

Extension des schémas de Boltzmann sur réseau aux écoulements de gaz à grands nombres de Knudsen

Léonard de Izarra

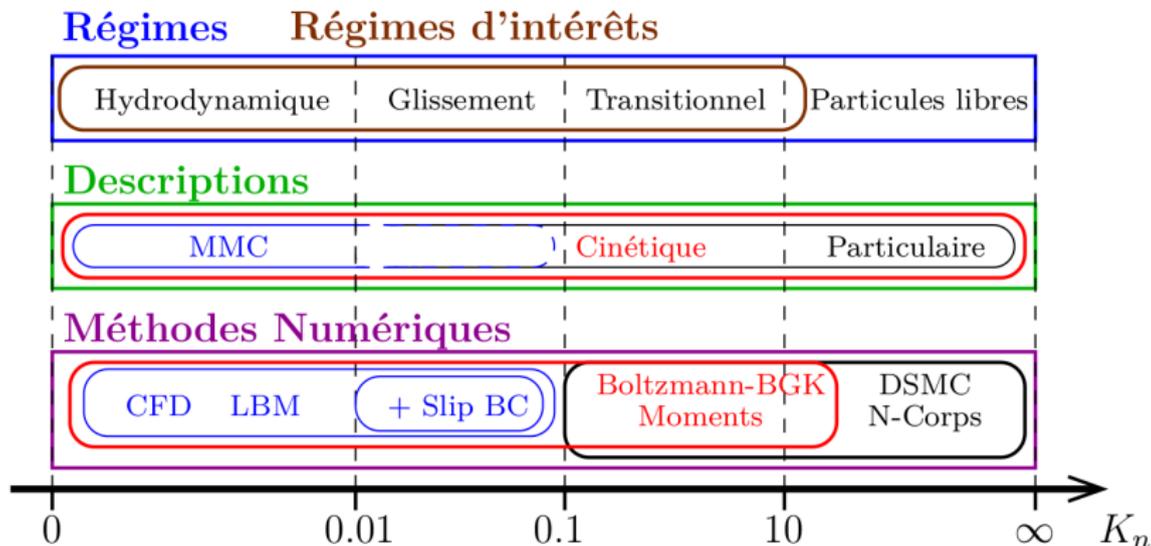
Institut Henri Poincaré (IHP), Paris

Le 2 Mars 2016

- 1 Contexte et objectifs
- 2 Présentation de la méthode
- 3 Résultats et validation de la méthode
- 4 Conclusion

Nombre de Knudsen

$$K_n = \frac{\text{Libre parcours moyen des particules du fluide}}{\text{Dimension caractéristique de l'écoulement}} = \frac{\lambda}{L}$$



- Paroi solide en \mathbf{x}_W de normale \mathbf{n}
 - U_W et T_W : vitesse tangentielle et température de la paroi
- Vitesse de glissement du gaz à la paroi

$$\mathbf{u}_{\text{slip}} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_W) - \mathbf{U}_W = C_1 K_n \mathbf{n} \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_W} + C_2 K_n^2 \mathbf{n} \mathbf{n} : \left. \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_W}$$

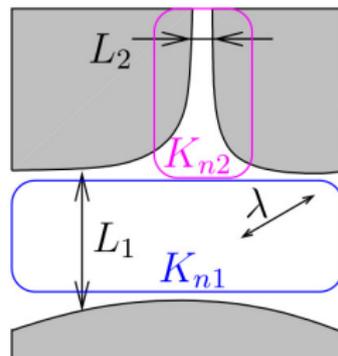
- C_1 et C_2 sont les coefficients de glissements
- Saut de température à la paroi

$$T_{\text{jump}} = T(\mathbf{x}_W) - T_W = \frac{D + 2 K_n}{D + 1 P_r} \mathbf{n} \left. \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_W}$$

- D : Dimension de l'espace
 - P_r : Nombre de Prandlt
- Dans la limite hydrodynamique ($K_n \rightarrow 0$) : $u_{\text{slip}} \rightarrow 0$ et $T_{\text{jump}} \rightarrow 0$

Plusieurs régimes d'écoulements peuvent coexister au sein d'un même domaine

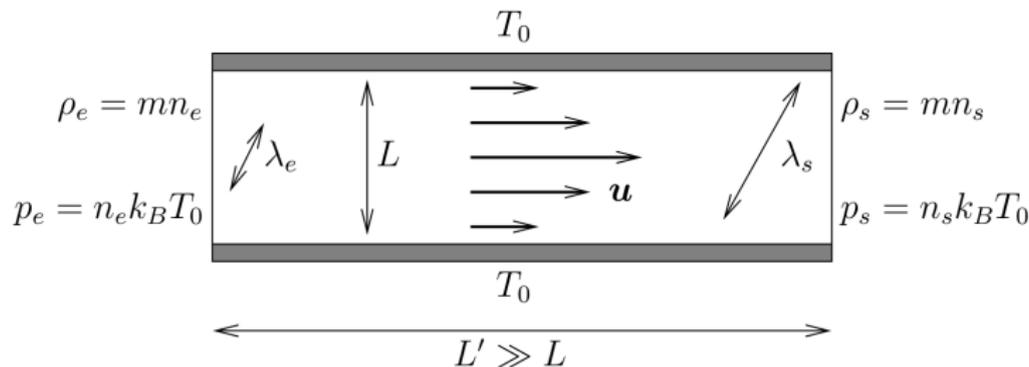
- Pour des raisons géométriques de confinement : plusieurs tailles caractéristiques L
- Pour des raisons thermodynamiques : variations de λ



$$\lambda = C^{te} \text{ et } L_1 > L_2 \Rightarrow K_{n1} < K_{n2}$$

Plusieurs régimes d'écoulements peuvent coexister au sein d'un même domaine

- Pour des raisons géométriques de confinement : plusieurs tailles caractéristiques L
- Pour des raisons thermodynamiques : variations de λ



$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \Rightarrow \text{si } n \searrow \text{ alors } \lambda \nearrow$$

$$n_e > n_s \Rightarrow \lambda_e < \lambda_s$$

Plusieurs régimes d'écoulements peuvent coexister au sein d'un même domaine

- Pour des raisons géométriques de confinement : plusieurs tailles caractéristiques L
- Pour des raisons thermodynamiques : variations de λ

Les deux effets peuvent se cumuler

- Équation de Boltzmann, car valide pour tout K_n

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mathbf{g} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}$$

- $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$: Fonction de distribution à une particule
 - $\mathbf{g} = \mathbf{F}/m$: Accélération extérieure ou de champ moyen
 - $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}$: Effets des collisions entre particules sur f
- L'opérateur de collision BGK sera retenu pour sa simplicité

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = -\frac{1}{\tau} (f - f^{eq})$$

- $f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$: Fonction de *distribution* d'équilibre de *Maxwell-Boltzmann*
- τ : Temps de relaxation de f vers l'équilibre f^{eq} . Il dépendra localement de la densité ρ et de la température θ du gaz

$$\tau(\rho, \theta) = \tau_0 \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^{1-\varphi}, \quad \varphi \in [0.5, 1]$$

- Représente un gaz de viscosité cinématique $\nu = \theta\tau$ et de diffusivité thermique $\alpha = \theta\tau$ en régime hydrodynamique ($K_n = L/\tau c_s \lesssim 10^{-2}$)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mathbf{g} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = -\frac{1}{\tau} (f - f^{eq})$$

- Distribution d'équilibre de Maxwell-Boltzmann

$$f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{(2\pi\theta(\mathbf{x}, t))^{D/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^2}{2\theta(\mathbf{x}, t)}\right)$$

- f et f^{eq} partagent leurs trois premiers moments :

$$\text{Densité : } \rho = \int f \, d\mathbf{v} = \int f^{eq} \, d\mathbf{v}$$

$$\text{Impulsion : } \rho \mathbf{u} = \int \mathbf{v} f \, d\mathbf{v} = \int \mathbf{v} f^{eq} \, d\mathbf{v}$$

$$\text{Énergie Totale : } D \rho \theta + \rho u^2 = \int \mathbf{v}^2 f \, d\mathbf{v} = \int \mathbf{v}^2 f^{eq} \, d\mathbf{v}$$

