

# Calcul de l'effet de peau dans les conducteurs cylindriques par la méthode de la dérivée fractionnaire

J. Aspás Puértolas\*, G. Akoun\*, C. Fiachetti†, J.P. Catani†, F. Dubois ‡

Octobre 2005§

**Résumé** – Cet article décrit une approche originale consistant à appliquer la méthode de la dérivée fractionnaire au calcul en temporel des pertes dues à l'effet de peau dans les conducteurs cylindriques.

**Mots clés** – Diffusion, effet de peau, domaine temporel, dérivée fractionnaire

## 1 Introduction

- Cette étude concerne le calcul des perturbations conduites dans les câbles en utilisant un logiciel de résolution de circuit dans le domaine temporel, Saber<sup>®</sup>. Le domaine fréquentiel utilisé traditionnellement en CEM pour son aptitude à traiter les problèmes de diffusion et de propagation est un obstacle en présence de non-linéarités.
- Historiquement, l'effet de peau le long des fils a été calculé dans le domaine fréquentiel [2]-[3]. Cette approche permet d'exprimer facilement à l'aide des fonctions de Bessel la solution exacte de l'impédance interne du fil.

---

\* EADS-CRC, EMC Service DCR/STI/SE, 12, rue Pasteur, 92152 Suresnes Cedex, France.

† CNES, DCT/TV/EL, 18, Av. Edouard Belin, 31055 Toulouse Cedex, France.

‡ CNAM Paris et Université Paris Sud, Mathématique, bât. 425, 91405 Orsay, France.

§ Congrès CEM06, Saint Malo, 4-6 avril 2006. Édition du 03 avril 2006.

Pour revenir au domaine temporel, la réponse impulsionnelle de l'impédance est donnée par Transformée de Fourier Inverse [2].

- Ici, nous proposons d'appliquer la théorie du calcul fractionnaire à l'analyse temporelle en partant d'une approximation de l'expression fréquentielle de l'impédance interne d'un conducteur cylindrique. Cette approximation préserve la causalité de la réponse temporelle. Le calcul par la méthode de la dérivée fractionnaire est comparé à la Transformée de Fourier Inverse du calcul effectué dans le domaine fréquentiel.

## 2 Modèle physique de l'impédance interne

### 2.1 Equation de diffusion dans le domaine fréquentiel

Les équations de Maxwell sont écrites pour un milieu bon conducteur (Loi d'Ohm:  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ) en supposant que le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction et qu'il n'y a pas d'accumulation de charges.

Pour un conducteur cylindrique de rayon  $r = a$  (Fig. 1), la densité de courant est supposée n'avoir que la seule contribution longitudinale. Le courant est également supposé indépendant de  $\theta$ . De plus, on ne considère pas la propagation le long de l'axe  $z$ .

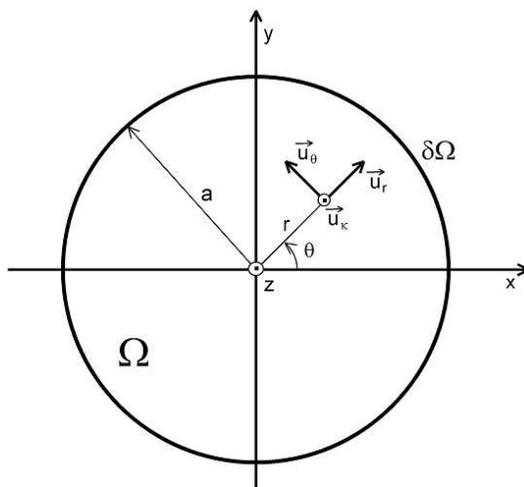


Figure 1. *Section transversale du conducteur cylindrique*

Pour décrire l'impédance interne d'un fil, il faut connaître la répartition de la densité de courant à l'intérieur du conducteur. Celle-ci est décrite par l'équation de diffusion qui s'écrit :

$$\frac{\partial^2 j_z(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial j_z(r, t)}{\partial r} - \sigma \mu \frac{\partial j_z(r, t)}{\partial t} = 0$$

En appliquant une Transformée de Fourier (intégration sur le temps  $t$ ) l'équation aux dérivées partielles devient une équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d^2 \hat{j}_z(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{j}_z(r)}{dr} - j\omega\sigma\mu\hat{j}_z(r) = 0$$

L'impédance interne par unité de longueur est alors donnée par [3], [4], [6]:

$$(1) \quad \hat{Z} \equiv \hat{Z}_{int} = \frac{\hat{E}_z(a)}{\hat{I}} = \frac{k}{2\pi a \sigma} \cdot \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}$$

où  $J_0$  et  $J_1$  sont les fonctions de Bessel ayant pour argument complexe  $k = \sqrt{-j\omega\sigma\mu}$ . Cette expression traduit l'effet de la fréquence sur la distribution du courant dans la section du conducteur : plus la fréquence augmente et plus le courant ne circule que sur la périphérie. En d'autres termes, pour une fréquence donnée, tout se passe comme si le courant diffusait vers l'intérieur du conducteur sur une profondeur égale à l'épaisseur de peau. L'impédance interne du conducteur augmente avec la fréquence (Fig. 2).

