

Aéroacoustique en maillage non-uniforme avec la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM)

Félix Gendre

Thèse CIFRE (12/2014 → 12/2017)

Responsable Renault : Dr Guillaume Fritz

Directeur de Thèse : Pr Pierre Sagaut

SOMMAIRE

01 **Contexte de l'étude dans l'entreprise**
Le logiciel LaBS/ProLB

02 **Collision LBM et aéroacoustique**
Effets de la relaxation des moments d'ordre 2

03 **Raffinements de maillages en LBM**
Problématique et solutions envisagées

04 **Publication**
Physical Review E :

01

Contexte de l'étude dans l'entreprise

Outil Renault : le logiciel LaBS

Le logiciel LaBS

- **Contexte : la simulation numérique du bruit aérodynamique**
 - A haute vitesse dans un habitacle automobile : **bruit aéro = source principale**
 - Essais en soufflerie extrêmement coûteux
 - Nécessité de prédire en amont le bruit aéro → **simulation numérique**
- **Outil utilisé en interne : le logiciel LaBS/ProLB**
 - Consortium académique/industriel (Renault/CS/Airbus/Centrale Lyon/ONERA)
 - Utilisé également pour Scx, thermique sous capot...
 - Vocation : remplacer le très coûteux logiciel PowerFlow chez Renault
 - **Nouveau nom : ProLB**



Le logiciel LaBS

- Difficultés liées à la physique de l'aéroacoustique

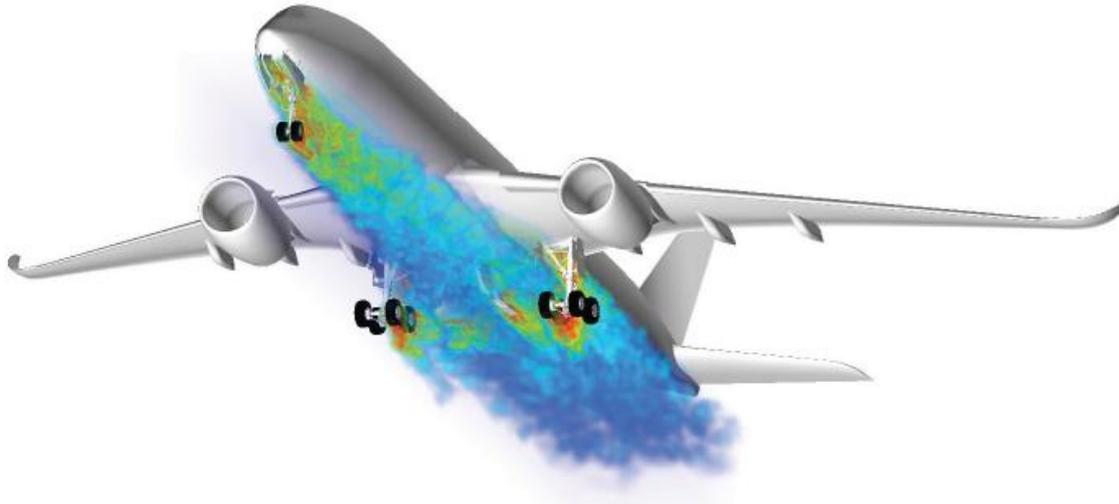
- L'acoustique provient de fluctuations de **pression**
- Dans un écoulement turbulent, **deux types de fluctuations de pression** mélangées
 - Fluctuations **tourbillonnaires** (ou « aérodynamiques »)
 - Fluctuations **acoustiques**

	Acoustique	Tourbillonnaire
Vitesse de propagation	$c_0 = 340 \text{ m/s}$	$V \simeq U_\infty \ll c_0$
Longueur d'onde λ (à fréquence f fixée)	$\lambda_{ac} = \frac{c_0}{f}$	$\lambda_{turb} = \frac{V}{f} \ll \lambda_{ac}$
Amplitude δp	$\delta p_{ac} = 1Pa \rightarrow 91dB \text{ SPL} !$	$[1; 10^4] Pa \gg \delta p_{ac}$

➔ Une erreur faible sur le champ de pression totale peut provoquer une immense erreur sur le champ acoustique sous-jacent

Le logiciel LaBS

- Sources aéroacoustiques « physiques » :
interactions turbulence/paroi, turbulence/turbulence ...