- Conditions aux bords de Maxwell sur les parois solides
- Conditions aux limites sur les bords ouverts d'un domaines d'intégration

- Projection sur la base des polynômes d'Hermite
 - Développement explicite de f^{eq} à un ordre limité (ordre 2 ou 3 en pratique)
 - Développement implicite de f selon l'ordre de la quadrature
- Quadrature de Gauss-Hermite pour le calcul des moments de f
 - Induction de la discrétisation de l'espace des vitesses : discrétisation de f
- Splitting en temps des opérateurs de transport et de collision
 - Induit un temps de relaxation discret $\tau_{dt} = \tau - dt/2$
- Discrétisation régulière de l'espace
- Transport
 - Splitting d'espace
 - Schéma limiteur de flux
- Accélération extérieure \mathbf{g} appliquée lors des collisions par modification de $f^{eq}(\mathbf{u}) \rightarrow f^{eq}(\mathbf{u} + \mathbf{g}\rho/\tau)$
- Conditions aux limites (2 types)
 - Conditions aux bords **de Maxwell avec accommodation totale**
 - Conditions aux limites pour les **frontières ouvertes**
 - Densité (ρ) constante, température (θ) constante, pression ($p = \rho\theta$) constante etc.
 - **Extrapolation de Richardson** pour les champs libres

- Les fonctions de distribution f et f^{eq} sont développées sur la base des polynômes d'Hermite $\mathcal{H}_n^{[\theta_0]}$ à des ordres respectifs N et N^{eq}

$$f(x, v, t) = w^{[\theta_0]}(v) \sum_{n=0}^N \frac{a_n(x, t)}{n!} \mathcal{H}_n^{[\theta_0]}(v)$$

$$f^{eq}(x, v, t) = w^{[\theta_0]}(v) \sum_{n=0}^{N^{eq}} \frac{a_n^{eq}(x, t)}{n!} \mathcal{H}_n^{[\theta_0]}(v)$$

- Avec $w^{[\theta_0]}(v) = 1/\sqrt{2\pi\theta_0} \exp(-v^2/2\theta_0)$
- Les coefficients a_n et a_n^{eq} sont les coefficients d'Hermite des développements
 - Ils sont donnés par la **relation d'orthogonalité** des polynômes d'Hermite généralisés :

$$a_n(x, t) = \theta_0^n \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v, t) \mathcal{H}_n^{[\theta_0]}(v) dv$$

$$a_n^{eq}(x, t) = \theta_0^n \int_{-\infty}^{\infty} f^{eq}(x, v, t) \mathcal{H}_n^{[\theta_0]}(v) dv$$

- Ils sont essentiellement les moments de f et f^{eq}

$$f_{N^{eq}}^{eq}(x, v, t) = w^{[\theta_0]}(v) \sum_{n=0}^{N^{eq}} \frac{a_n^{eq}(x, t)}{n!} \mathcal{H}_n^{[\theta_0]}(v)$$

$$a_0^{eq} = \rho$$

$$a_1^{eq} = \rho u$$

$$a_2^{eq} = \rho u^2 + \rho(\theta - \theta_0)$$

$$a_3^{eq} = \rho u^3 + 3\rho(\theta - \theta_0)u$$

$$\mathcal{H}_0^{[\theta_0]}(v) = 1$$

$$\mathcal{H}_1^{[\theta_0]}(v) = v/\theta_0$$

$$\mathcal{H}_2^{[\theta_0]}(v) = v^2/\theta_0^2 - 1/\theta_0$$

$$\mathcal{H}_3^{[\theta_0]}(v) = v^3/\theta_0^3 - 3v/\theta_0^2$$

$$f_0^{eq} = w^{[\theta_0]}(v) \rho, \quad f_1^{eq} = w^{[\theta_0]}(v) \rho \left(1 + \frac{u v}{\theta_0} \right)$$

$$f_2^{eq} = w^{[\theta_0]}(v) \rho \left(1 + \frac{u v}{\theta_0} + \frac{(u v)^2}{2\theta_0^2} + \frac{(\theta - \theta_0)}{2\theta_0} \left(\frac{v^2}{\theta_0} - 1 \right) - \frac{u^2}{2\theta_0} \right)$$

$$f_3^{eq} = w^{[\theta_0]}(v) \rho \left(1 + \frac{u v}{\theta_0} + \frac{(u v)^2}{2\theta_0^2} + \frac{(\theta - \theta_0)}{2\theta_0} \left(\frac{v^2}{\theta_0} - 1 \right) - \frac{u^2}{2\theta_0} \right. \\ \left. + \frac{(u v)^3}{6\theta_0^2} - 3\frac{u^3 v}{6\theta_0^2} + \frac{(\theta - \theta_0)}{2\theta_0^2} \left(\frac{u v^2}{\theta_0} - 3u v \right) \right)$$

- Une quadrature de **Gauss-Hermite à q points** permet de calculer **exactement** les q premiers coefficients a_n de f :

$$a_n = \theta_0^n \int_{-\infty}^{\infty} w^{[\theta_0]}(v) \frac{f \mathcal{H}_n^{[\theta_0]}(v)}{w^{[\theta_0]}(v)} dv = \theta_0^n \sum_{i=1}^q f_i \mathcal{H}_n^{[\theta_0]}(v_i)$$

$$\text{avec } f_i = \omega_i \frac{f(x, v_i, t)}{w^{[\theta_0]}(v_i)}$$

- Les v_i ($i = 1 \dots q$) sont les **q racines** du polynôme $\mathcal{H}_q^{[\theta_0]}$
- Les ω_i ($i = 1 \dots q$) sont les **q poids** de la quadrature
- f_i est une fonction de distribution discrète transportée à la vitesse v_i
- Pour une quadrature à q points, les coefficients $a_q = a_q^{eq} = 0$, car les v_i sont les racines de $\mathcal{H}_q^{[\theta_0]}$
 - Les a_n ne seront donc calculables que jusqu'à l'ordre $q - 1$
 - Cela aura pour conséquences de tronquer la hiérarchie des coefficients a_n de f , donc de tronquer la hiérarchie de ses moments
- Les q premiers coefficients a_n^{eq} de f^{eq} seront aussi exactes et t.q.

$$a_n^{eq} = \theta_0^n \sum_{i=1}^q f_i \mathcal{H}_n^{[\theta_0]}(v_i) \text{ avec } f_i^{eq} = \omega_i \frac{f^{eq}(x, v_i, t)}{w^{[\theta_0]}(v_i)}$$

- Les moments conservés de f_i et de f_i^{eq}

$$\rho = \sum_{i=1}^q f_i = a_0, \quad \rho u = \sum_{i=1}^q v_i f_i = a_1, \quad \rho \theta + \rho u^2 = \sum_{i=1}^q v_i^2 f_i = a_2 - \rho \theta_0$$

seront exactes pour $q \geq 3$

- Mais pour $q = 3$, $a_3 = 0$ par quadrature, *i.e.* que le *flux de chaleur par conduction* est nul
- Pour $q = 3$, la fonction d'équilibre discrète admissible sera développée à l'ordre $N^{eq} = q - 1 = 2$

$$f_i^{eq} = \omega_i \rho \left(1 + \frac{u v_i}{\theta_0} + \frac{(u v_i)^2}{2 \theta_0^2} + \frac{(\theta - \theta_0)}{2 \theta_0} \left(\frac{v_i^2}{\theta_0} - 1 \right) - \frac{u^2}{2 \theta_0} \right)$$

- Si l'on impose $\theta = \theta_0$, alors

$$f_i^{eq} = \omega_i \rho \left(1 + \frac{u v_i}{\theta_0} + \frac{(u v_i)^2}{2 \theta_0^2} - \frac{u^2}{2 \theta_0} \right)$$

Elle correspond exactement à la fonction de distribution d'équilibre des LBM pour une quadrature à 3 points par direction (*i.e.* D1Q3, D2Q9 et D3Q27)

