \frac{1+y_L}{1-y_0 y_L e^{-2\tau p}} \frac{1-\Gamma_0}{1-\Gamma_0 \Gamma_L e^{-2\tau p}} \left[ \frac{K+1}{4} (1-e^{-2\tau p}) (y_0 + \Gamma_L) - \frac{K-1}{2} (1+y_0 \Gamma_L e^{-2\tau p}) p \tau \right] \right) \right] e^{-pL} Z_o(0) m^2$$



# Proposal of a New High Frequencies Susceptibility Characterization Tool for Large IC's

E.LAMOUREUX(1) - L.SAISSI(2) - C.HUET(2) - E.SICARD(3) - O.MAURICE(1)

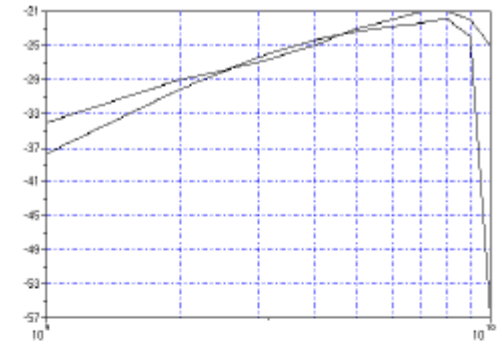
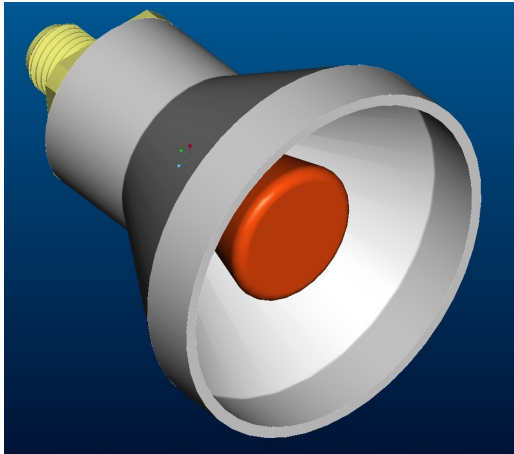


Figure 4: Comparison measure - computation

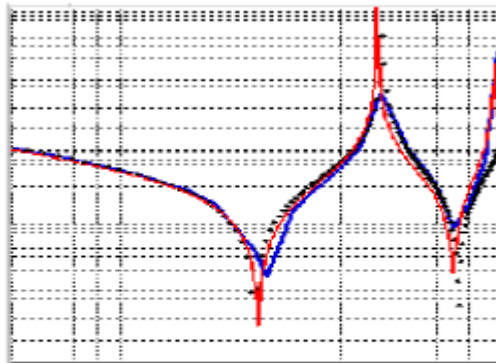


Figure 2: Comparison analytical(black points) - EMC2000(blue) - measure(red)

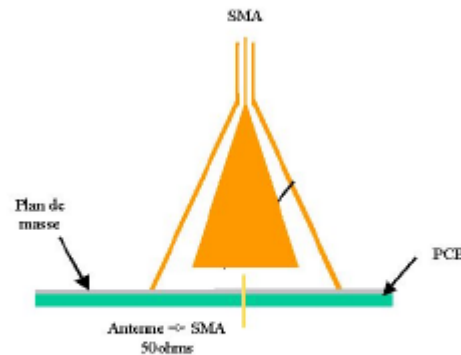


Figure 3: S21 parameter mokus

$$z_{ab} = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s.C_c} + s.L & 0 & -s.M & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s.\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & -s.M & 0 & \frac{1}{s.C_a} + s.L_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

Relation 3

$$\Lambda_m^b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Relation 4



# EMC-ORIENTED ANALYSIS OF ELECTRIC NEAR-FIELD IN HIGH FREQUENCY

Ali Alaeldine<sup>1,2</sup>, Olivier Maurice<sup>3\*</sup>, Jérôme Cordi<sup>1,2,4</sup>,  
Richard Perdriau<sup>1</sup>, and Mohamed Ramdani<sup>1</sup>