Le logiciel LaBS

- Schéma de principe : excitation turbulente/acoustique sur un vitrage

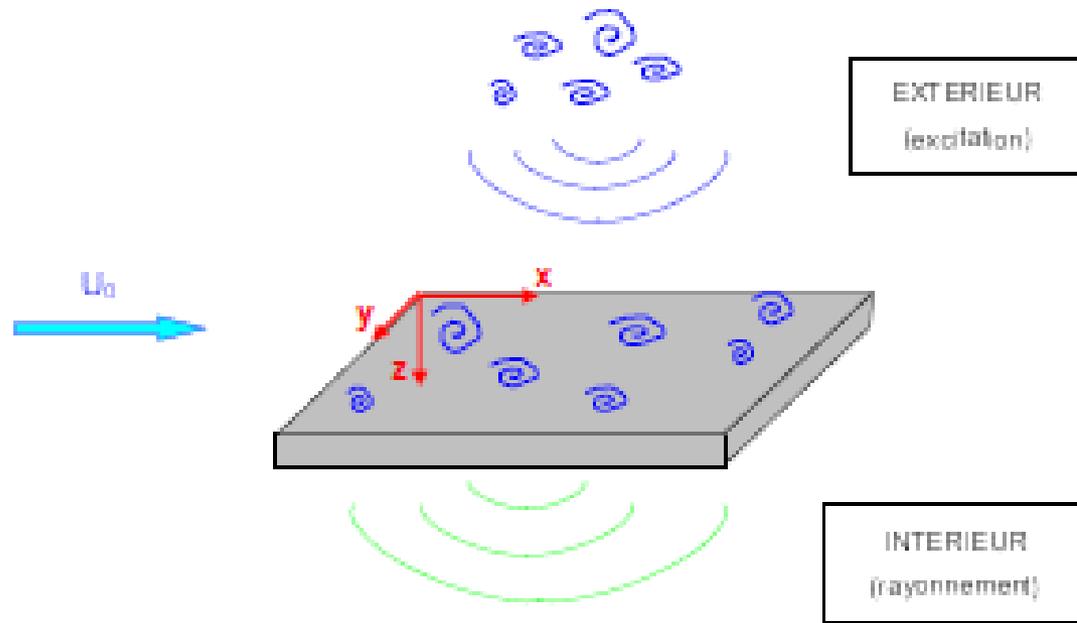
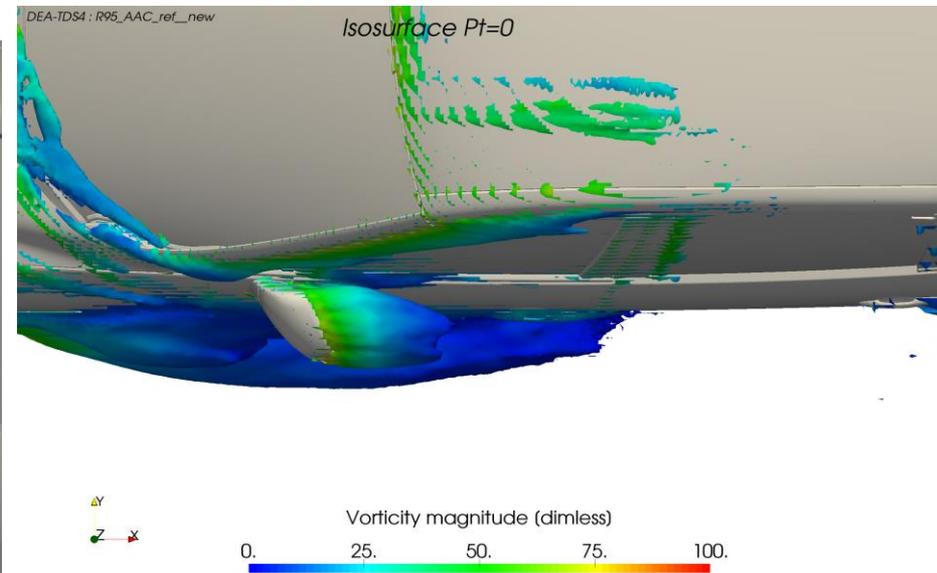
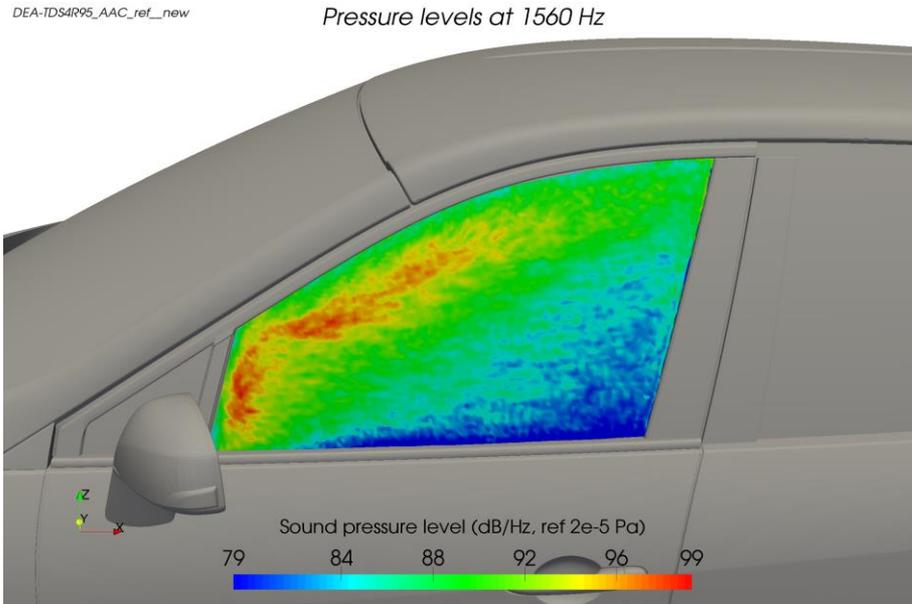


FIG. 1.1 – Schéma du repère utilisé pour décrire le couplage fluide-structure.