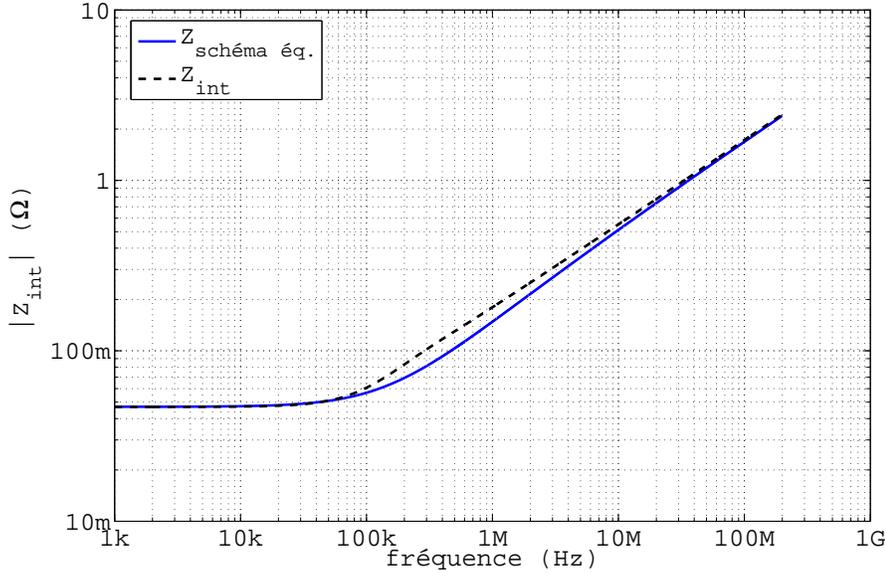


Figure 2. *Allure du module de l'impédance interne d'un câble.*

Habituellement, pour une résolution dans le domaine fréquentiel, seule la partie réelle de cette impédance interne est utilisée car la partie imaginaire est

négligeable devant l'inductance externe du câble. Toutefois cette inductance interne doit être conservée si l'on souhaite revenir dans le domaine temporel. En effet, elle permet de conserver les propriétés de causalité au travers de la Transformée de Fourier Inverse.

## 2.2 Analyse de l'expression de l'impédance interne

Les développements limités de l'expression exacte sont connus pour la basse fréquence (éq. (2)) et la haute fréquence (éq. (3)) [2] [3]:

$$(2) \quad \widehat{Z}_{bf} = R_{dc} + j\omega L_{bf} = \frac{1}{\pi a^2 \sigma} + j\omega \frac{\mu}{8\pi}$$

$$(3) \quad \widehat{Z}_{hf} = R(\omega) + j\omega L(\omega) = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma}} \sqrt{j\omega} = A_{hf} \sqrt{j\omega}$$

Nous cherchons à donner une approximation qui soit valable dans tout le domaine fréquentiel avec une seule expression.