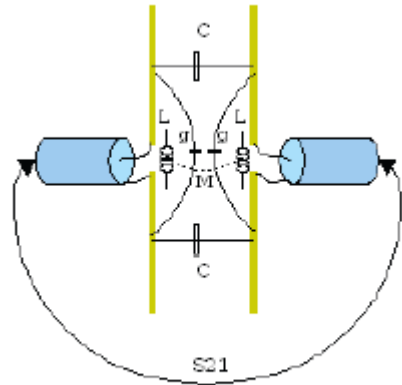


Fig. 2. Interaction between both half-wave antennas

$$C \approx \epsilon_0 \left[ d \ln \left( \frac{2h}{\Delta} \right) + \pi \frac{d^2}{\Delta} \right]$$

$$M_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{y_1} \int_{y_2} \frac{\cos(y_1 - y_2)}{\sqrt{D^2 + (y_1 - y_2)^2}} dy^2$$

$$L = \frac{1}{2} \frac{\pi \mu h}{2}$$

$$M = \begin{pmatrix} s \frac{1}{g\omega_0^2} & 0 & sM'_{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ sM'_{12} & 0 & s \frac{1}{g\omega_0^2} \end{pmatrix}$$

frequency domain for every distance

$$Z_{\mu\nu} = L_{\mu}^a L_{\nu}^b Z_{ab} + M_{\mu\nu}$$

$$e_{\mu} = Z_{\mu\nu} I^{\nu}$$

$$S_{21} = \left| 50 \frac{I^3}{e_1} \right|$$

$$Z = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{sg} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{sC} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sg} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

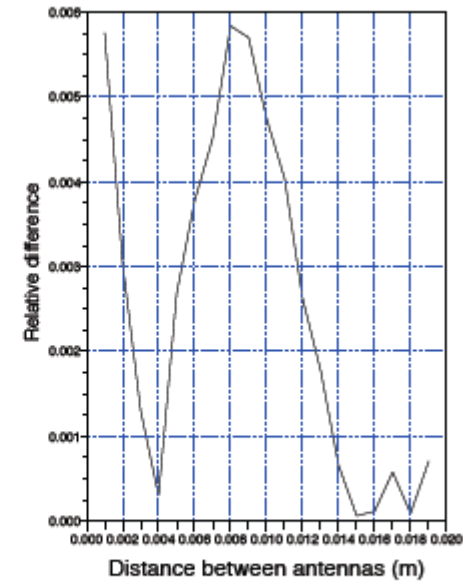
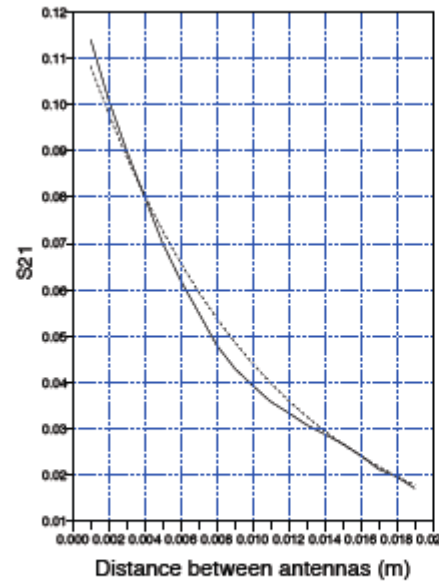


Fig. 3. Left : comparison between measurements (solid) and theoretical values (dotted) for the  $S_{21}$  parameter. Right : relative difference between both curves





# GENERAL EMC TECHNIQUES FOR POWER SYSTEMS IN THE CONCEPTION PHASE

S.Dubois<sup>1</sup>, O.Maurice<sup>1</sup>.