Contexte de l'étude dans l'entreprise

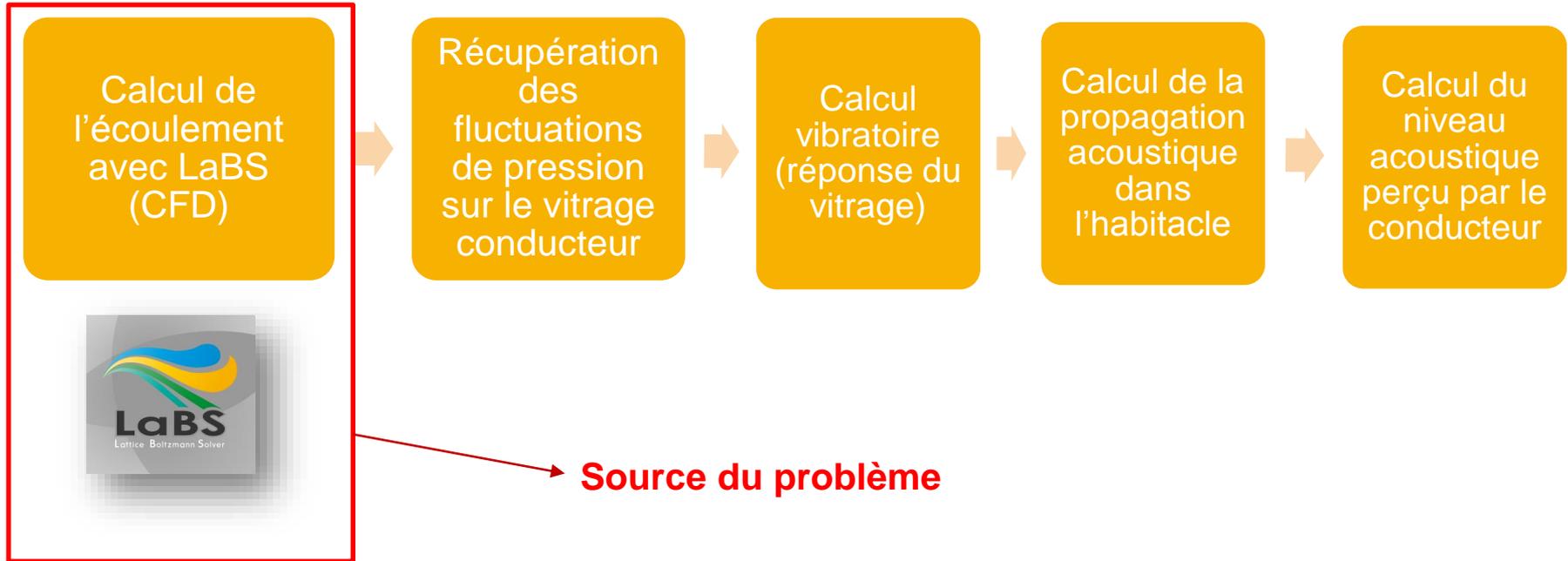
Le logiciel LaBS

- Fluctuations de pression totale, vorticité



Le logiciel LaBS

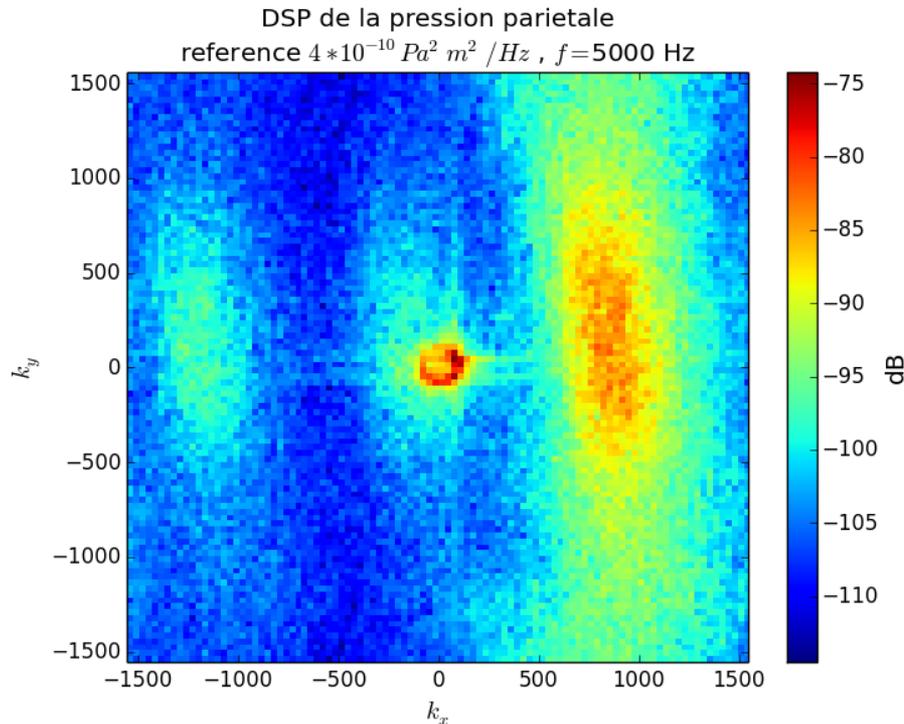
▪ Chaîne de calcul du bruit aéroacoustique



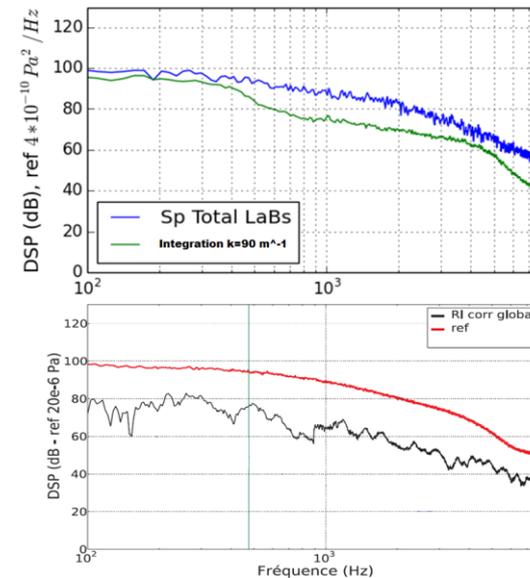
▪ Problème concret rencontré par Renault en calcul aéroacoustique

Surestimation du bruit intérieur d'origine aérodynamique

- **Problème identifié comme venant de la simulation LaBS (amont)**
- **Mise en évidence quantitative lors du stage pré-thèse**
 - Ecriture et mise en place d'un algorithme de post-traitement fréquence-nombre d'onde pour calculer des spectres aéroacoustiques sur le vitrage conducteur



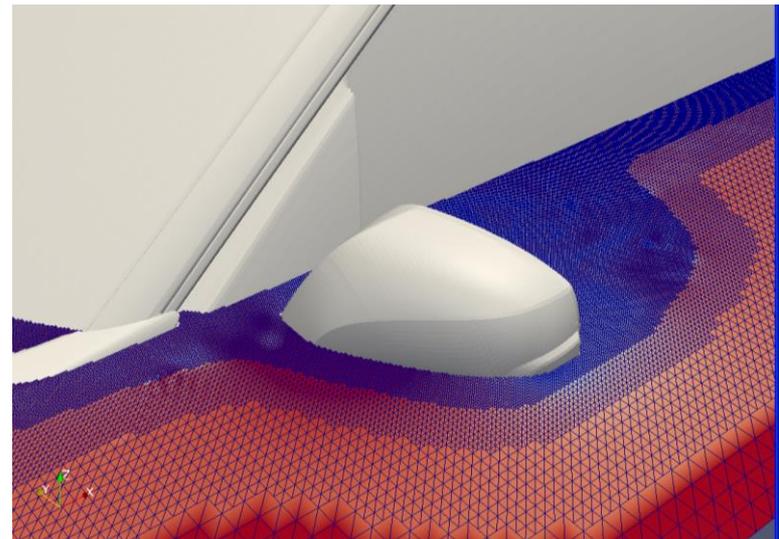
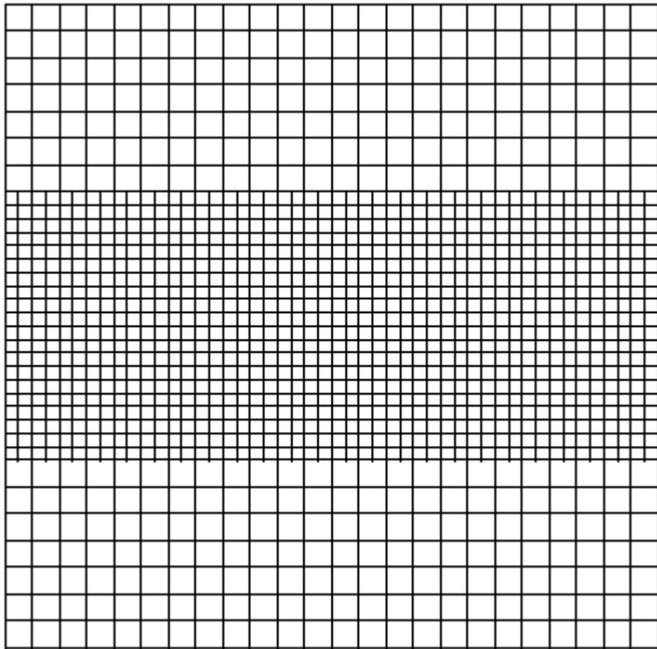
Comparaison Calcul-mesure (B91)



Le logiciel LaBS

- **Identification plus en détail**

- Sources de bruit non physique majeures au niveau des **raffinements de maillage**
- Survient lors du passage de tourbillons à travers les interfaces de raffinement



Problématiques qui en découlent

- Identifier les mécanismes numériques responsables de la surestimation du bruit aérodynamique
- Mettre en évidence rigoureusement le phénomène sur des configurations « académiques »
- Corriger les schémas numériques « existants » ou en créer de nouveaux pour réduire l'ampleur des problèmes observés.
- Tester les modèles sur des configurations industrielles complexes

02

La méthode de Boltzman sur réseau pour l'aéroacoustique

Fondements théoriques des algorithmes de LaBS

Equation de Boltzmann

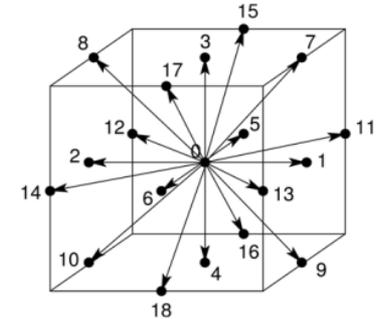
$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \cdot \nabla f = \frac{-1}{\epsilon \tau} (f(x, c, t) - f^{eq}(x, c, t))$$

Continu

Equation de Boltzmann à vitesses discrètes

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + c_\alpha \cdot \nabla f_\alpha = \frac{-1}{\epsilon \tau} (f_\alpha - f_\alpha^{eq})$$