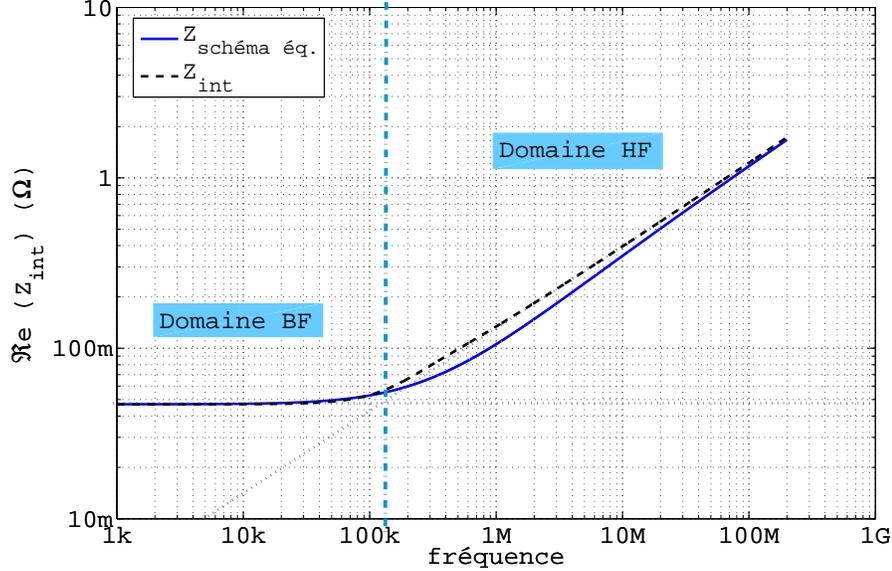


Figure 3. *Partie réelle de l'impédance interne.*

Sur la figure 3, la partie réelle de l'impédance interne est représentée. Les deux domaines, basses fréquences (avec  $R_{bf}$  constante) et hautes fréquences (avec  $R(\omega)$  augmentant à raison de 10dB/décade), y sont mis en évidence. On

remarque que dans chaque domaine c'est la résistance la plus importante qui domine : on associe ce comportement à un "montage série des deux résistances BF et HF". On s'attend à ce que cette association soit la moins exacte au niveau de la transition entre les domaines basse et haute fréquence.

Sur la figure 4, la partie imaginaire de l'impédance interne présente également deux domaines : basses fréquences (avec  $L_{bf}$  et une pente de 20dB/décade) et hautes fréquences (avec  $L(\omega)$  associée à une pente de 10dB/décade). Cette fois, dans chaque domaine c'est l'inductance la plus faible qui domine : on associe ce comportement à un "montage parallèle des deux inductances BF et HF".

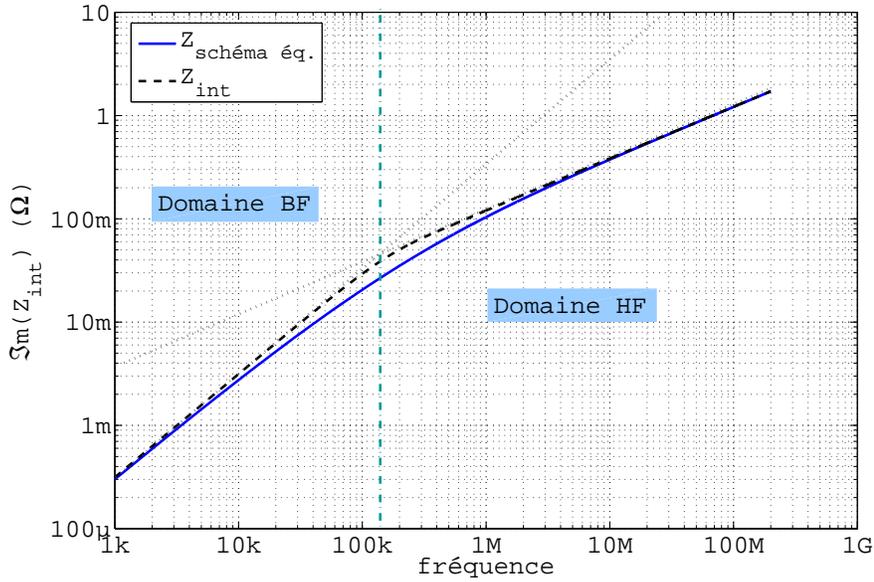


Figure 4. *Partie imaginaire de l'impédance interne.*

L'analyse de l'expression de  $Z_{int}$  montre également que le changement de pente se fait à la même fréquence  $f_c$  pour la partie réelle et pour la partie imaginaire. Cette fréquence correspondant à la pulsation  $\omega_c$  est définie pour :

$$R_{bf} = \Re(Z_{hf})|_{\omega_c} \text{ et } j\omega_c L_{bf} = \Im(Z_{hf})|_{\omega_c}$$

Ces égalités mènent au même résultat :

$$(4) \quad \omega_c = \frac{R_{bf}}{L_{bf}} = \frac{8}{\mu\sigma a^2}$$

Plus le rayon du fil sera faible et plus élevée sera la fréquence  $f_c$  à partir de laquelle il montrera un comportement "haute fréquence".

Ce calcul que nous venons de mener pour les conducteurs cylindriques peut être aussi réalisé pour les conducteurs de section quelconque : le résultat est identique.

### 2.3 Schéma équivalent

Grâce à l'analyse que nous venons de mener, nous proposons de représenter pour la totalité du domaine fréquentiel l'impédance interne dans le conducteur à l'aide du schéma équivalent de la figure 5.

