

# Schémas numériques pour des écoulements à bas nombre de Mach

François Dubois \*

- Nous proposons dans cette note une idée de schéma numérique pour la résolution numérique d'écoulements à très bas nombre de Mach. L'idée directrice est de concevoir une approche avec une dissipation minimale de l'entropie.

- Rappelons que l'on cherche à approcher une loi de conservation de la forme

$$(1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial f(W)}{\partial x} = 0,$$

dans le cas de plusieurs dimensions d'espace. Nous présentons les relations algébriques dans le cas d'une seule dimension, mais l'extension multidimensionnelle ne pose pas de difficulté conceptuelle. On approche la loi de conservation (1) à l'aide de volumes finis. Le problème essentiel de cette méthode est de construire une relation discrète qui permette de calculer le flux  $\Phi$  à l'interface entre une maille de gauche contenant un état moyen  $W_g$  et une maille de droite avec un état  $W_d$ .

- On utilise une entropie mathématique  $\eta$  de flux associé  $\xi$  et les variables entropiques  $\varphi$  associées, définies par la relation

$$(2) \quad d\eta = \varphi \bullet dW,$$

ce qui indique qu'on a la relation constitutive

$$(3) \quad d\xi = \varphi \bullet df.$$

On introduit ensuite le "flux dual"  $\psi$  selon la relation

$$(4) \quad \psi \equiv \varphi \bullet f - \xi.$$

Dans le cas de la dynamique des gaz, toutes ces relations s'explicitent sans difficulté en fonction de la thermostatique traditionnelle. Suivant les idées initiées par Osher [1984], on introduit ensuite la dissipation numérique  $\mathcal{D}$  entre les mailles "gauche" et "droite" :

$$(5) \quad \mathcal{D} \equiv (\varphi_d - \varphi_g) \bullet \Phi - (\psi_d - \psi_g).$$

---

\* CNAM Paris et Université Paris Sud, Orsay.

On sait qu'une condition suffisante pour que le schéma d'Euler rétrograde associé au flux numérique  $\Phi$  vérifie une condition d'entropie discrète est que l'on ait l'inégalité

$$(6) \quad \mathcal{D} \leq 0$$

à toutes les interfaces du maillage.

- Nous définissons ici un flux centré  $\Phi_c$  de la manière suivante. On considère d'abord le "chemin droit  $\varphi(\bullet)$  dans l'espace des variables entropiques" par la relation très simple

$$(7) \quad \varphi(\theta) = (1 - \theta)\varphi_g + \theta\varphi_d, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

puis le flux  $\Phi_c$  lui-même par la relation

$$(8) \quad \Phi_c = \int_0^1 f(W(\varphi(\theta))) d\theta.$$

Le flux centré  $\Phi_c$  défini à la relation (8) conduit à une dissipation d'entropie  $\mathcal{D}$  **identiquement nulle**. Il s'explique facilement pour une loi de conservation scalaire, mais ne conduit pas à une algèbre triviale pour la dynamique des gaz. Si on remplace la relation (8) par une formule de quadrature à deux points (formule des trapèzes), on retrouve facilement la relation classique

$$(9) \quad \Phi_c^2 = \frac{1}{2} (f(W_g) + f(W_d))$$

pour lequel rien de simple n'est connu concernant la condition d'entropie (6) !

- Nous proposons dans le travail à venir de développer des formules de quadrature pour le flux centré  $\Phi_c$  et des flux dissipatifs  $\Phi_d$  tels que le flux total  $\Phi$  de la forme

$$(10) \quad \Phi \equiv \Phi_c + \Phi_d$$

vérifie l'inégalité (6), tout en l'explicitant, et tout en contrôlant la dissipation d'entropie induite par la contribution  $\Phi_d$  du flux dissipatif. En particulier, l'entropie physique produite lors d'un choc faible est du troisième ordre relativement à la discontinuité des variables conservatives. Il convient de tester d'abord le schéma dans le cas d'une équation scalaire, avant de passer à un modèle de type Saint Venant, puis aux équations classiques de la dynamique des gaz.

07 novembre 2002, édition 22 avril 2006.