Semi-continu : D3Q19 ici



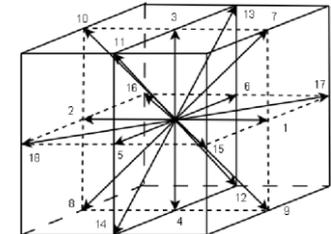
Equation de Boltzmann sur réseau

$$\bar{\tau}_g = \frac{\tau}{\Delta t} + \frac{1}{2}$$

$$g_\alpha(x + c_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - g_\alpha(x, t) = \frac{-1}{\bar{\tau}_g} (g_\alpha(x, t) - g_\alpha^{eq}(x, t))$$

$$g_\alpha = f_\alpha + \frac{\Delta t}{2\tau} (f_\alpha - f_\alpha^{eq}) \quad g_\alpha^{eq} = f_\alpha^{eq}$$

Discret espace/temps D3Q19



Quelques critères fondamentaux pour l'aéroacoustique en LBM

- Vitesse du son constante $\rightarrow c_0 = \frac{\Delta t}{\sqrt{3}\Delta x}$ fixé \rightarrow scaling dit « acoustique »
- Pas d'ajout excessif de **viscosité de volume** ξ par le processus de relaxation

En pratique, le second est quasiment toujours violé dans les études LBM.

Visco de volume **augmentée artificiellement** pour gagner en stabilité **dans la majorité des modèles de type MRT** (dont D'Humières, Lallemand & Luo etc...) ainsi que dans **Cascaded** et **Cumulant** et dans **plusieurs variantes de modèles entropiques**.

Visco de volume dans BGK, TRT et certains modèles MRT particuliers : $\xi = \frac{2}{3}\mu$

Critère pour obtenir une collision à viscosité de volume « faible » (si μ faible)

\rightarrow Tous les temps de relaxations des moments liés au tenseur des contraintes (**moments d'ordre 2**) doivent être égaux à τ_g , le temps BGK standard.

Difficile d'assurer la stabilité avec ξ faible.

MRT de D'Humières (Grahm Schmidt avec produit scalaire non pondéré)

$$\begin{aligned}(\varphi_1)_\alpha &= 19(c_{\alpha x}^2 + c_{\alpha y}^2 + c_{\alpha z}^2) - 30 & \longrightarrow & \frac{1}{s_1} = \frac{9\xi}{5 - 9c_s^2} + \frac{1}{2} & \longrightarrow & s_1 = 1.19 \\(\varphi_9)_\alpha &= 2c_{\alpha x}^2 - c_{\alpha y}^2 - c_{\alpha z}^2 & \longrightarrow & \frac{1}{s_9} = \overline{\tau_g} = \frac{\nu}{c_s^2} + \frac{1}{2} & \longrightarrow & \xi \text{ très élevé !!} \\(\varphi_{11})_\alpha &= c_{\alpha y}^2 - c_{\alpha z}^2 & \longrightarrow & \frac{1}{s_9} = \overline{\tau_g} \\(\varphi_{13})_\alpha &= c_{\alpha x}c_{\alpha y} & \longrightarrow & \frac{1}{s_9} = \overline{\tau_g} \\(\varphi_{14})_\alpha &= c_{\alpha y}c_{\alpha z} & \longrightarrow & \frac{1}{s_9} = \overline{\tau_g} \\(\varphi_{15})_\alpha &= c_{\alpha x}c_{\alpha z} & \longrightarrow & \frac{1}{s_9} = \overline{\tau_g}\end{aligned}$$
$$c_s^2 = \frac{1}{3}$$

Inutilisable pour la propagation acoustique, rien qu'à l'ordre dominant

Choisir $s_1 = s_9$ fournit un modèle extrêmement instable (MRT^{mod}).

La méthode de Boltzman sur réseau pour l'aéroacoustique

Fondements théoriques des algorithmes de LaBS

MRT en configuration TRT

$$\begin{aligned}(\varphi_1)_\alpha &= 19(c_{\alpha x}^2 + c_{\alpha y}^2 + c_{\alpha z}^2) - 30 & \longrightarrow & \bar{\tau}_g = \frac{\nu}{c_s^2} + \frac{1}{2} & \longrightarrow & \xi = \xi_{BGK} \\(\varphi_9)_\alpha &= 2c_{\alpha x}^2 - c_{\alpha y}^2 - c_{\alpha z}^2 & \longrightarrow & \bar{\tau}_g \\(\varphi_{11})_\alpha &= c_{\alpha y}^2 - c_{\alpha z}^2 & \longrightarrow & \bar{\tau}_g \\(\varphi_{13})_\alpha &= c_{\alpha x}c_{\alpha y} & \longrightarrow & \bar{\tau}_g \\(\varphi_{14})_\alpha &= c_{\alpha y}c_{\alpha z} & \longrightarrow & \bar{\tau}_g \\(\varphi_{15})_\alpha &= c_{\alpha x}c_{\alpha z} & \longrightarrow & \bar{\tau}_g\end{aligned}$$

OK pour la propagation des ondes acoustiques à l'ordre dominant.

Exemple de modèle « de type MRT » avec viscosité de volume = à celle de BGK

→ **Vecteurs de base générant les moments d'ordre 2 : polynômes de Hermite**
cf la majorité des papiers de Dellar 2D, Adhikari et Succi 2D et 3D (*Duality in matrix lattice Boltzmann models, 2008, PRE*)

$$\begin{aligned}(\varphi_{xx})_\alpha &= \frac{1}{c_s^2}(c_{\alpha x}^2 - c_s^2) & \longrightarrow \bar{\tau}_g &= \frac{\nu}{c_s^2} + \frac{1}{2} \\(\varphi_{yy})_\alpha &= \frac{1}{c_s^2}(c_{\alpha y}^2 - c_s^2) & \longrightarrow \bar{\tau}_g \\(\varphi_{zz})_\alpha &= \frac{1}{c_s^2}(c_{\alpha z}^2 - c_s^2) & \longrightarrow \bar{\tau}_g \\(\varphi_{xy})_\alpha &= c_{\alpha x}c_{\alpha y} & \longrightarrow \bar{\tau}_g \\(\varphi_{yz})_\alpha &= c_{\alpha y}c_{\alpha z} & \longrightarrow \bar{\tau}_g \\(\varphi_{xz})_\alpha &= c_{\alpha x}c_{\alpha z} & \longrightarrow \bar{\tau}_g\end{aligned}$$

OK pour la propagation des ondes acoustiques à l'ordre dominant.

Tous les autres paramètres de relaxation sont libres : on appellera ce modèle le **MRT^H**

MRT^H

$$\begin{pmatrix}
 \rho & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 j_x & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 j_y & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
 j_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
 \Pi_{xx} & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
 \Pi_{yy} & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
 \Pi_{zz} & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
 \Pi_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \Pi_{yz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
 \Pi_{xz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \rho' & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 j'_x & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 j'_y & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
 j'_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
 \rho'' & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 j''_x & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 j''_y & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
 j''_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
 \rho''' & 1 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
 \end{pmatrix}$$

Contrairement au MRT classique : orthogonalisation avec le produit scalaire pondéré par les poids de quadrature ω_α .