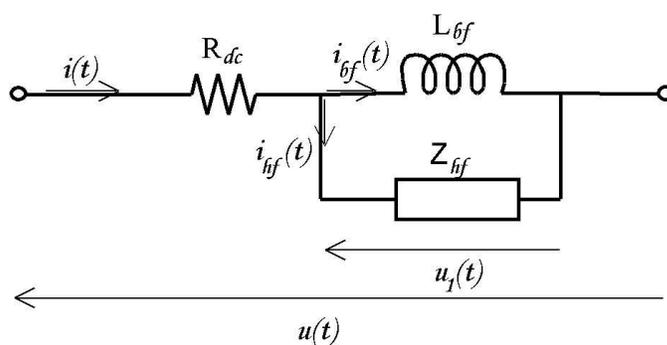


Figure 5. Schéma équivalent de l'impédance interne d'un fil

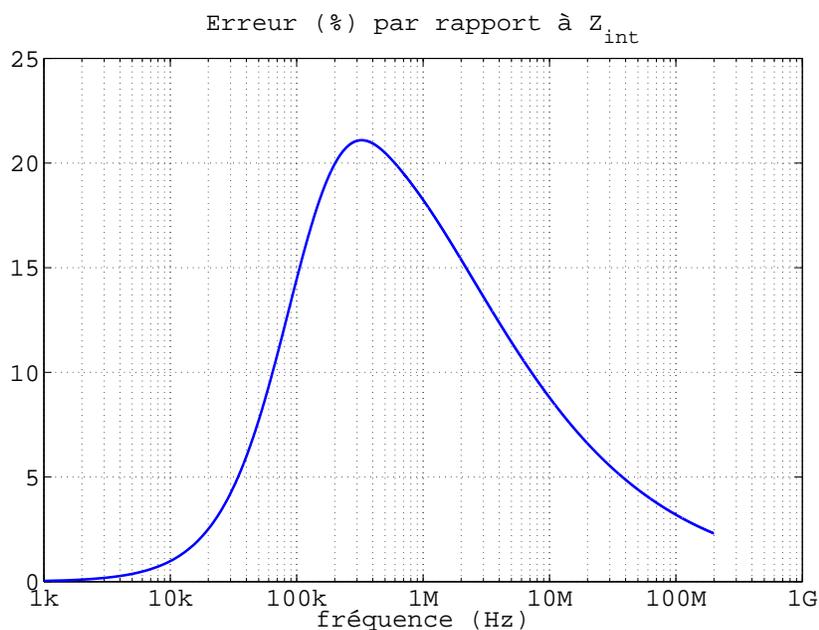


Figure 6. Erreur par rapport à la fonction exacte

Avec cette représentation, l'impédance interne est donc approchée par :

$$(5) \quad \widehat{Z}_{\text{schéma \acute{e}q.}} = R_{dc} + \frac{j\omega L_{bf} \widehat{Z}_{hf}}{j\omega L_{bf} + \widehat{Z}_{hf}}$$

Dans le domaine fréquentiel, ses caractéristiques sont représentées sur les figures 2, 3 et 4. L'erreur relative sur le module associée à cette approximation est au maximum de 20% par rapport à la fonction exacte (Fig. 6).

Cette dernière permet également de mieux appréhender les domaines pour lesquelles les approximations HF et BF sont exactes. Toutefois, dans la plupart des cas, l'impédance interne du câble est "masquée" par son inductance externe : cette erreur n'est donc plus visible. Elle ne se sera "vue" que si l'on se place sur une résonance du câblage.

### 3 Réponse dans le domaine temporel

#### 3.1 Calculer l'effet de peau

La difficulté consiste à exprimer la réponse temporelle de l'impédance haute fréquence  $Z_{hf}$  dont les propriétés  $R$  et  $L$  dépendent de la fréquence. En utilisant le schéma de la figure 5, la tension au borne de l'impédance interne s'écrit :

$$u^1(t) = \text{TF}^{-1} \left( A_{hf} \sqrt{j\omega} \widehat{I}^{hf}(\omega) \right)$$

où  $A_{hf} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}$  était défini dans l'équation (3).

Pour effectuer ce calcul, on définit la *dérivée fractionnaire* comme [7]:

$$(6) \quad D^{\frac{1}{2}} i^{hf}(t) \equiv \int_0^t \frac{di^{hf}(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{j\omega} \widehat{I}^{hf}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \text{TF}^{-1} \left( \sqrt{j\omega} \widehat{I}^{hf}(\omega) \right) .$$

De même que  $j\omega$  est l'opérateur fréquentiel de la dérivée première,  $\sqrt{j\omega}$  correspond à la dérivée à la puissance un-demi. L'opérateur  $D^{\frac{1}{2}}$  appliqué deux fois est la dérivée première.