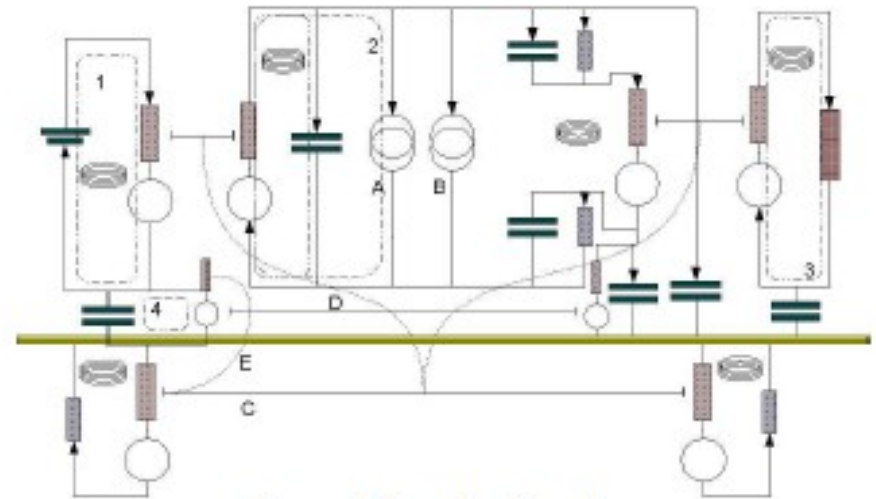
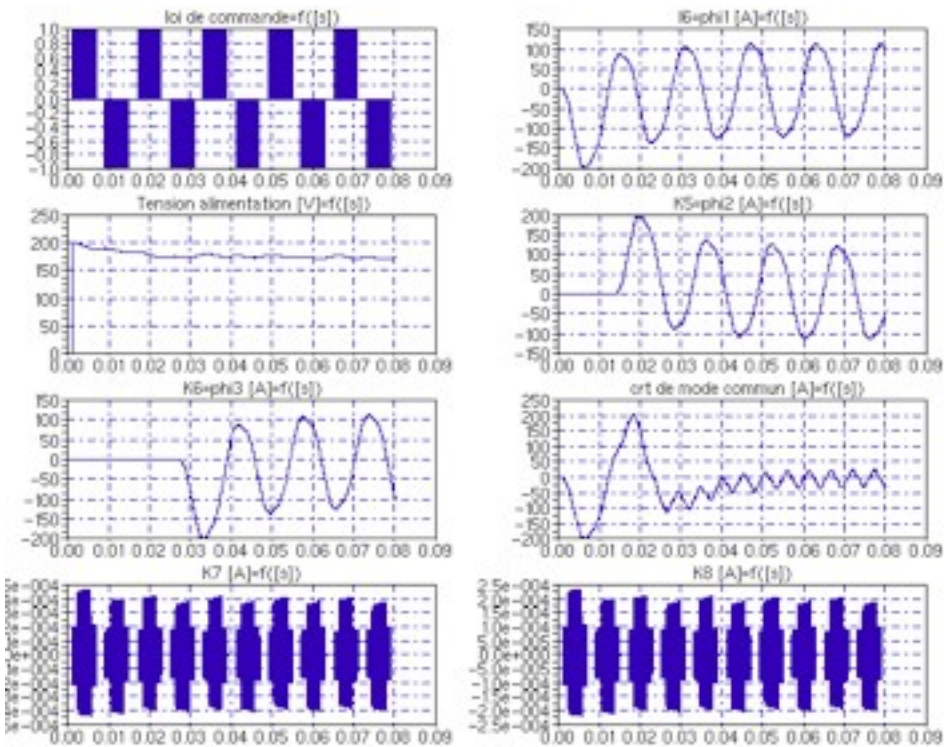
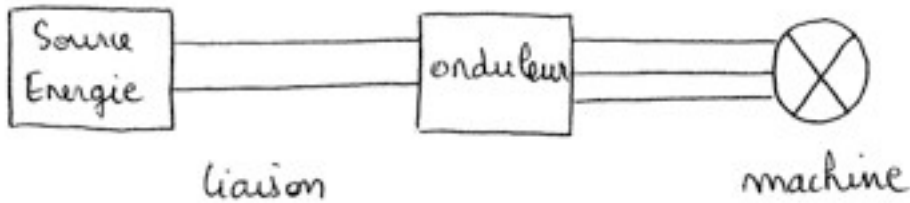