Nous choisissons $s_{\rho'} = s_{\rho''} = s_{\rho'''} = 1.2$ et $s_{j_{xyz}'} = s_{j_{xyz}''} = 1.6$

On a ainsi un modèle à trois temps de relaxation.

La méthode de Boltzman sur réseau pour l'aéroacoustique

Fondements théoriques des algorithmes de LaBS

MRT^H vs BGK

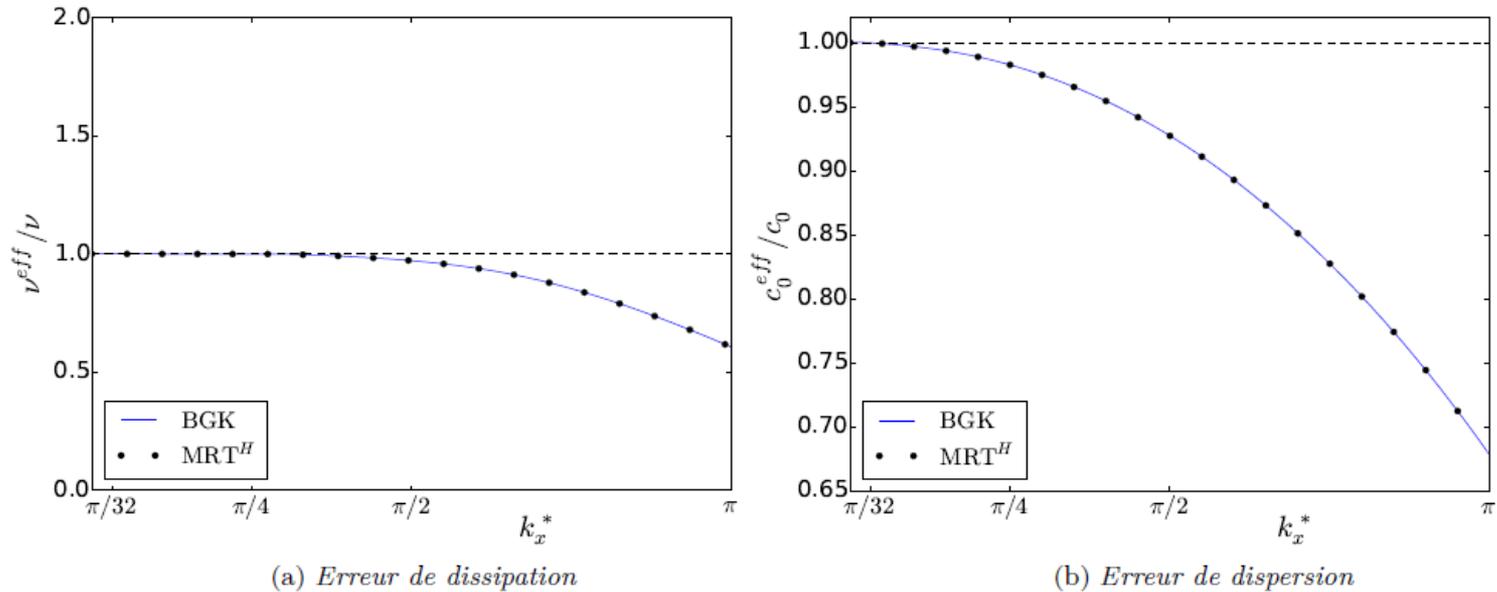


FIGURE 3.3 – Erreurs de dissipation (viscosité effective du calcul par rapport à la viscosité moléculaire) et de dispersion (vitesse du son effective du calcul par rapport à la vitesse du son standard) pour les modèles BGK et MRT^H, en fonction du nombre d'onde longitudinal $k_x^* = k_x \Delta x$.

La méthode de Boltzman sur réseau pour l'aéroacoustique

Fondements théoriques des algorithmes de LaBS

MRT^H vs BGK, TRT, MRT^{mod}, Régularisé (Latt)

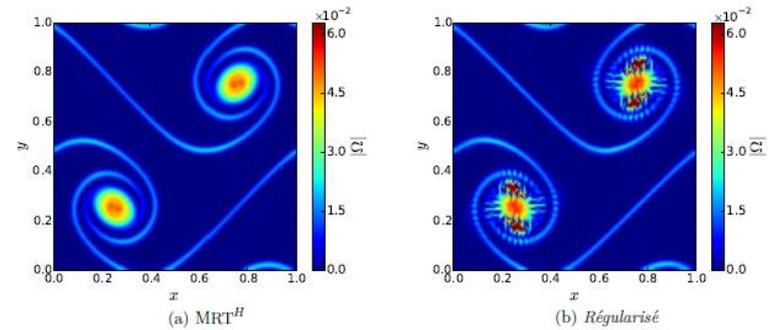
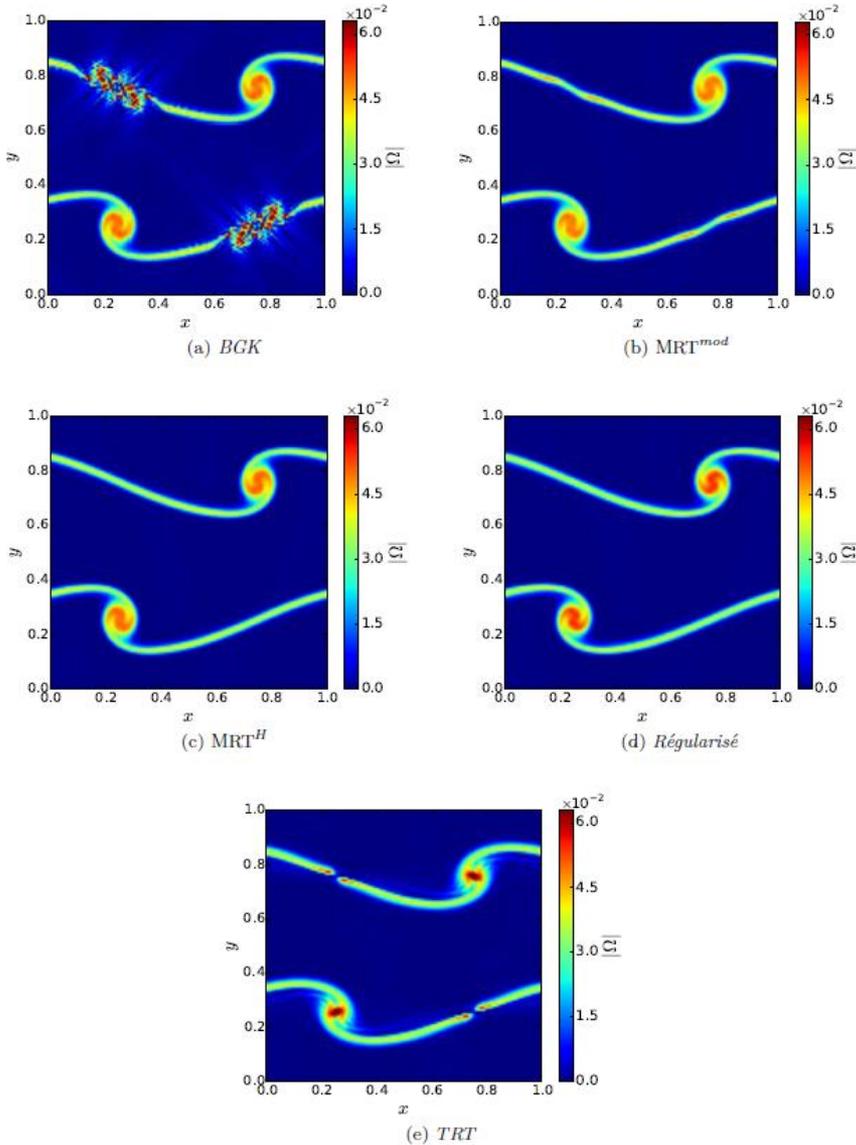


FIGURE 3.5 – Double couche de cisaillement périodique à $t^* = 1250$. Les modèles BGK, MRT^{mod} et TRT ont divergé à une itération antérieure. Le modèle régularisé est proche de la divergence. Le modèle MRT^H reste stable dans cette simulation.

