Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Une formulation tourbillon-vitesse-pression pour le problème de Stokes

François Dubois

Résumé – On propose une formulation variationnelle mixte tourbillon-vitesse-pression du problème de Stokes dans un ouvert borné de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ qui permet de prendre en compte des conditions limites très générales sur ces trois champs. Le problème obtenu est bien posé et s'approche naturellement à l'aide d'éléments finis vectoriels.

A vorticity-velocity-pressure formulation for the Stokes problem

Abstract – *We propose a mixed variational formulation involving vorticity, velocity and pressure fields in a bounded open set of* $\mathbf{R}^2$ *or* $\mathbf{R}^3$ *which takes into account very general boundary conditions for these fields. The problem is well posed and is naturally approximated with help of vectorial finite elements.*

1. Motivation physique et numérique. – Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n (n=2$ ou $3)$ de frontière Γ régulière. Le problème de Stokes, dont la bonne compréhension mathématique est fondamentale pour aborder l'étude des équations de Navier Stokes d'un fluide visqueux incompressible (*voir* par exemple Temam [16] ou Girault-Raviart [9]) s'écrit de façon classique à l'aide d'une formulation primale en vitesse-pression $(\mathbf{u}, p)$:

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{2}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \tag{3}$$

où $\nu > 0$ est une constante qui décrit la viscosité cinématique du fluide et $\mathbf{f}$ le second membre. L'introduction de conditions aux limites en pression a été étudiée par Bègue et coll. [2]. Toutefois cette étude ne permet que certains couplages entre les conditions limites en tourbillon, vitesse et pression et suppose une hypothèse non triviale de relèvement des conditions aux limites qui semble non optimale.

Par ailleurs de nombreux praticiens de la mécanique des fluides numérique approchent numériquement en maillage quadrangulaire cartésien les équations de Navier-Stokes à l'aide des « grilles décalées » entre la vitesse et la pression, caractéristiques de la méthode MAC de Harlow et Welch [11], connues en météorologie sous le nom de « grille C » de Arakawa [1]. Cette discrétisation peut s'interpréter comme une approximation du champ de vitesses dans l'espace $H(\operatorname{div}, \Omega)$ à l'aide de l'élément fini de degré un de Raviart-Thomas [15] (et Nédélec [12] en dimension trois) et suppose également une discrétisation de la pression dans l'espace $L^2(\Omega)$ à l'aide d'éléments finis de degré zéro discontinus. Ceci constitue un crime variationnel pour le problème (1)-(3), où l'on suppose classiquement que la vitesse appartient à $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Récemment, Nicolaides [14] a réinterprété la méthode MAC à l'aide de volumes finis duaux sur un maillage bidimensionnel en triangles de Delaunay et polyèdres de Voronoï. Dans cette Note, nous proposons une formulation variationnelle triple tourbillon-vitesse-pression du problème de Stokes qui permet de prendre en compte naturellement divers types de conditions aux limites en pression (§ 2), nous montrons que le problème continu est bien posé dans $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$, établissons un

---

Note présentée par Jacques-Louis Lions.

0764-4442/92/03140277 \$ 2.00

résultat de régularité (§ 3) et envisageons son approximation par éléments finis vectoriels (§ 4).

2. FORMULATION TOURBILLON-VITESSE-PRESSION. — Comme pour la formulation fonction courant-tourbillon (*voir* par exemple Girault-Raviart [9] et Nédélec [13]), nous réécrivons l'opérateur $-\nu\Delta\mathbf{u}$ sous la forme $\nu\,\mathbf{rot}\,\omega$ où le tourbillon ω est défini par la relation :

$$\omega = \mathbf{rot}\,\mathbf{u} \quad \text{dans } \Omega, \qquad \text{où} \quad \omega(x) \in \mathbf{R}^{2n-3} \tag{4}$$

ce qui conduit à réécrire l'équation de l'impulsion (1) sous la forme

$$\nu\,\mathbf{rot}\,\omega + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega. \tag{5}$$