Ainsi la tension  $u^1(t)$  s'écrit :

$$(7) \quad u^1(t) = A_{hf} D^{\frac{1}{2}}(i^{hf}(t))$$

L'expression numérique de la dérivée fractionnaire peut être développée de plusieurs manières [8]. Nous présenterons l'approche de Grünwald-Letnikov qui consiste à utiliser la racine d'un opérateur aux différences finies.

Pour un pas de temps  $\Delta T$ , le schéma différences finies de la dérivée première est donné à l'aide des échantillons  $i_n^{hf} = i^{hf}(nh)$  :

$$\left[ \frac{di^{hf}(t)}{dt} \right]_n \approx \left( \frac{i_n^{hf} - i_{n-1}^{hf}}{\Delta T} \right) = \frac{1}{\Delta T} (\text{Id} - \chi) (i_n^{hf})$$

où Id et  $\chi$  sont les opérateurs identité et retard tels que  $\text{Id}(i_n) = i_n$  et  $\chi^k(i_n) = i_{n-k}$ . On peut alors définir l'opérateur dérivée fractionnaire comme :

$$\left[ \frac{d^{\frac{1}{2}} i^{hf}(t)}{dt^{\frac{1}{2}}} \right]_n \approx \left( \frac{1}{\Delta T} (\text{Id} - \chi) \right)^{\frac{1}{2}} (i_n^{hf})$$

On utilise le développement limité pour décrire la dérivée fractionnaire comme :

$$D^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{\Delta T}} (\text{Id} - \chi) = \frac{1}{\sqrt{\Delta T}} \left( \text{Id} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi^k \right)$$

en notant  $\alpha_k$  les différentes contributions du développement limité :

$$\alpha_k = (-1)^k \cdot \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) \dots (\frac{1}{2} - k + 1)}{k!}$$

En appliquant ce résultat dans (7), la tension aux bornes de l'impédance  $Z_{hf}$  s'écrit :

$$(8) \quad u_n^1 = \frac{A_{hf}}{\sqrt{\Delta T}} \left( i_n^{hf} + \sum_{k=1}^n \alpha_k i_{n-k}^{hf} \right) .$$

### 3.2 Courant total

L'impédance interne du fil est l'association des composants "basses fréquences"  $R_{dc}$  et  $L_{bf}$  et d'un dipôle  $Z_{hf}$ . Pour connaître le courant total traversant l'impédance interne, nous écrivons les lois de Kirchhoff (loi des noeuds pour les courants et loi des mailles pour les tensions) :

$$\begin{aligned} i_n &= i_n^{bf} + i_n^{hf} \\ u_n &= u_n^1 + R_{dc} (i_n^{bf} + i_n^{hf}) \end{aligned}$$

Les expressions des courants  $i_n^{bf}$  et  $i_n^{hf}$  en fonction de la tension  $u_n$  sont données par :

$$i_n^{hf} = \frac{1}{1 + K \frac{A_{hf}}{R}} \left[ \frac{u_n}{R_{bf}} - i_{n-1}^{bf} + K \frac{A_{hf}}{R} \sum_{k=1}^n \alpha_k i_{n-k}^{hf} \right]$$

$$i_n^{bf} = \frac{1}{K} \left[ -i_n^{hf} + \frac{1}{R_{bf}} (u_n + R i_{n-1}^{bf}) \right]$$

où :

$$(9) \quad R = \frac{L_{bf}}{\Delta T}, \quad K = \left( 1 + \frac{R}{R_{bf}} \right).$$

### 3.3 Limitation du nombre d'échantillons

L'expression (8) de la tension  $u_n^1$  sous-entend que l'on doit tenir compte de tous les échantillons passés. Ceci implique que la mise en œuvre du calcul fractionnaire demande une capacité de mémoire importante et un nombre élevé d'opérations.

Toutefois, l'analyse de l'expression de l'impédance interne du fil nous a permis d'établir deux domaines de fonctionnement : le domaine "haute fréquence" et le domaine "basse fréquence" séparés par la fréquence  $f_c$ .

Le calcul fractionnaire représente le comportement "haute fréquence" du fil, il ne prend en compte que des variations rapides de courant intervenant dans des temps inférieurs à  $T_c = f_c^{-1}$ , ce temps ne dépendant que des caractéristiques du câble.