- Le premier schéma à supporter intrinsèquement la thermique sera celui basé sur une quadrature à 4 points par direction

n	Racines de $\mathcal{H}_n^{[c_0^2]}$
0	\emptyset
1	0
2	$-c_0, c_0$
3	$-c_0\sqrt{3}, 0, c_0\sqrt{3}$
4	$-c_0\sqrt{\sqrt{6}+3}, -c_0\sqrt{3-\sqrt{6}}, c_0\sqrt{3-\sqrt{6}}, c_0\sqrt{\sqrt{6}+3}$
5	$-c_0\sqrt{\sqrt{10}+5}, -c_0\sqrt{5-\sqrt{10}}, 0, c_0\sqrt{5-\sqrt{10}}, c_0\sqrt{\sqrt{10}+5}$

N	Poids ω_i
0	\emptyset
1	1
2	1/2, 1/2
3	1/6, 2/3, 1/6
4	$\frac{1}{4(\sqrt{6}+3)}, \frac{1}{4(3-\sqrt{6})}, \frac{1}{4(3-\sqrt{6})}, \frac{1}{4(\sqrt{6}+3)}$
5	$\frac{3}{10(\sqrt{10}+2)^2}, \frac{3}{10(\sqrt{10}-2)^2}, 8/15, \frac{3}{10(\sqrt{10}-2)^2}, \frac{3}{10(\sqrt{10}+2)^2}$

- Quadrature 1D pour $q=3$:
- | | | | |
|---------|----------------|-----|---------------|
| Racines | $-c_0\sqrt{3}$ | 0 | $c_0\sqrt{3}$ |
| Poids | 1/6 | 2/3 | 1/6 |
- Pour $dx = dt = 1$, la condition CFL impose $c_0\sqrt{3} \leq 1 \Rightarrow c_0 =: 1/\sqrt{3}$
 - La température de référence sera $\theta_0 = c_0^2 = 1/3$
 - Quadrature 2D à $q^D = 3^2 = 9$ vitesses \mathbf{v}_i et poids ω_i

\mathbf{v}_i	-1	0	1
1	(-1,1)	(0,1)	(1,1)
0	(-1,0)	(0,0)	(1,0)
-1	(-1,-1)	(0,-1)	(1,-1)

ω_i	1/6	2/3	1/6
1/6	1/36	1/9	1/36
2/3	1/9	4/9	1/9
1/6	1/36	1/9	1/36

- Fonction d'équilibre compatible ($N^{eq} = q - 1 = 2$, $\theta_0 = 1/3$)

$$f_i^{eq} = \omega_i \rho \left(1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i}{\theta_0} + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i)^2}{2\theta_0^2} - \frac{(\theta - \theta_0)}{2\theta_0} \left(\frac{\mathbf{v}_i^2}{\theta_0} - 2 \right) \frac{\mathbf{u}^2}{2\theta_0} \right)$$

Avec

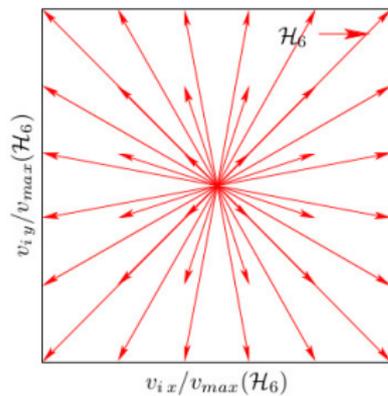
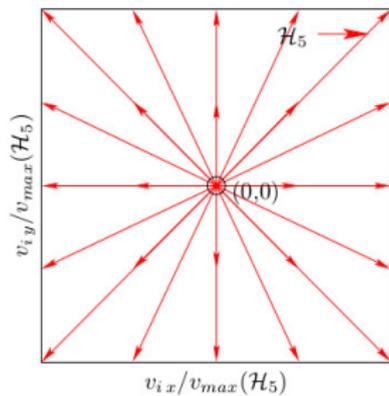
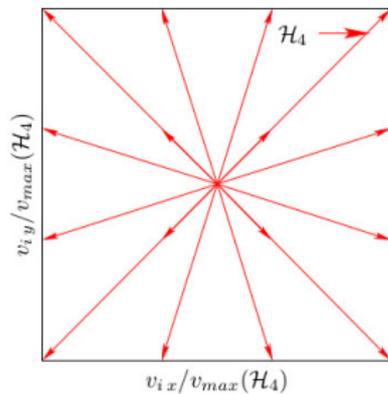
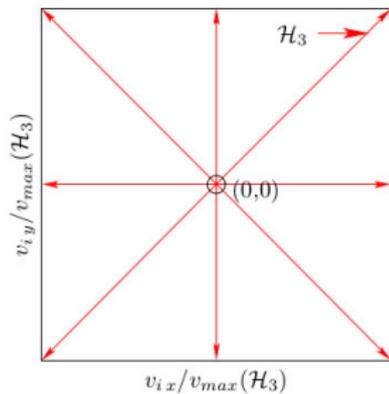
$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=0}^8 \mathbf{v}_i f_i \quad \text{et} \quad \theta = -\mathbf{u}^2 + \frac{1}{\rho} \sum_{i=0}^8 \mathbf{v}_i^2 f_i$$

- Remarque : si $\theta = \theta_0$, alors

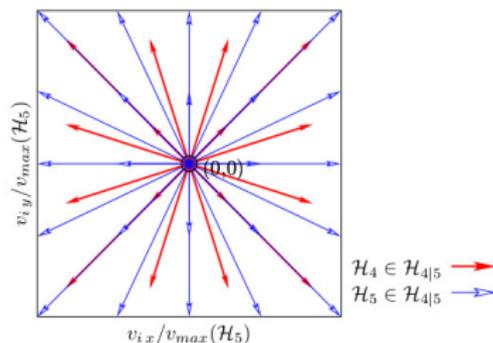
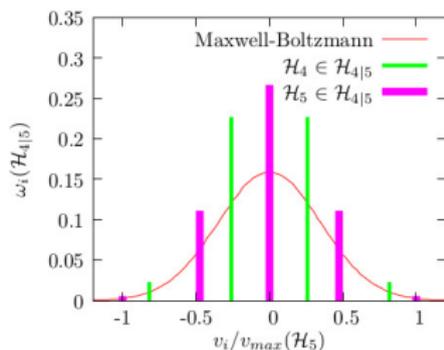
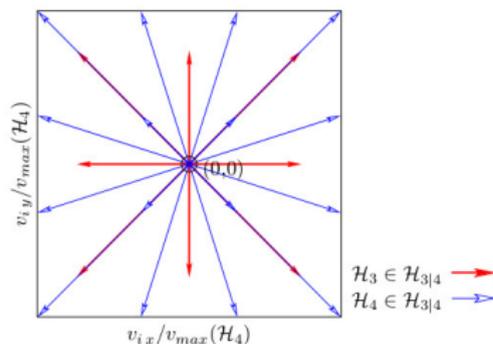
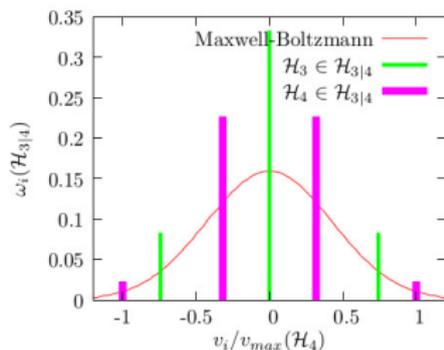
$$f_i^{eq} = \omega_i \rho \left(1 + 3 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i + \frac{9}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i)^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u}^2 \right)$$