Figure 1. Example of graph

$$RDS(t) = RDS_{ON} + RDS_{OFF} e^{-\left[\frac{2delay+center-t}{width}\right]^p} \quad (1)$$



$$V_d = V_j + R_s I_d(V_{sys})$$

$$I_d = I_s \left\{ \exp \left[ \frac{qV_j}{K_B T} \right] - 1 \right\} \quad (2)$$

$$\left\{ \frac{I(t+dt) - I(t)}{dt} \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{J}{\delta} \left( 1 - \frac{K(t-2)}{2K(t-1)} \right) \quad (3)$$



# Prévision de contraintes sur extrémités de câblages blindés (travaux de Rémi CASAGRANDE, GERAC)

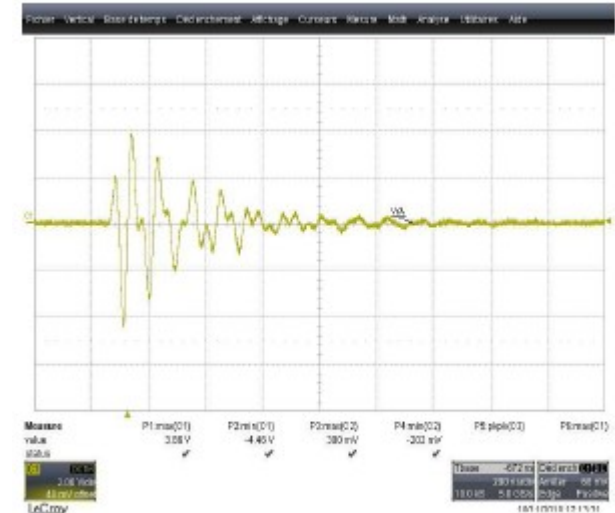
```
//définition de la source, forme d'onde=10MHz
//-----
dt=0.1E-6/200;
nbpt=20*20*10;
As=200; // amplitude crête
np=1; // rapport de transformation de la pince
Ro=50; // impédance interne du générateur
fo=10E6; // pseudo-période
To=1/fo;
affa=8; // coefficient d'affaiblissement en nombre de périodes
e=zeros(1,nbpt);
for t=[1,nbpt]
    e(t)=np*As*sin(2*pi*fo*t*dt)*exp(-(t*dt)/(affa*To));
end,

//traitement temporel du couplage de l'onde source sur le câble
kcc=zeros(nbpt,9);
kco=zeros(nbpt,9);
J=zeros(nbpt,1);
J1=zeros(nbpt,1);
Wcc=[Rcc+Rf+np*Ro-Lf/dt 0 0 0 0 0 0 0 0
      np*Ro Rcc+Rf+Lf/dt 0 0 0 0 0 0 0
      np*Ro 0 Rcc+Rf-Lf/dt 0 0 0 0 0 0
      np*Ro 0 0 Rb+Lb/dt 0 0 0 0 0
      np*Ro 0 0 0 Rb+Lb/dt 0 0 0 0
      np*Ro 0 0 0 0 Rb+Lb/dt 0 0 0
      0 0 0 0 0 Rcc+Rl+Ll/dt 0 0
      0 0 0 0 0 0 Rcc+Rl+Ll/dt 0
      0 0 0 0 0 0 0 Rcc+Rl+Ll/dt];
Wco=[Rco+Rf+np*Ro-Lf/dt 0 0 0 0 0 0 0 0
      np*Ro Rco+Rf+Lf/dt 0 0 0 0 0 0 0
      np*Ro 0 Rco+Rf-Lf/dt 0 0 0 0 0 0
      np*Ro 0 0 Rb+Lb/dt 0 0 0 0 0
      np*Ro 0 0 0 Rb+Lb/dt 0 0 0 0
      np*Ro 0 0 0 0 Rb+Lb/dt 0 0 0
      0 0 0 0 0 Rco+Rl+Ll/dt 0 0
      0 0 0 0 0 0 Rco+Rl+Ll/dt 0
      0 0 0 0 0 0 0 Rco+Rl+Ll/dt];
```