Nous multiplions l'équation (4) par une fonction test φ appartenant à l'espace $\mathrm{H}(\mathrm{rot}, \Omega)$ (défini par exemple dans Dautray-Lions [4] ainsi que tous les autres espaces de Sobolev utilisés dans cette Note) et intégrons par parties le second terme, nous multiplions l'équation (5) par un champ de vecteurs test $\mathbf{v}$ dans $\mathrm{H}(\mathrm{div}, \Omega)$ et intégrons par parties le terme contenant la pression et nous multiplions enfin la contrainte d'incompressibilité (2) par une fonction test q appartenant à $\mathrm{L}^2(\Omega)$. En notant $(.,.)$ le produit scalaire L^2 et $\langle .,. \rangle$ les diverses dualités sur la frontière, nous en déduisons :

$$\omega \in \mathrm{H}(\mathrm{rot}, \Omega), \qquad \mathbf{u} \in \mathrm{H}(\mathrm{div}, \Omega), \qquad p \in \mathrm{L}^2(\Omega) \tag{6}$$

$$(\omega, \varphi) - (\mathbf{u}, \mathbf{rot}\,\varphi) = \langle \mathbf{n} \times \mathbf{u}, \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathrm{H}(\mathrm{rot}, \Omega) \tag{7}$$

$$\nu(\mathbf{rot}\,\omega, \mathbf{v}) - (p, \mathrm{div}\,\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - \langle p, \mathbf{v}.\mathbf{n} \rangle, \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathrm{H}(\mathrm{div}, \Omega) \tag{8}$$

$$(\mathrm{div}\,\mathbf{u}, q) = 0, \qquad \forall q \in \mathrm{L}^2(\Omega). \tag{9}$$

La réécriture sous forme variationnelle (6)-(9) du problème de Stokes fait naturellement apparaître deux conditions de Dirichlet pour le tourbillon et la composante normale de la vitesse (*voir* aussi Girault [8]) :

$$\omega \times \mathbf{n} = \theta_0 \quad \text{sur } \Gamma_\theta, \qquad \theta_0 \in (\mathrm{TH}_{00}^{1/2}(\Gamma_\theta))', \quad \mathrm{div}_\Gamma\,\theta_0 \in (\mathrm{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_\theta))' \tag{10}$$

$$\mathbf{u}.\mathbf{n} = g_0 \quad \text{sur } \Gamma_m, \qquad g_0 \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma_m) \tag{11}$$

ainsi que deux conditions de Neumann pour la composante tangentielle de la vitesse et la pression

$$\mathbf{n} \times \mathbf{u} = \sigma_0 \quad \text{sur } \Gamma_t, \qquad \sigma_0 \in \mathrm{TH}_{00}^{1/2}(\Gamma_t) \tag{12}$$

$$p = \pi_0 \quad \text{sur } \Gamma_p, \qquad \pi_0 \in \mathrm{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_p) \tag{13}$$

où l'on a effectué **deux** partitions de la frontière Γ du type suivant qui généralisent les hypothèses de Bègue et coll. [2] :

$$\Gamma = \bar{\Gamma}_\theta \cup \bar{\Gamma}_t = \bar{\Gamma}_m \cup \bar{\Gamma}_p, \qquad \text{avec} \quad \Gamma_\theta \cap \Gamma_t = \Gamma_m \cap \Gamma_p = \varnothing. \tag{14}$$

En introduisant les espaces fonctionnels appropriés, à savoir

$$\mathrm{W} = \{ \varphi \in \mathrm{H}(\mathrm{rot}, \Omega), \ \varphi \times \mathbf{n} = 0 \ \text{sur } \Gamma_\theta \} \tag{15}$$

$$\mathrm{X} = \{ \mathbf{v} \in \mathrm{H}(\mathrm{div}, \Omega), \ \mathbf{v}.\mathbf{n} = 0 \ \text{sur } \Gamma_m \} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Y} = \mathrm{L}^2(\Omega) & \text{si } \operatorname{mes}\Gamma_p \neq 0, \\ \mathrm{Y} = \{ q \in \mathrm{L}^2(\Omega), \ (q, 1) = 0 \} & \text{si } \operatorname{mes}\Gamma_p = 0. \end{cases} \tag{17}$$

$$\mathrm{W}_\theta = \{ \varphi \in \mathrm{H}(\mathrm{rot}, \Omega), \ \varphi \times \mathbf{n} = \theta_0 \ \text{sur } \Gamma_\theta \} \tag{18}$$

$$\mathrm{X}_m = \{ \mathbf{v} \in \mathrm{H}(\mathrm{div}, \Omega), \ \mathbf{v}.\mathbf{n} = g_0 \ \text{sur } \Gamma_m \} \tag{19}$$

nous reformulons le problème (6)-(9) de la façon suivante :

$$\omega \in \mathrm{W}_\theta, \qquad \mathbf{u} \in \mathrm{X}_m, \qquad p \in \mathrm{Y}' \tag{20}$$

$$(\omega, \varphi) - (\mathbf{u}, \mathbf{rot}\,\varphi) = \langle \sigma_0, \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathrm{W} \tag{21}$$