Présentation de la méthode

Quadratures en 2D



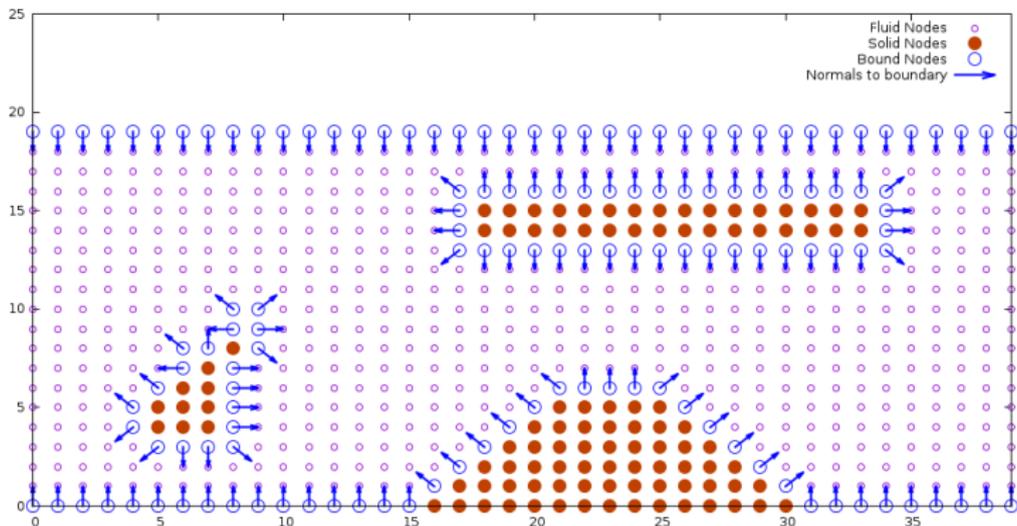
- On peut aussi superposer deux quadratures "pures" d'ordres successifs en prenant comme poids $\{\mu \omega_i^q, (\mu - 1) \omega_j^{q+1}\}$, avec $\mu \in [0, 1]$. Le choix naturel étant $\mu = 0.5$



- $K_n = 0$: gaz d'Euler, *i.e.* gaz parfait adiabatique
- $K_n \lesssim 10^{-2}$: gaz parfait de diffusivité thermique $\alpha = \theta\tau$
- $K_n \rightarrow \infty$: gaz de Knudsen, *i.e.* sans collision

Conditions aux bords cinétiques

Conditions aux bords de Maxwell avec accommodation totale

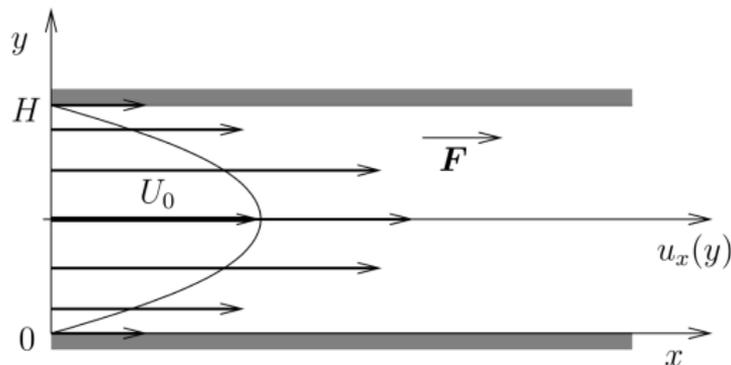


Pour une paroi de normale sortante \mathbf{n} , fixe et à la température θ_W

$$f_i = f_{iW}^{eq} \frac{\sum_{\mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{n} < 0} |\mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{n}| f_i}{\sum_{\mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{n} < 0} |\mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{n}| f_{iW}^{eq}}, \quad \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} > 0$$

avec :

$$f_{iW}^{eq} = \omega_i \left(1 + \frac{(\theta_W - \theta_0)}{2\theta_0} \left(\frac{\mathbf{v}_i^2}{\theta_0} - D \right) \right)$$

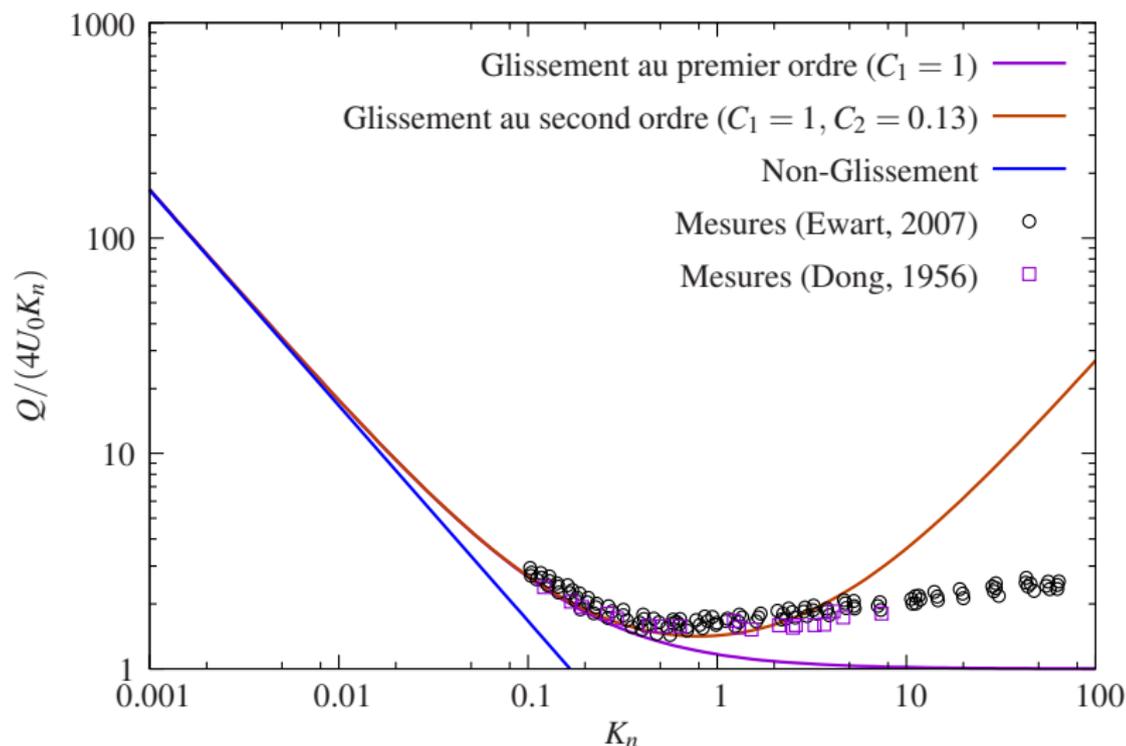


- U_0 : vitesse maximale du champ de vitesse en régime hydrodynamique
- **Ligne continue** : champ de vitesse en régime hydrodynamique
- **Flèches** : champ de vitesse avec glissement

$$\text{Champ de vitesse : } u_x(y) = \underbrace{4 U_0 \left(\frac{y}{H} - \frac{y^2}{H^2} \right)}_{\text{Composante hydrodynamique}} + \underbrace{4 U_0 (C_1 K_n + 2 C_2 K_n^2)}_{\text{Glissement}}$$

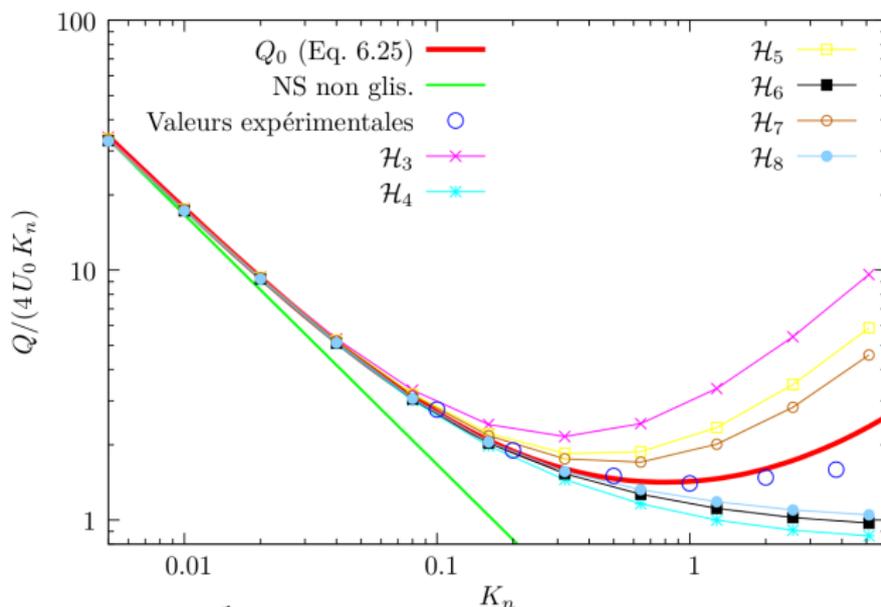
$$\text{Débit : } Q = 4 U_0 \left(\frac{1}{6} + C_1 K_n + 2 C_2 K_n^2 \right)$$

- Le débit normalisé $Q/(4 U_0 K_n)$, fonction de K_n , est indépendant de l'espèce gazeuse en écoulement.