Le nombre d'échantillons pris en compte peut donc être réduit à un nombre minimum d'échantillons  $N_c$  de telle manière que :

$$(10) \quad N_c \Delta T \geq T_c \text{ soit } N_c \geq \frac{2\pi L_{bf}}{\Delta T R_{bf}}.$$

## 4 Résultats de simulation

On considère l'impédance interne seule d'un fil attaqué par un générateur de tension de 1V. La configuration de calcul correspond à celle d'un fil de jauge AWG22 (de rayon  $a = 0.36mm$ ) en cuivre ( $\sigma = 5.210^7 S/m$ ) et de longueur 1m. Le temps  $T_c$  pour ce fil est de 6, 7 $\mu s$ , ainsi selon l'échantillonnage choisi, le nombre d'échantillons pris en compte pour le calcul temporel variera.

Le courant calculé par la dérivée fractionnaire sera comparé avec  $R_{bf}$  pour les signaux "basses fréquences" et aux "méthodes classiques" qui consistent à

faire le calcul dans le domaine fréquentiel puis effectuer une Transformation de Fourier inverse. Dans le domaine fréquentiel, l'impédance exacte (1) et celle correspondant au schéma équivalent (5) seront utilisées.

#### 4.1 En basse fréquence, où $R_{bf}$ domine

Sur la figure 7, le courant pour une tension sinusoïdale à  $5kHz$  est observé. On choisit de déphaser cette tension afin de créer un saut de tension à "l'allumage" (temps de montée égal à  $\Delta T$ ). A cette fréquence, on peut comparer le résultat à celui que donnerait la résistance  $R_{bf}$  seulement. La correspondance entre les deux courbes est quasi-immédiate : Dans les 6 premières  $\mu s$ , le courant ne suit pas la tension, il est d'abord nul : ceci traduit le comportement "haute fréquence" ( $Z_{hf} \rightarrow \infty$ ) du fil pour le saut de tension.

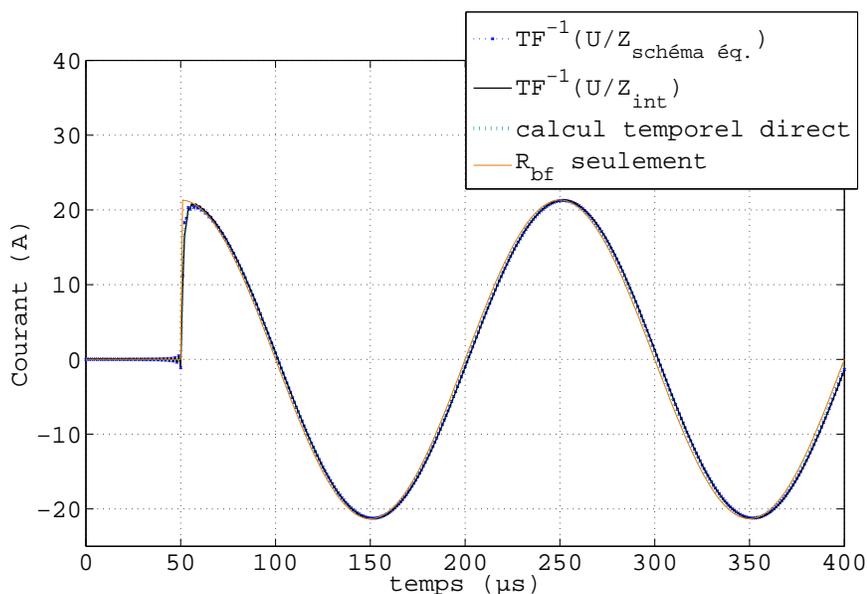


Figure 7. *Erreur par rapport à la fonction exacte*

Pour cette simulation, le pas de temps est de  $1\mu s$  : seulement 7 échantillons ont été pris en compte pour le calcul fractionnaire.

#### 4.2 Dans le domaine intermédiaire

Sur la figure 8, le courant pour une tension à  $300kHz$  est représenté. Pour cette simulation, nous nous attendons à un maximum d'erreur par rapport à

l'impédance interne exacte du fil. En effet l'écart entre les deux courants est de l'ordre de 20%. La première oscillation n'atteint pas le même niveau que les autres pour les mêmes raisons que précédemment. Aux premiers instants, la variation est trop rapide et l'impédance vue par le courant est "infinie" c'est pourquoi le courant est nul et non pas maximum.