Autres techniques possibles pour conserver une visco de volume faible à l'ordre dominant tout en améliorant la stabilité

→ **Filtrage sélectif de l'équation LBM.**

Différent types de filtrage possible (Ricot et al, *Selective viscosity filters*, JCP)

- Filtrage des fonctions de distribution (coûteux et dissipatif)
- Filtrage de la partie hors équilibre de la fonction de distribution (coûteux)
- Filtrage des variables macroscopiques

Demande généralement des stencils de filtres discrets assez étendus (3×5 ou 3×7 points) et très anisotropes

Autre possibilité, introduite dans notre travail

→ Filtrage des moments hors équilibre d'ordre 2 (6 moments), avec filtre compact et isotrope d'ordre 4.

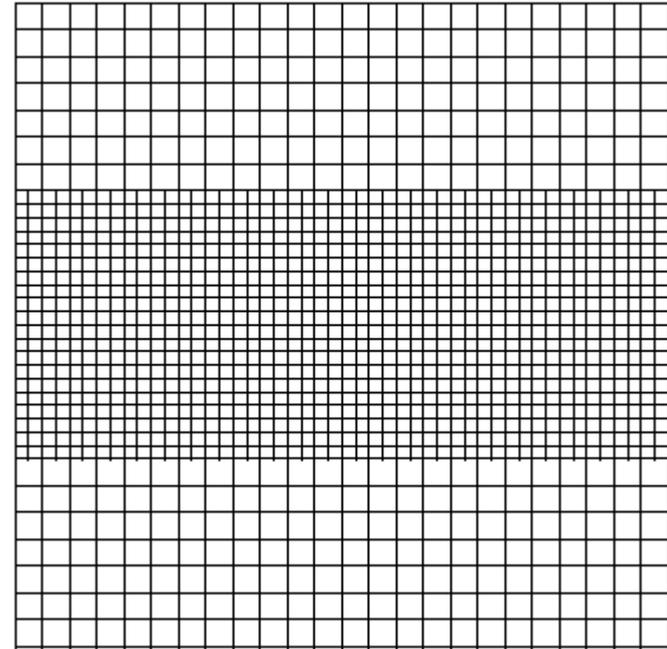
03

Raffinements de maillages en LBM Problématique et solutions envisagées

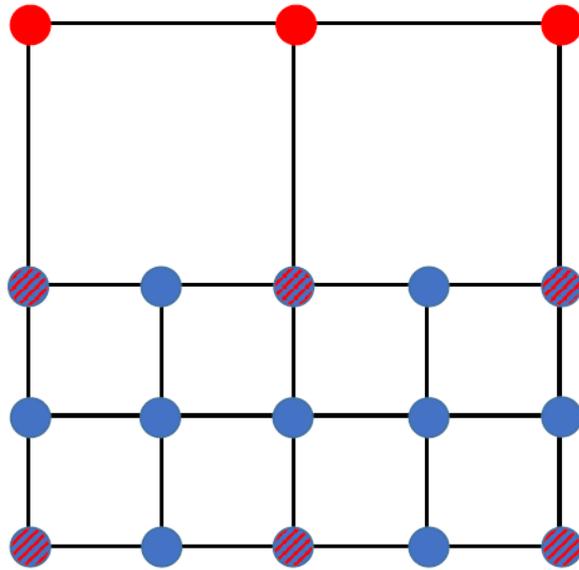
Problématique et solutions envisagées

▪ Problématique physique et numérique

- Passage fin → grossier : problème avec les $\lambda < 2\Delta x^f$ ($k\Delta x > \pi/2$)
- Données manquantes à l'interface : interpolations spatiales et temporelles
- Structure de donnée déterminante : cell-centered ou vertex-centered (cas de LaBS)
- Très sensible au nombre de Mach
Configs industrielles : proche des limites de stabilité de la méthode
- Modèles de collision pour l'aéroacoustique
→ stabilité numérique beaucoup plus difficile à conserver que pour l'aérodynamique (95% de la littérature en LBM !)
- **Aucune étude de revue internationale à comité de lecture n'existe** sur l'aéroacoustique en maillage non-uniforme avec turbulence et Mach non négligeable

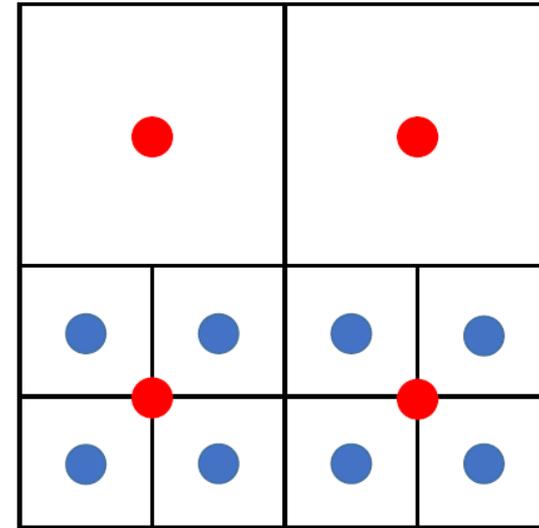


Problématique et solutions envisagées



(a) Cell-Vertex

LaBS/ProLB



(a) Cell-Centered

PowerFlow

- : Nœuds du maillage grossier (*Coarse*)
- : Nœuds du maillage fin (*fine*)
- ▨ : Nœuds fins et grossiers co-localisés

- **Structure Cell Centered vs Cell Vertex : algorithmes très différents**

Problématique et solutions envisagées

- **Tests préliminaires sur algorithmes simples Cell-Vertex (WaLBerla)**
→ problèmes bien plus importants aux transitions que dans LaBS
- **Approche Cell-Vertex toutefois probablement à privilégier (plus simple d'obtenir un algorithme conservatif + traitement de type VF possible à l'interface + algo de PowerFlow)**
- **Algorithme Cell-Vertex conservatif de Chen & al (Grid refinement in lattice Boltzmann methods based on volumetric formulation, Physica A, 2006) :**
possède une propagation sans collision à l'interface → $\tau = 1$ → viscosité immense !
- **CONTRAINTE POUR NOTRE ETUDE LABS/PROLB : CELL-VERTEX**