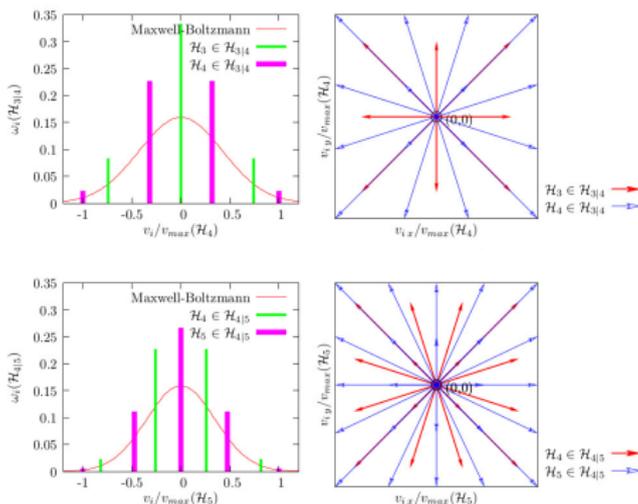
■ Convergence alternée

- Schémas d'ordres impairs \Rightarrow Surestimation du débit
- Schémas d'ordres pairs \Rightarrow Sous-estimation du débit



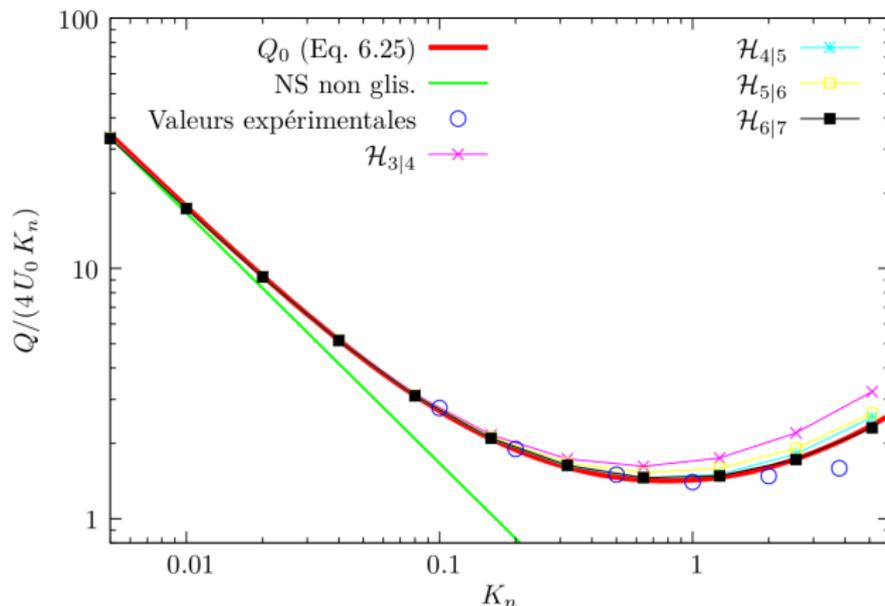
$$- Q_0 = \frac{1}{6Kn} + C_1 + 2C_2Kn \text{ avec } C_1 = 1, C_2 = 0.13$$

- Convergence alternée
 - Schémas d'ordres **impairs** \Rightarrow Surestimation du débit
 - Schémas d'ordres **pairs** \Rightarrow Sous-estimation du débit
- Idée : **Compenser la surestimation** des schémas d'ordres **impairs** par la **sous-estimation** des schémas d'ordres **pairs** en **combinant** des schémas d'ordres successifs
 - Introduction de **schémas composites**



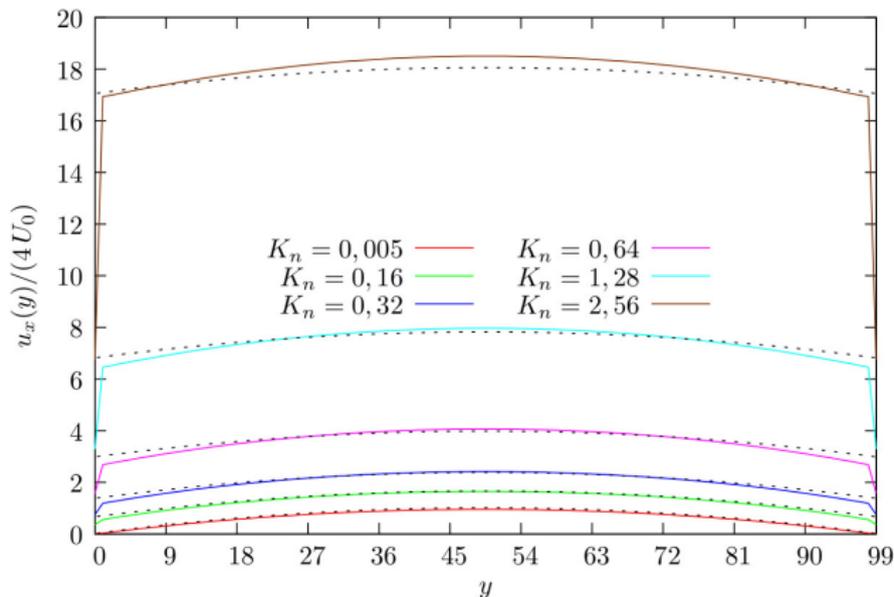
■ Schémas "composites"

- $\mathcal{H}_{3|4}$ surestime encore le débit
- Convergence vers les valeurs expérimentales pour $\mathcal{H}_{4|5}$, $\mathcal{H}_{5|6}$, ... pour $K_n \lesssim 2$



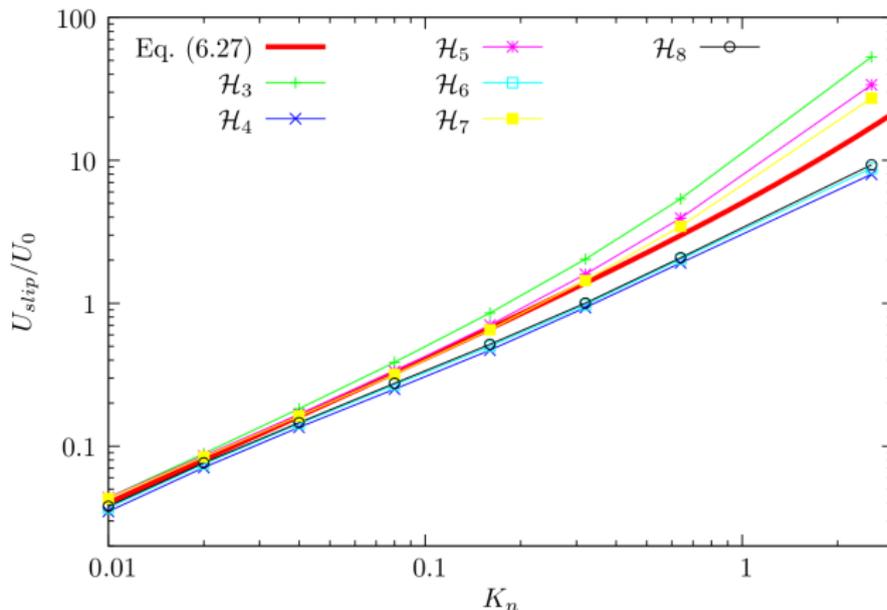
$$- Q_0 = \frac{1}{6 K_n} + C_1 + 2 C_2 K_n \text{ avec } C_1 = 1, C_2 = 0.13$$

$$\text{--- } u_x(y)/(4 U_0) = \underbrace{\left(\frac{y}{H} - \frac{y^2}{H^2} \right)}_{\text{Composante hydrodynamique}} + \underbrace{(C_1 K_n + 2 C_2 K_n^2)}_{\text{Glissement}}$$