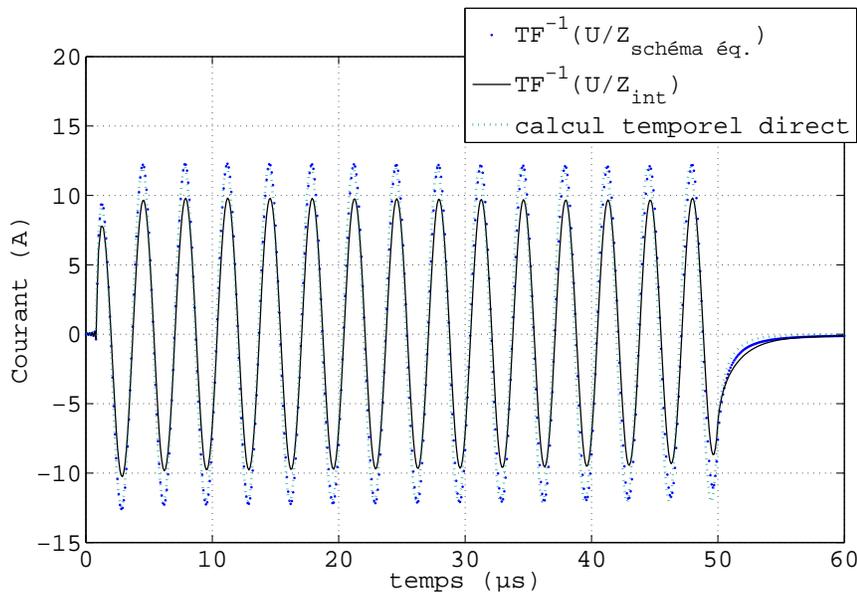


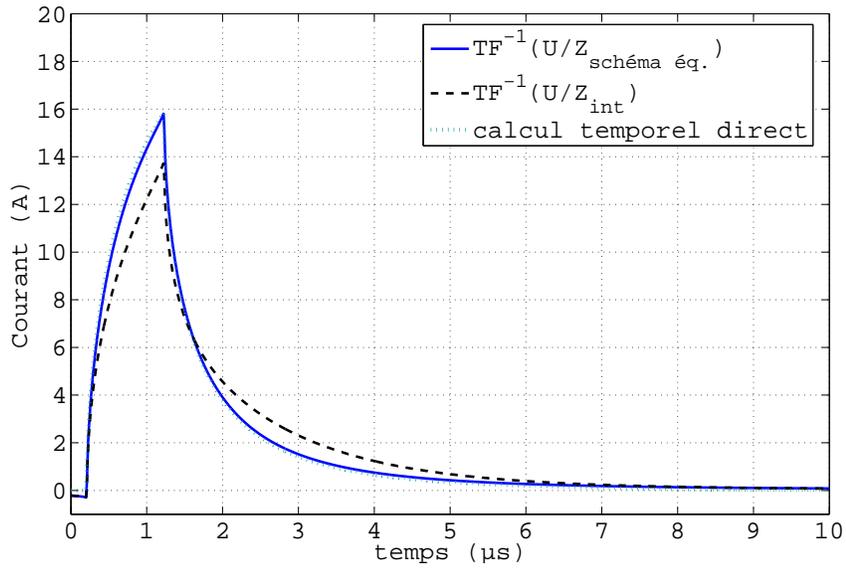
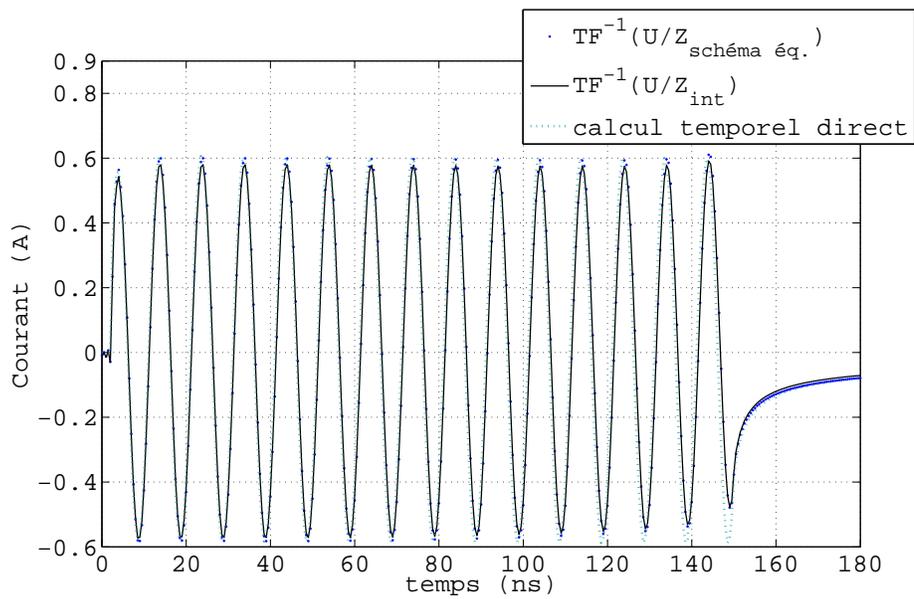
Figure 8. Générateur sinusoïdal à 300kHz (pire cas)

Pour cette première simulation, le pas de temps est de  $0.1\mu s$  : 69 échantillons ont été pris en compte pour le calcul fractionnaire.

