Université Paris Sud | Département de Mathématiques d'Orsay
Agrégation de mathématiques
Modélisation et calcul scientifique | 17 décembre 2010

Equation des ondes à une dimension

- On étudie l'équation des ondes sur l'intervalle $[0,\, 1]$:

(1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \,, \qquad 0 < x < 1$

avec des conditions de Dirichlet homogènes :

(2) $u(0,\, t) = u(1,\, t) = 0 \,, \qquad t > 0 \,,$

une condition initiale non nulle pour le champ :

(3) $u(x,\, 0) = f(x) \,, \qquad 0 < x < 1 \,.$

et identiquement nulle pour la vitesse à l'instant initial :

(4) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\, 0) = 0 \,, \qquad 0 < x < 1 \,.$

On utilise les séries de Fourier et la méthode des différences finies.

Séries de Fourier

1) On suppose d'abord la condition initiale f sinusoïdale :

(5) $f_1(x) = \sin\big(\pi\, x\big) \,, \qquad 0 < x < 1 \,.$

Rappeler l'expression de la fonction $u_1(x,\, t)$ solution du problème (1)(2)(3)(4) dans ce cas. Développer un programme "Matlab" qui permet de représenter cette fonction relativement à la variable d'espace, pour un temps t arbitraire.

2) Généraliser la question précédente dans le cas où la condition initiale est un mode d'ordre k (k entier supérieur ou égal à 1) :

(6) $f_k(x) = \sin\big(k\,\pi\, x\big) \,, \qquad 0 < x < 1 \,.$

3) On suppose maintenant que le second membre f est le polynome du second degré suivant :

(7) $f(x) = x\,(1 - x) \,, \qquad 0 < x < 1 \,.$

Sachant que

(8) $x\,(1-x) \equiv \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{(2k+1)\,\pi} \right)^3 \sin\big((2k+1)\,\pi\, x\big) \,, \qquad 0 < x < 1 \,,$

adapter le programme "Matlab" précédent afin de représenter la solution $u(\bullet, t)$ de (1)(2)(3)(4) avec f donné en (7) (ou (8)) pour un temps t arbitraire.

Différences finies
On se donne un entier n supérieur ou égal à 1, on note $h = \frac{1}{n}$ le pas d'espace associé et on introduit une grille x_j grâce à une subdivision régulière : $x_j = j\,h$ pour $0 \leq j \leq n$. Le pas de temps $\Delta t > 0$ est un nouveau paramètre de discrétisation. On note

(9) $\quad \sigma = c_0 \, \dfrac{\Delta t}{h}$

le "nombre de Courant" qui relie la vitesse des ondes c_0 et les paramètres "numériques" h et $\Delta t > 0$ du problème. On approche $u\big(x_j, \, k\,\Delta t\big)$ par u_j^k et on remplace l'équation aux dérivées partielles (1) par le schéma aux différences finies à trois points en espace et "saute-mouton" en temps :

(10) $$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\Delta t^2} - \frac{c_0^2}{h^2}\Big(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k\Big) = 0\,, \qquad 0 < j < n\,.$$

Les conditions aux limites (2) sont prises en compte sous la forme

(11) $\quad u_0^k = u_n^k = 0\,, \qquad k \geq 0\,.$

4) Développer un programme "Matlab" qui approche la solution du problème (1)(2)(3)(4)(5) avec la méthode des différences finies décrite ci-dessus. Comment discrétiser la condition initiale (4) ? Comment faut-il choisir le nombre de Courant σ ? Valider ce programme à l'aide de la question 1).

5) Etendre ce programme au cas des conditions initiales traitées aux relations (6), puis (7).

Condition limite de Neumann
On remplace les conditions de Dirichlet homogènes (2) par deux conditions de Neumann homogènes :

(12) $$\frac{\partial u}{\partial x}(0, \, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, \, t) = 0\,, \qquad t > 0\,,$$

et on passe de f_k donné à la relation (6) à $\widetilde{f}_k$ compatible avec (12) :

(13) $\quad \widetilde{f}_k(x) = \cos\big(k\,\pi\,x\big)\,, \qquad 0 < x < 1\,.$

6) Reprendre les questions 1) et 4) avec ces nouvelles conditions. On s'attachera tout particulièrement aux points $j = 0$ et $j = n$ sur le bord du domaine.

FD, 13 décembre 2010.