Profils obtenus par $\mathcal{H}_{4|5}$

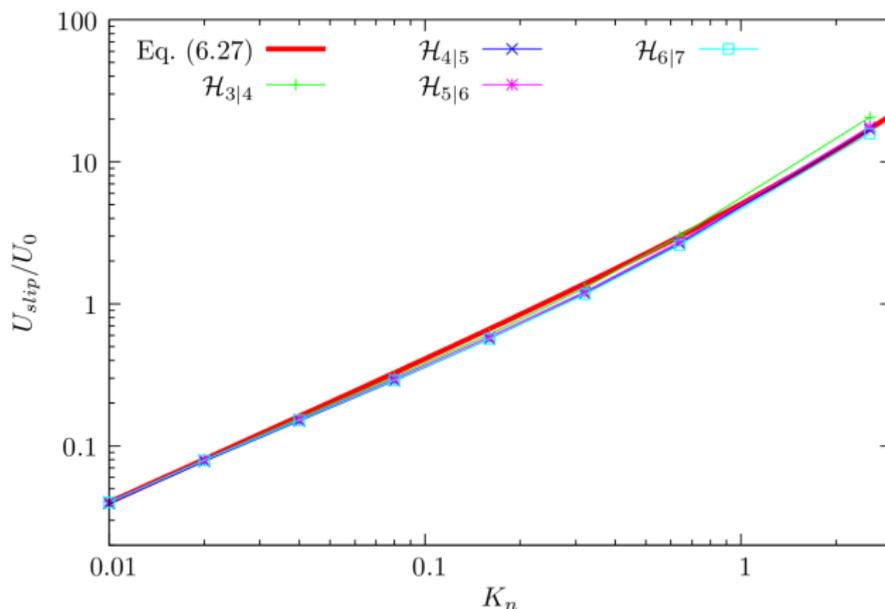
- Schémas "purs" \Rightarrow Convergence alternée
 - Schémas d'ordres **impairs** \Rightarrow Surestimation du glissement
 - Schémas d'ordres **pairs** \Rightarrow Sous-estimation du glissement



— $\frac{U_{slip}}{U_0} = 4 (C_1 K_n + 2 C_2 K_n^2)$ avec $C_1 = 1, C_2 = 0.13$

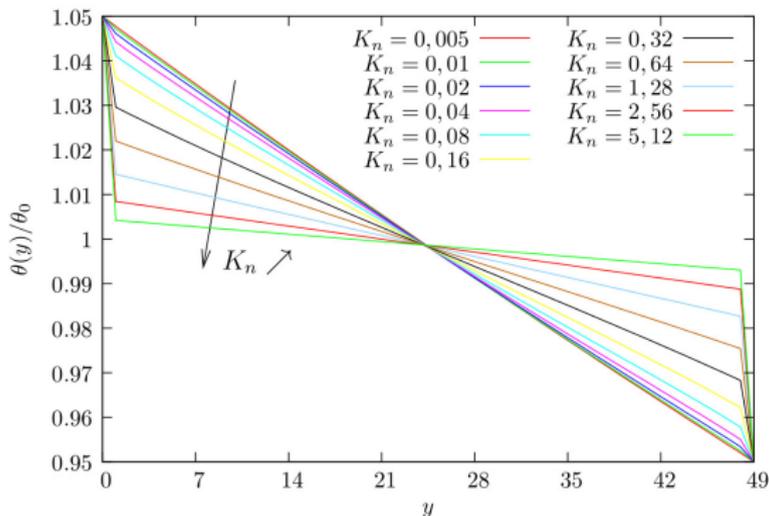
- Schémas "composites"

- Convergence vers les valeurs théoriques de tous les schémas



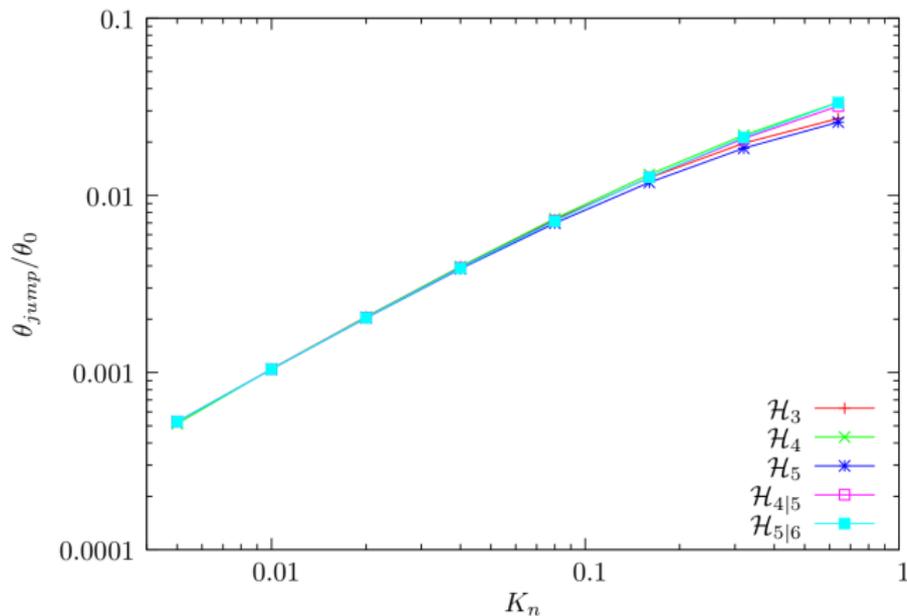
— $\frac{U_{slip}}{U_0} = 4 (C_1 K_n + 2 C_2 K_n^2)$ avec $C_1 = 1$, $C_2 = 0.13$

- Champs de température entre deux parois maintenues aux températures $\hat{\theta}_W \pm = 1 \pm 0.05$



- Validation : $[\hat{\theta}(y_W) - \hat{\theta}_W] = \frac{4}{3} K_n \left. \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{y}} \right|_{\hat{y}_W} ?$

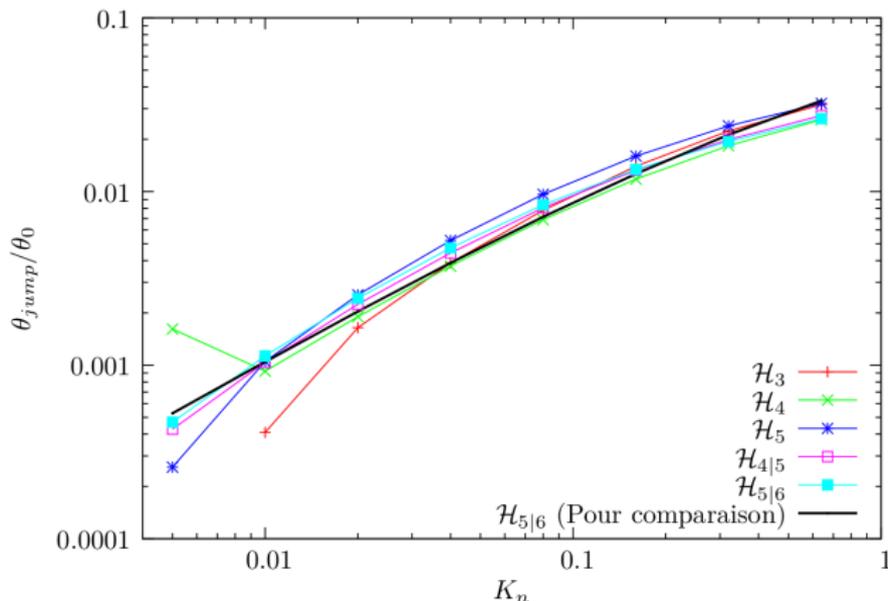
- Mesures de $[\hat{\theta}(\hat{y}_W) - \hat{\theta}_W]$ pour différentes valeurs de K_n