De même sur la figure 9, la tension imposée est une impulsion dont les caractéristiques sont les suivantes :

- le temps de montée et de descente est de  $20ns$ ;
- la durée de l'impulsion est de  $1.4\mu s$ .

Ainsi pour les moments correspondant au temps de montée, la correspondance entre la calcul fractionnaire et celui avec l'impédance exacte est très bonne mais pour des temps plus longs, elle est dégradée.

Figure 9. *Générateur impulsionnel*Figure 10. *Générateur sinusoïdal à 100MHz*

### 4.3 En haute fréquence, où $Z_{hf}$ domine

La figure 10 correspond à une excitation à  $100MHz$ . Dans cette gamme de fréquence, l'approximation du schéma équivalent est très bonne. L'allure donnée par le calcul dans le domaine fréquentiel et par le calcul temporel direct se correspondent.

Pour ce calcul, le pas de temps est très faible ( $0.5ns$ ), tous les échantillons du signal ont été pris en compte.

Si le signal avait duré un temps supérieur à  $T_c$ , nous aurions pris en compte le nombre d'échantillons  $N_c$  nécessaire pour couvrir le temps  $T_c$  (ici avec un pas de temps de  $0.5ns$ , ceci nécessitait 13398 échantillons) : il s'agit là du nombre "maximum" d'échantillons au delà duquel le calcul fractionnaire ne donne pas de résultats plus précis.

Dans le cas du signal rapide de la figure 10, le nombre d'échantillons à prendre en compte peut encore être diminué : en effet, sur cette figure, le calcul fractionnaire donne un résultat correct dès les premiers instants. La limite minimum du nombre d'échantillons est donc donnée par la fréquence du signal.

Toutefois, comme on ne connaît pas a priori le contenu fréquentiel du signal sur lequel on calcule l'effet de l'impédance interne du câble, le nombre d'échantillons maximum à conserver ne dépend que des caractéristiques du câble.

## 5 Conclusion

Tout d'abord, l'analyse de l'impédance interne d'un conducteur cylindrique nous a permis de proposer un schéma équivalent. Ce schéma donne une approximation de cette impédance interne sur tout le domaine fréquentiel.

Pour mettre en oeuvre ce schéma équivalent, il a été nécessaire de trouver une méthode pour calculer l'effet de peau dans le temporel. Nous avons alors montré que le calcul fractionnaire est simple à utiliser car tous les coefficients sont calculés analytiquement.

Comparée à la Transformée de Fourier Inverse du calcul fréquentiel, la méthode fractionnaire permet de conserver l'approche analytique dans le domaine temporel sans avoir les contraintes de la Transformée de Fourier qui nécessite une fenêtre d'analyse temporelle suffisamment large (bien plus importante que la durée du signal utile) pour tenir compte de tout le contenu

fréquentiel du signal.

Finalement, le calcul fractionnaire est une méthode numérique intéressante qui pourrait être utilisée pour le calcul de propagation dans des modèles temporels de câbles. Cette méthode pourrait être également appliquée aux inductances à noyau conducteur.

## Références

- [1] S.A. Schelkunoff, *The Electromagnetic Theory of Coaxial Transmission Lines and Cylindrical Shields*, Bell System Technical Journal, Oct. 1934.
- [2] E. Roubine, *Lignes et Antennes, Tome 1*, “Revue d’Optique”, 1954.
- [3] G. Fournet, *Electromagnétisme par les équations locales*, Masson, 1985.
- [4] S. Ramo J. R. Whinnery, T. Van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, 3rd ed., John Wiley and Sons, 1994.
- [5] A. Angot, *Compléments de mathématiques*, Collection techniques et scientifiques du C.N.E.T., 1965.
- [6] C. R. Paul, *Analysis of Multiconductor Transmission Lines*, J. Wiley and Sons, 1994.
- [7] K. B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York and London, 1974.
- [8] F. Dubois and S. Mengué, *Schémas numériques implicites pour les équations semi-différentielles*, 2000.