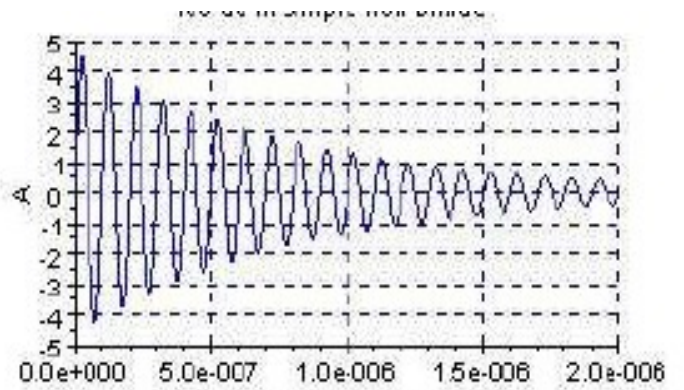
```
for s=[6,nbpt]
    //définition du vecteur des sources
    Tcc=[np*e(s)+Lf/dt*kcc(s-1,1)
          np*e(s)+Lf/dt*kcc(s-1,2)
          np*e(s)+Lf/dt*kcc(s-1,3)
          np*e(s)+Lb/dt*kcc(s-1,4)
          np*e(s)+Lb/dt*kcc(s-1,5)
          np*e(s)+Lb/dt*kcc(s-1,6)
          (Rt+Lt/dt)*kcc(s-1,4)-Lt/dt*kcc(s-2,4)+Ll/dt*kcc(s-1,7)
          (Rt+Lt/dt)*kcc(s-1,5)-Lt/dt*kcc(s-2,5)+Ll/dt*kcc(s-1,8)
          (Rt+Lt/dt)*kcc(s-1,5)-Lt/dt*kcc(s-2,5)+Ll/dt*kcc(s-1,9)];
    Tco=[np*e(s)+Lf/dt*kco(s-1,1)
          np*e(s)+Lf/dt*kco(s-1,2)
          np*e(s)+Lf/dt*kco(s-1,3)
          np*e(s)+Lb/dt*kco(s-1,4)
          np*e(s)+Lb/dt*kco(s-1,5)
          np*e(s)+Lb/dt*kco(s-1,6)
          (Rt+Lt/dt)*kco(s-1,4)-Lt/dt*kco(s-2,4)+Ll/dt*kco(s-1,7)
          (Rt+Lt/dt)*kco(s-1,5)-Lt/dt*kco(s-2,5)+Ll/dt*kco(s-1,8)
          (Rt+Lt/dt)*kco(s-1,5)-Lt/dt*kco(s-2,5)+Ll/dt*kco(s-1,9)];
    J=pinv(Wcc)*Tcc;
    J1=pinv(Wco)*Tco;

    kcc(s,:)=J';
    kco(s,:)=J1';
end,
//affichage et sauvegarde éventuelle des résultats
//-----
//Affichage Icc et Vco => ici le Vco et Icc des fils blindés
subplot(1,2,1);plot2d([1,nbpt]*dt,kcc(:,7),style=[color("blue")]);xgrid(9);xtitle('Iblindée 1','s','V');
subplot(1,2,2);plot2d([1,nbpt]*dt,kco(:,7)*Rco,style=[color("green")]);xgrid(9);xtitle('Tens 1','s','V');
```

mesure



Mesure de Vco sur les trois câbles blindés  
Vco max=4V



calcul





# EMI FILTER OPTIMIZATION IN CONVERTERS

Yannick Poiré<sup>1</sup>, Olivier Maurice<sup>2</sup>, Mohamed Ramdani<sup>3</sup>, M'hamed Drissi<sup>4</sup>, Pascal Asfaux<sup>5</sup>