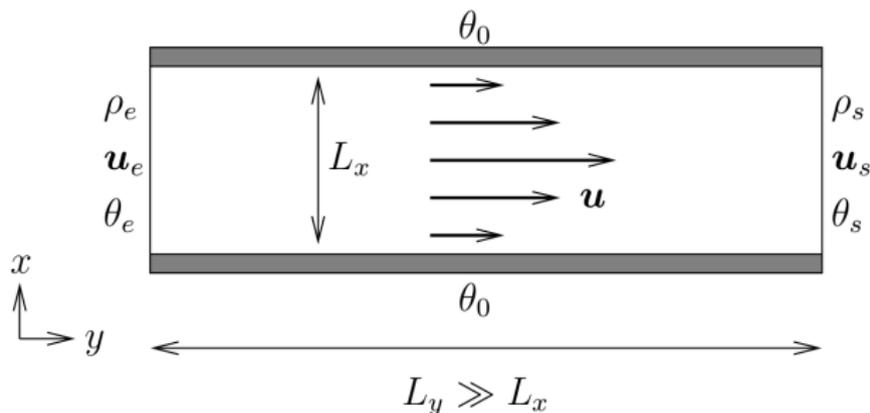
Résultats et validation de la méthode

Validation de la thermique – Saut de température à la paroi

- Mesures de $\frac{4}{3} K_n \left. \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{y}} \right|_{\hat{y}_W}$ pour différentes valeurs de K_n
- **Ligne noire** : Mesures de $[\hat{\theta}(y_W) - \hat{\theta}_W]$ obtenues grâce au schéma $\mathcal{H}_{5|6}$



- $\hat{\theta}(y_W) - \hat{\theta}_W = \frac{4}{3} K_n \left. \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{y}} \right|_{\hat{y}_W}$ est bien respectée par les différents schémas



■ Entrée

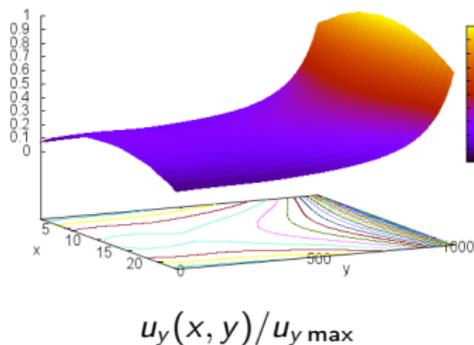
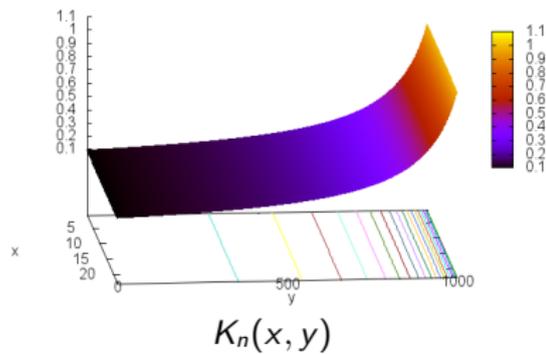
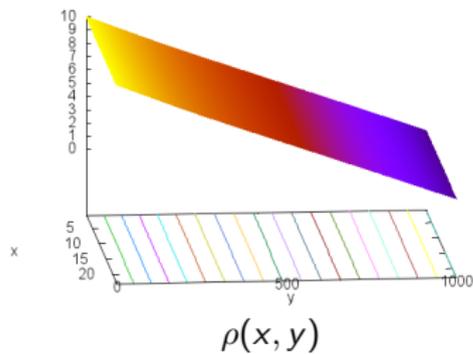
- $\rho_e > \rho_s$ constante
- \mathbf{u}_e extrapolée depuis le fluide (champ libre)
- $\theta_e = \theta_0$ constante
- $K_{ne} = K_{ns}/\rho_e < K_{ns}$

■ Sortie

- ρ_s constante
- \mathbf{u}_s extrapolée depuis le fluide (champ libre)
- $\theta_s = \theta_0$ constante
- K_{ns} fixé