Problématique et solutions envisagées

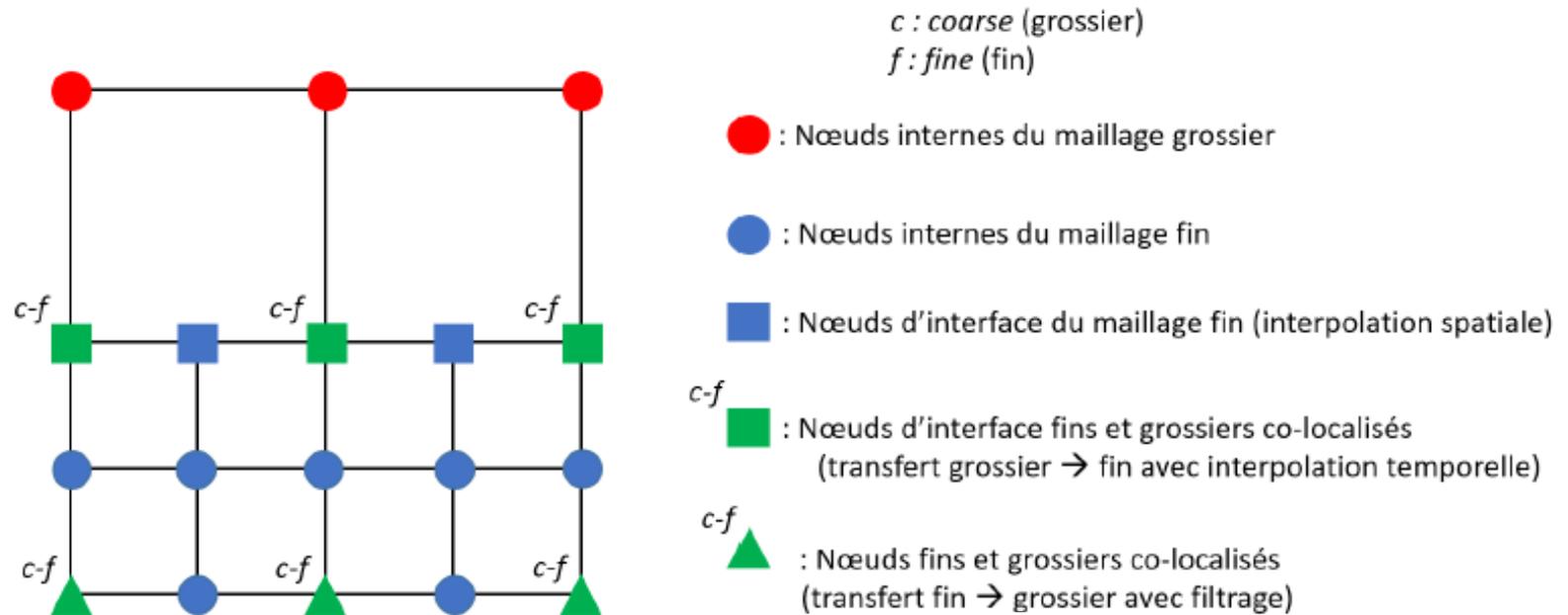


FIGURE 6.2 – Géométrie 2D d'un raffinement de maillage pour la structure cell-vertex et familles de nœuds utiles à la description de l'algorithme.

- Algorithme de base (type Lagrava *et al.* , Dupuis & Chopard etc...)

04

Publication (Physical Review E)

Grid Refinement for aeroacoustics in the Lattice Boltzmann Method : a directional splitting approach

Grid Refinement for aeroacoustics in the Lattice Boltzmann Method : A directional splitting approach

PHYSICAL REVIEW E **96**, 023311 (2017)

Grid refinement for aeroacoustics in the lattice Boltzmann method: A directional splitting approach

Félix Gendre,^{1,2,*} Denis Ricot,^{1,†} Guillaume Fritz,^{1,‡} and Pierre Sagaut^{2,§}

¹Renault, Technocentre, 1 av. du Golf, 78280 Guyancourt, France

²Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, M2P2 UMR 7340, 13451 Marseille, France

(Received 9 June 2017; published 29 August 2017)

Constat:

- Aucune étude existante s'intéressant à l'effet de la traversée par une source de vorticité d'une transition de résolution, qui plus est à un nombre de Mach non négligeable et à faible viscosité

Objectifs:

- Recenser les conditions nécessaires à l'utilisation de la LBM en maillage non uniforme pour l'aéroacoustique + synthèse bibliographique.
- Développer un algorithme alternatif et le comparer à un algorithme classique.
- Retrouver de bons résultats sur un cas simple (pulse acoustique)
- Etudier l'acoustique parasite rayonn e au raffinement de maillage lors de sa travers e par un tourbillon, en fonction du nombre de Mach convectif.

Grid Refinement for aeroacoustics in the Lattice Boltzmann Method : A directional splitting approach

Principe : on repart de la DVBE (BGK pour simplifier, la procédure est généralisable).
Supposons une interface localement plane (ou possédant un plan tangent), de normale e^\perp .

$$c_\alpha = c_\alpha^\parallel + c_\alpha^\perp e^\perp \quad \nabla = \nabla^\parallel + \nabla^\perp e^\perp$$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + c_\alpha \cdot \nabla f_\alpha = \frac{-1}{\tilde{\tau}} (f_\alpha - f_\alpha^{\text{eq}}) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + c_\alpha^\parallel \cdot \nabla^\parallel f_\alpha = \frac{-1}{\tau} (f_\alpha - f_\alpha^{\text{eq}}) - c_\alpha^\perp \nabla^\perp f_\alpha$$

Soit $e^\perp = e_y$. L'intégration de la nouvelle équation DVBE selon la méthode des caractéristiques est effectuée cette fois le long de c_α^\parallel , elle implique un nouveau changement de variable

$$F_\alpha = (c_\alpha \cdot e_y) \nabla_y f_\alpha = c_{\alpha,2} \frac{\partial f_\alpha}{\partial y}, \quad h_\alpha = g_\alpha + \frac{\Delta t}{2} F_\alpha, \quad h_\alpha^{\text{eq}} = g_\alpha^{\text{eq}} + \frac{\Delta t}{2} F_\alpha^{\text{eq}}$$

$$F_\alpha^{\text{eq}} = c_{\alpha,2} \frac{\partial f_\alpha^{\text{eq}}}{\partial y}.$$

Le changement de variable classique était $g_\alpha = f_\alpha + \frac{\Delta t}{2\tau} (f_\alpha - f_\alpha^{\text{eq}})$ $g_\alpha^{\text{eq}} = f_\alpha^{\text{eq}}$

Grid Refinement for aeroacoustics in the Lattice Boltzmann Method : A directional splitting approach

On obtient un schéma de propagation collision alternatif, qui s'écrit en unités LBM

$$h_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_{\alpha}^{\parallel}, t + 1) = h_{\alpha}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau_g} [h_{\alpha}(\mathbf{x}, t) - h_{\alpha}^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)] + \left[\left(\frac{1}{2\tau_g} - 1 \right) F_{\alpha}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2\tau_g} F_{\alpha}^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t) \right]$$

$$\tau_g = \tau + \frac{1}{2}$$

$$h_{\alpha} = g_{\alpha} + \frac{1}{2} F_{\alpha},$$

$$h_{\alpha}^{\text{eq}} = g_{\alpha}^{\text{eq}} + \frac{1}{2} F_{\alpha}^{\text{eq}}.$$

Moyennant quelques manipulations algébriques (voir article), on peut obtenir un schéma n'utilisant que des fonctions de distributions g_{α}

Ce schéma implique donc le calcul d'un **gradient normal à l'interface** (F_{α}).