## II. STUDIED CONVERTER

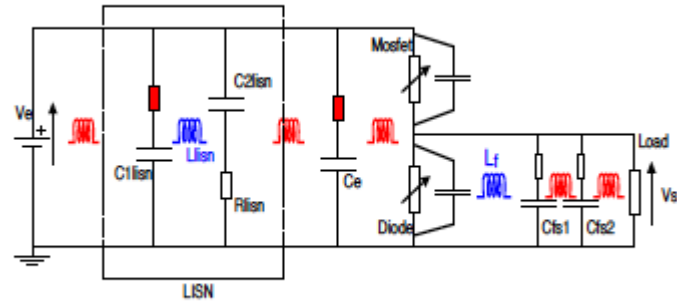


Fig.1 – Buck converter: simplified circuit.

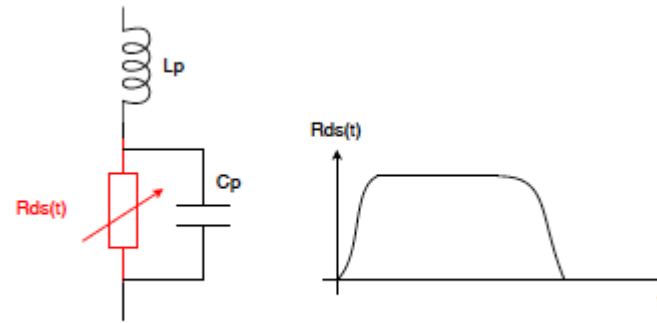


Fig.2 – Minimum switch model.

## IV. EMI FILTER OPTIMIZATION

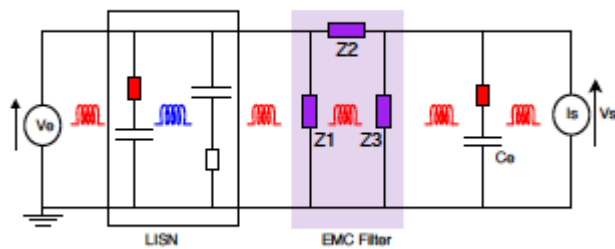


Fig.4 – EMI filter simulation circuit

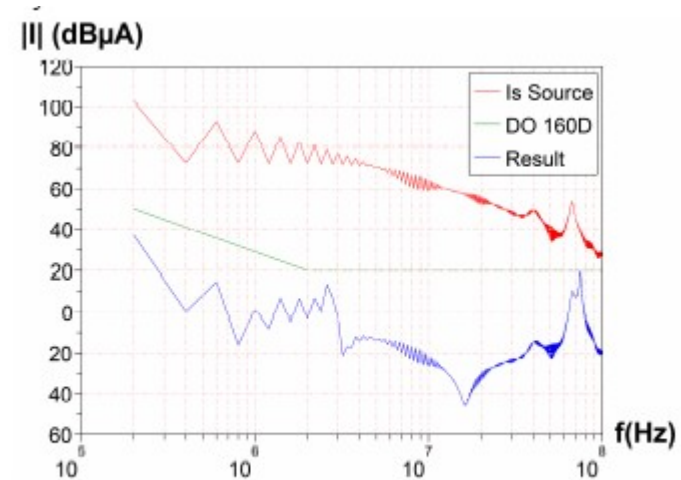


Fig.6 – Optimized filtering (200 generations, population = 20).



# Tensorial Analysis of Control Systems

By GABRIEL KRON, SCHENECTADY N. Y.