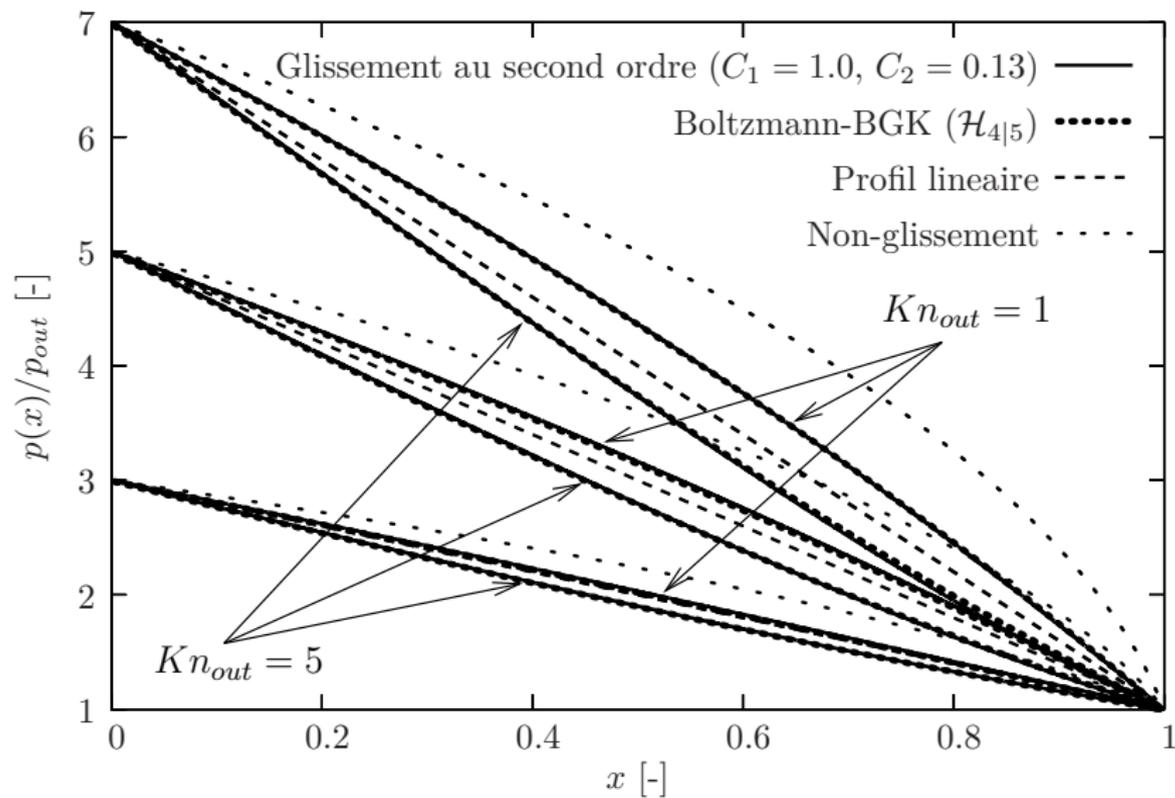
Résultats et validation de la méthode

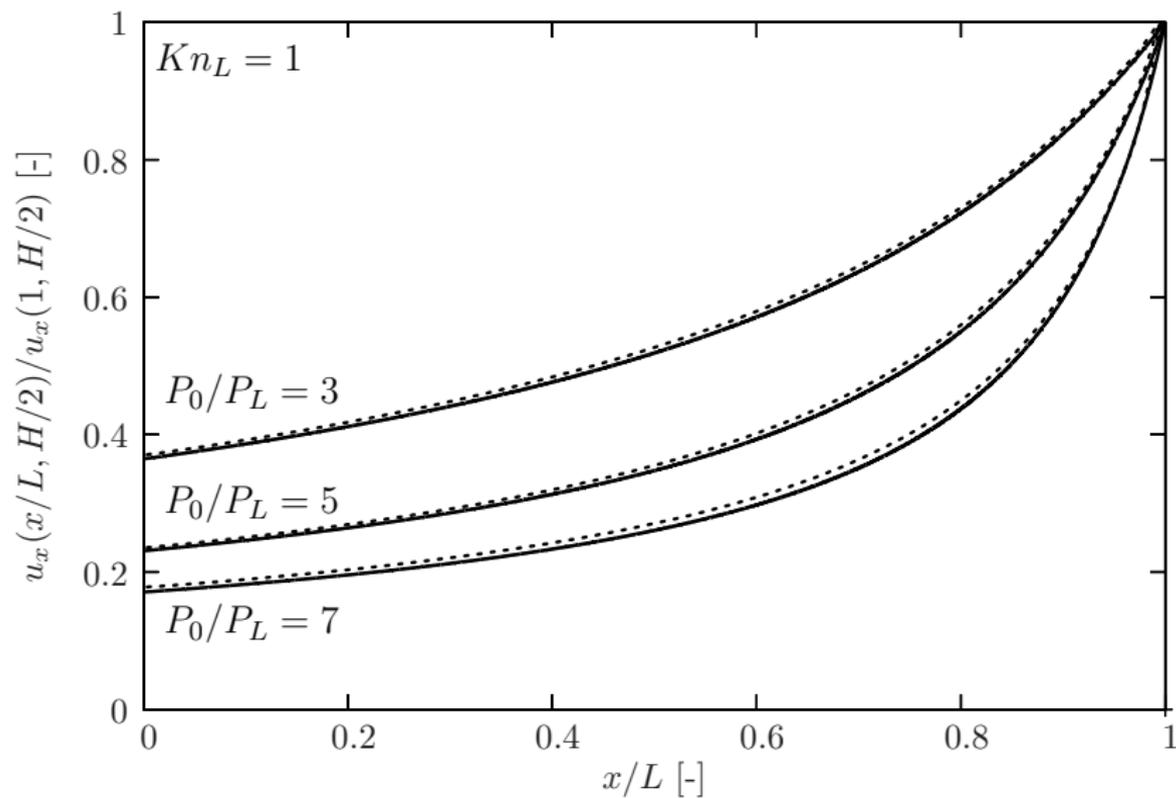
Long canal – Gradient de pression ($K_{ns} = 1, \rho_s = 1, \rho_e = 10, K_{ne} = 0.1$)



Résultats et validation de la méthode

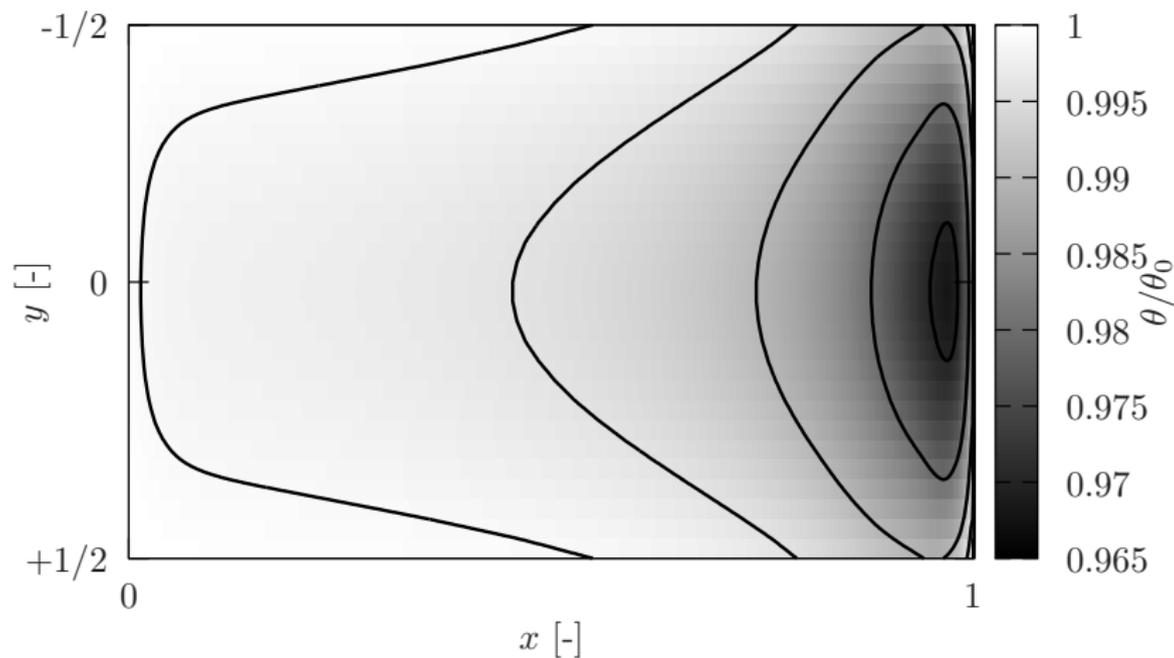
Long canal – Champs de pressions





Résultats et validation de la méthode

Long canal – Champ de température ($P_0/P_L = 7$)



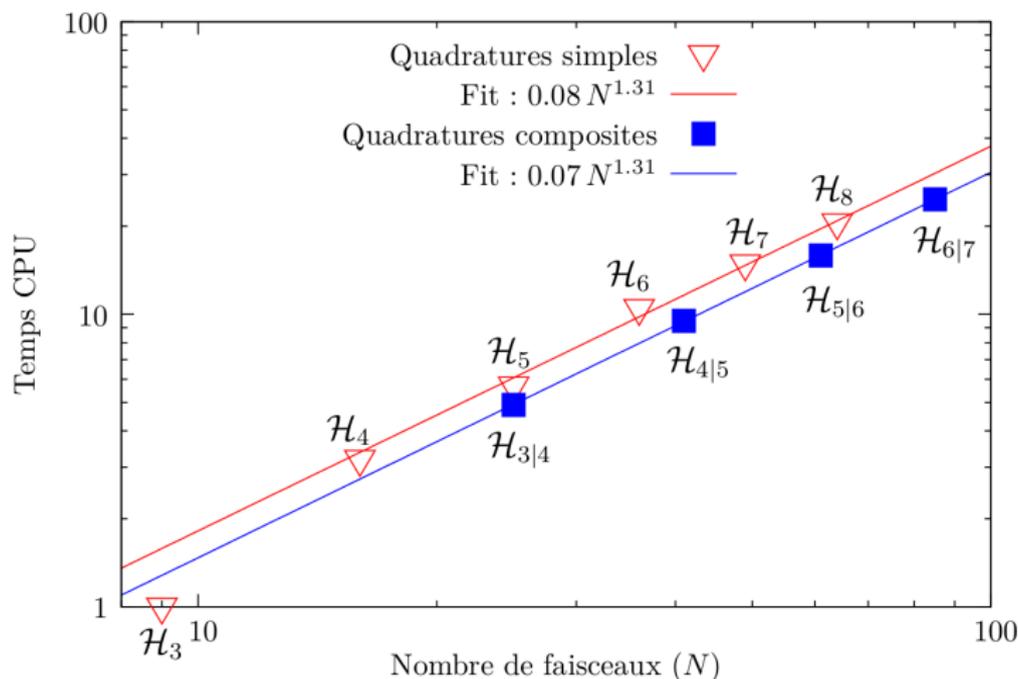


Figure – Temps de calcul en fonction du nombre de faisceaux (échelles Log-Log) pour les schémas basés sur les quadratures pures \mathcal{H}_n et composites $\mathcal{H}_{n|n+1}$. Ces temps de calculs ont été normalisés par le temps de calcul du schéma basé sur \mathcal{H}_3 (i.e. D_2Q_9).

- Deux familles de schémas ont été évalués
 - Les schémas simples (\mathcal{H}_n) convergent de façon alternée quand $n \nearrow$
 - Les schémas composites ($\mathcal{H}_{n|n+1}$) accélèrent nettement la convergence
- Le schéma le plus simple prenant en compte la thermique et les effets de raréfaction est $\mathcal{H}_{4|5}$
 - Le glissement et le saut de température à la paroi sont capturés correctement
 - L'effort numérique pour ce schéma est environ 10x plus élevé que pour le D_2Q_9 standard (limité à l'hydrodynamique)

Merci de votre attention