

Etude d'un schéma de Boltzmann sur réseau recentré en vitesse

Tony FEVRIER, Université Paris-Sud Orsay

Benjamin GRAILLE, Université Paris-Sud Orsay

Francois DUBOIS, CNAM Paris, Université Paris-Sud Orsay

La mise en œuvre des schémas de Boltzmann sur réseau est d'une grande simplicité et leur flexibilité permet de simuler un grand nombre d'équations aux dérivées partielles. Ils sont d'ailleurs utilisés dans les milieux industriels et font l'objet depuis peu de recherches de nature mathématique. Nous nous proposons ici de présenter un nouveau type de schéma de Boltzmann sur réseau inspiré des travaux de M. Geier [2] et permettant de résoudre certaines équations macroscopiques de type fluide (acoustique, Navier-Stokes, *etc.*).

Etant fixés Δx un pas d'espace et Δt un pas de temps, on se donne un réseau régulier de l'espace à deux dimensions $\mathcal{L} = \Delta x(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ et un ensemble fini de vitesses $\{v_j\}_{0 \leq j \leq 8}$, avec $v_j \in (\Delta x / \Delta t)\mathcal{V}$ où $\mathcal{V} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1), (1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)\}$ pour le schéma dit D2Q9. Une caractéristique de cette approche est que si $x_k \in \mathcal{L}$ alors, quel que soit $j \in \{0, \dots, 8\}$, $x_k + v_j \Delta t \in \mathcal{L}$. Les fonctions de distribution notées $f_j(x_k, t^n)$, $0 \leq j \leq 8$, représentent le nombre de macro-particules au point x_k à l'instant $t^n = n\Delta t$ de vitesse v_j et les quantités macroscopiques comme la masse ou la quantité de mouvement sont des moments discrets des f_j :

$$\rho(x_k, t^n) = \sum_{j=0}^8 f_j(x_k, t^n), \quad q(x_k, t^n) = \sum_{j=0}^8 v_j f_j(x_k, t^n).$$

Classiquement, le schéma s'écrit d'une manière générale sous la forme

$$f_i(x_k, t^{n+1}) = f_i^*(x_k - v_i \Delta t, t^n),$$

où le symbole $*$ désigne la fonction de distribution après une phase dite de collision. Dans le schéma de d'Humières [1], la phase de collision est diagonale dans l'espace des moments $m = Mf$ obtenus à l'aide d'une matrice fixe M de taille 9×9 .

Nous étudions une classe plus générale de schémas pour lesquels les moments sont calculés dans un référentiel avançant à la vitesse \tilde{u} . Plus précisément, la matrice M dépend d'un champ de vitesses \tilde{u} donné *a priori* : $m(\tilde{u}) = M(\tilde{u})f$, avec $M(\tilde{u}) = T(\tilde{u})M$. La structure de la matrice $T(\tilde{u})$ est étudiée, en particulier nous nous intéressons aux choix des moments tels que T soit une représentation de groupe. Cette propriété permet de ne pas dégrader la complexité du schéma et de conserver sa facilité d'implémentation. Nous présentons les équations équivalentes à l'ordre 3 via la méthode asymptotique du développement de Taylor [3] et exhibons d'éventuelles sources d'instabilités liées à ces termes d'ordre 3. Enfin nous présentons deux cas-tests numériques afin d'évaluer les propriétés d'invariance par Galilée et de stabilité du schéma : la cavité de Kelvin-Helmholtz et la décroissance d'une onde de cisaillement.

Références

- [1] D. D'HUMIÈRES, *Generalized Lattice-Boltzmann Equations*, AIAA Rarefied Gas Dynamics: Theory and Applications, Progress in Astronautics and Aeronautics, **159**, pp. 450–458, 1992.
- [2] A. GREINER, M. GEIER, J.C. KORVINK, *Cascaded digital lattice Boltzmann automata for high Reynolds number flow*, Phys. Rev. E, **73**, 066705, 2006.
- [3] F. DUBOIS, *Une introduction au schéma de Boltzmann sur réseau*, ESAIM Proc., **18**, pp. 181–215, 2007.

Tony FEVRIER, tony.fevrier@math.u-psud.fr

Benjamin GRAILLE, benjamin.graille@math.u-psud.fr

Francois DUBOIS, francois.dubois@cnam.fr