TABLE 1 THE SIX "MECHANICAL" ELEMENTARY UNITS





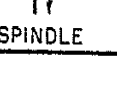

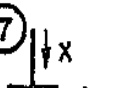

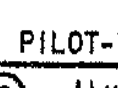
①		$Z = x \begin{bmatrix} x \\ mp^2 \end{bmatrix}$	$f_0 = x \begin{bmatrix} -mg \end{bmatrix}$
②		$Z = x \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}$	$f_0 = x \begin{bmatrix} k(d+x) \end{bmatrix}$
③		$Z = x \begin{bmatrix} x \\ rp \end{bmatrix}$	$f_0 = x \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
④		$Z = \begin{bmatrix} \psi & x \\ Ip^2 + rp & \\ & mp^2 + r'p \end{bmatrix}$	$f_0 = \begin{bmatrix} \psi \\ x \\ r\psi \\ -mg \end{bmatrix}$
⑤		$Z = \begin{bmatrix} \psi & \theta \\ 2mk_0^2 p^2 + r_1 p & 4mk_0 k_0' \dot{\psi}_0 p \\ -4mk_0 k_0' \dot{\psi}_0 p & 2m\dot{\psi}_0^2 (k_0 k_0'' + k_0'^2) + 2gm\ell \cos \theta_0 \end{bmatrix}$	$f_0 = \begin{bmatrix} \psi \\ \theta \\ r_1 \dot{\psi}_0 \\ 2mgl \sin \theta_0 - 2mk k' \dot{\psi}_0^2 \end{bmatrix}$
⑥		$Z = \begin{bmatrix} \psi & P \\ Ip^2 + rp + k & -v \end{bmatrix}$	$f_0 = \begin{bmatrix} \psi \\ P \\ vp + r\dot{\psi} \end{bmatrix}$

TABLE 2 THE THREE "OIL-CIRCUIT" ELEMENTARY UNITS

⑦		$Z = \begin{bmatrix} x & \gamma & P \\ x & & \\ \gamma & & -q \\ P & -l & T_p \end{bmatrix}$	$f_0 = \begin{bmatrix} x \\ \gamma \\ P \\ -qP \end{bmatrix}$
⑧		$Z = \begin{bmatrix} \psi & x & P \\ \psi & & \\ x & & -q \\ P & -\delta ap & \delta cp & a\psi_0 / (P_2 - P_0) \end{bmatrix}$	$f_0 = \begin{bmatrix} \psi & x & P \\ -qP & a\psi_0 - b\dot{\psi}_0 (P_2 - P_1) / \delta \end{bmatrix}$
⑨		$Z = \begin{bmatrix} \psi & x & P \\ \psi & & \\ x & & -q \\ P & -2a\dot{\psi}_0 p & bcp & l \end{bmatrix}$	$f_0 = \begin{bmatrix} \psi \\ x \\ P \\ -Pq \\ P - a\dot{\psi}_0^2 \end{bmatrix}$



THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE des SCIENCES et TECHNOLOGIE de LILLE  
(LILLE 1)

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR en ELECTRONIQUE

Par  
Samuel LEMAN  
(Ingénieur de l'école Polytech'Lille)

le 13 novembre 2009

Contribution à la Résolution de Problèmes de  
Compatibilité Electromagnétique par le Formalisme des  
Circuits Electriques de KRON