Choix efficace et peu coûteux : différences finies centrées d'ordre 2

Filtrage fine → coarse sur le plan de l'interface

Grid Refinement for aeroacoustics in the Lattice Boltzmann Method : A directional splitting approach

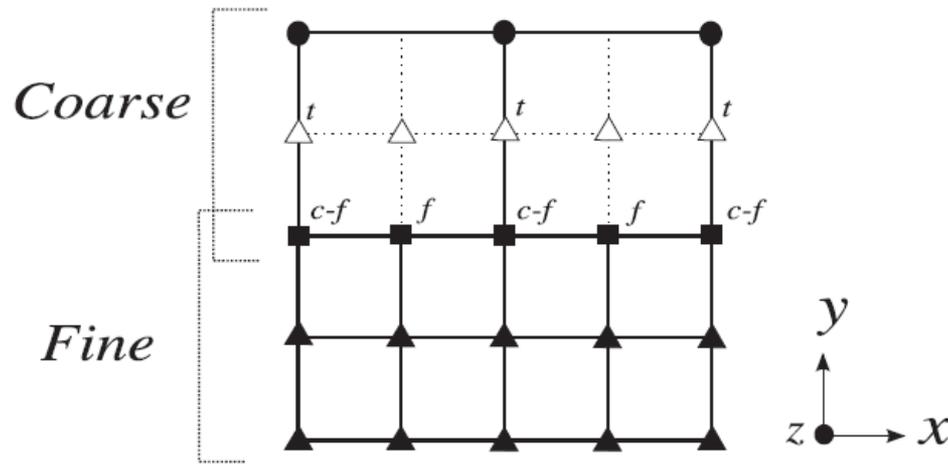


FIG. 1. Geometrical configuration of our grid refinement method.
●: inner coarse nodes; ▲: inner fine nodes; Δ and Δ^t : fine ghost layer nodes; \blacksquare^f : fine transition nodes; \blacksquare^{c-f} : overlapping region where a \blacksquare^c and a \blacksquare^f are collocated.

Grid Refinement for aeroacoustics in the Lattice Boltzmann Method : A directional splitting approach

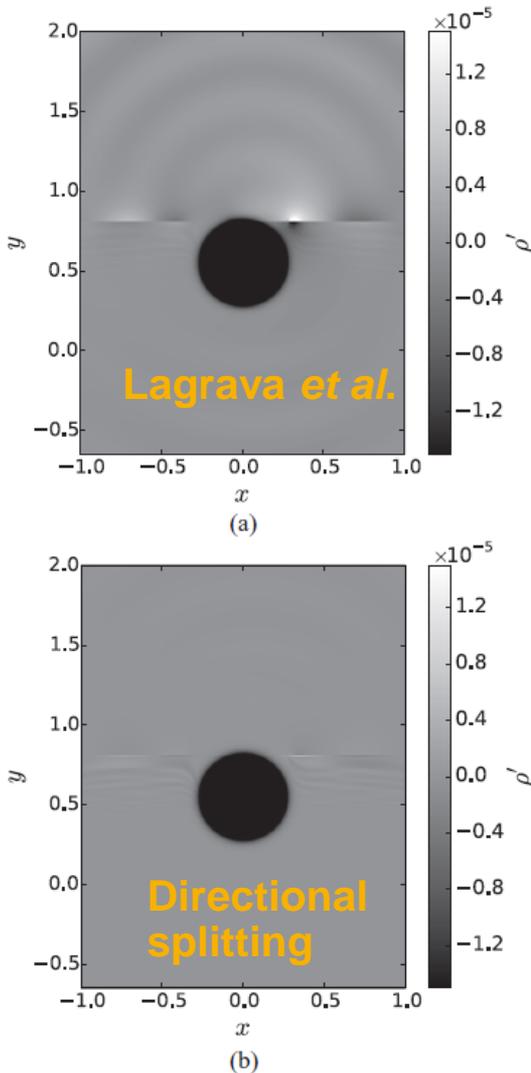


FIG. 7. Density field ρ' at time $t^* = 9500$ (very precise closeup) for (a) the algorithm of Lagrava *et al.* and (b) the directional splitting method. The transition interface is located at $y = 0.8$, the *coarse* mesh being above the interface. The vortex is convected upwards.

- Source de vorticité convect e vers le haut (nombre de Mach $0.04 < Ma < 0.2$) Instantan es de champ de densité ($\pm 10^{-5}$)
- En théorie : aucun rayonnement acoustique
- En pratique : ondes acoustiques parasites visibles au passage de la transition

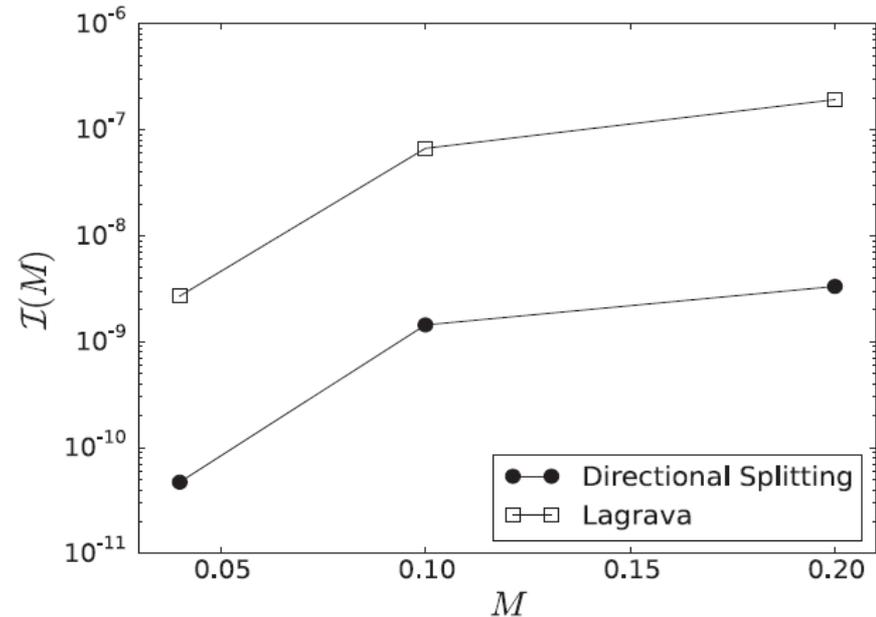


FIG. 9. Integrated power spectral densities of the spurious density fluctuations over the whole frequency spectrum, as a function of the convective Mach number.