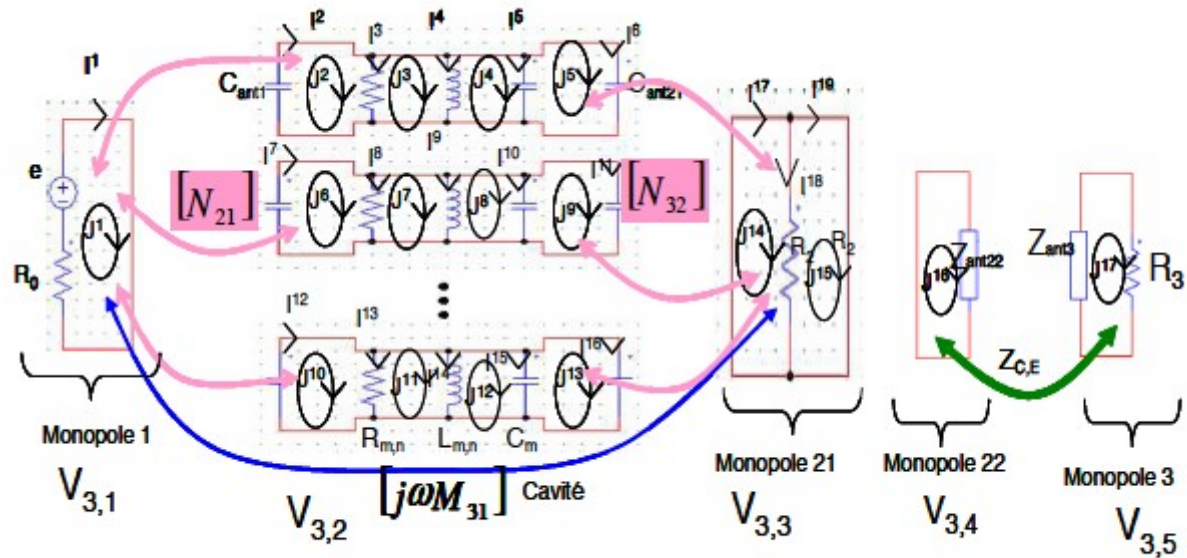


Fig.IV.3 : Schéma électrique équivalent du système global non connecté.

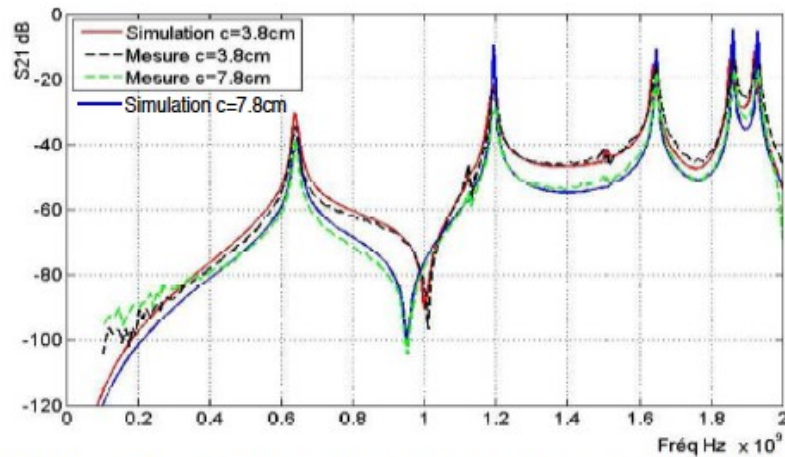


Fig.IV.6 : Comparaison mesure simulation du paramètre  $S_{21}$  entre les monopoles 1 et 21

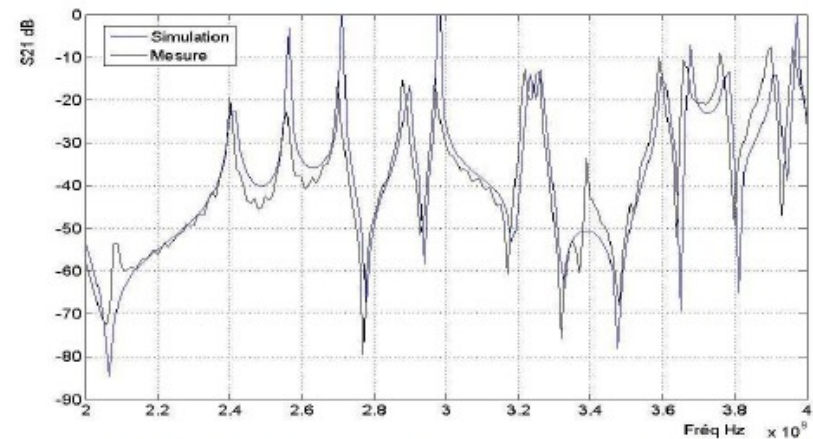


Fig.IV.7 : Résultat comparatif mesure/simulation du volume  $V_{2,1}$  en HF



---

*Fin*

*Merci à François DUBOIS pour sa proposition de présenter nos travaux*

PS : Nous sommes intéressés par tout mathématicien qui désirerait étudier les techniques que nous avons développées pour les formaliser dans le cadre d'articles scientifiques co-écrits, ou sous la forme d'autres coopérations.



Les Maths du Cnam