(22) $\nu(\mathbf{rot}\,\omega, \mathbf{v})-(p, \operatorname{div}\mathbf{v})=(\mathbf{f}, \mathbf{v})-\langle \pi_0, \mathbf{v}.\mathbf{n}\rangle, \quad \forall \mathbf{v}\in \mathrm{X}$

(23) $(\operatorname{div}\mathbf{u}, q)=0, \quad \forall q\in \mathrm{Y}'.$

3. Étude du problème continu. — Nous avons le

Théorème 1. — *Soient* W, X, Y, Z *des espaces de Hilbert réels tels que* W *et* X *soient inclus dans* Z. *On note* $(.,.)$ [*respectivement* $(.,.)_0$] *le produit scalaire dans l'espace* Z (*respectivement* Y). *Soient* $\mathrm{R}:\mathrm{W}\to\mathrm{X}$ *et* $\mathrm{D}:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ *deux applications linéaires continues telles que*

(i) $\operatorname{Im}\mathrm{R}\subset\ker\mathrm{D}$

(ii) $\exists\gamma>0, \quad \inf_{q\in \mathrm{Y}}\sup_{v\in \mathrm{X}}\dfrac{(\mathrm{D}v, q)_0}{\|v\|_{\mathrm{X}}\|q\|_{\mathrm{Y}}}\geqq\gamma$

(iii) $\exists\beta>0, \quad \inf_{v\in\ker\mathrm{D}}\sup_{\varphi\in \mathrm{W}}\dfrac{(v, \mathrm{R}\varphi)}{\|v\|_{\mathrm{X}}\|\varphi\|_{\mathrm{W}}}\geqq\beta$

(iv) $\exists\delta>0, \quad \forall\varphi\in\ker\mathrm{R}, \quad (\varphi, \varphi)\geqq\delta\|\varphi\|_{\mathrm{W}}^2$

(v) $\exists\alpha>0, \quad \forall\varphi\in \mathrm{W}\cap(\ker\mathrm{R})^{\perp}, \quad (\mathrm{R}\varphi, \mathrm{R}\varphi)\geqq\alpha\|\varphi\|_{\mathrm{W}}^2.$

Alors, étant donné $\Xi\equiv(\lambda, \mu, \nu)$ *appartenant respectivement à* W', X' *et* Y, *le problème*

(24) $(\omega, u, p)\in \mathrm{W}\times\mathrm{X}\times\mathrm{Y}'$

(25) $(\omega, \varphi)+(u, \mathrm{R}\varphi)=\langle\lambda, \varphi\rangle, \quad \forall\varphi\in\mathrm{W}$

(26) $(R\omega, v)+(p, \mathrm{D}v)=\langle\mu, v\rangle, \quad \forall v\in\mathrm{X}$

(27) $(Du, q)=\langle\nu, q\rangle, \quad \forall q\in\mathrm{Y}'$

a une solution unique $(\omega(\Xi), u(\Xi), p(\Xi))$ *qui dépend continûment des données* :

(28) $$\left\{\begin{array}{c}\exists \mathrm{C}>0, \quad \forall\Xi\in\mathrm{W}'\times\mathrm{X}'\times\mathrm{Y}, \\ \|\omega(\Xi)\|_{\mathrm{W}}+\|u(\Xi)\|_{\mathrm{X}}+\|p(\Xi)\|_{\mathrm{Y}'}\leqq \mathrm{C}(\|\lambda\|_{\mathrm{W}'}+\|\mu\|_{\mathrm{X}'}+\|\nu\|_{\mathrm{Y}}).\end{array}\right.$$

Nous en déduisons, après avoir vérifié la délicate condition inf-sup (iii) (particulièrement lorsque l'ouvert Ω n'est pas simplement connexe ou a une frontière non connexe, *voir* Dubois [6]) le

Théorème 2. — *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbf{R}^n$ ($n=2$ *ou* 3) *de frontière* Γ *régulière. On suppose choisies en* (14) *deux partitions de la frontière de sorte que* $\Gamma_m\cap\Gamma_t$ *contienne une partie analytique* Γ_0 *de mesure non nulle. Soient* θ_0, g_0, σ_0 *et* π_0 *quatre traces surfaciques appartenant aux espaces fonctionnels proposés aux relations* (10) *à* (13), W, X, Y, W_θ *et* X_m *les espaces de Sobolev définis en* (15)-(19) *et* **f** *un champ de vecteurs appartenant au dual de l'espace* X. *Alors le problème de Stokes* (20)-(23) *a une solution unique* $(\omega, \mathbf{u}, p)$ *appartenant à* $\mathrm{W}_\theta\times\mathrm{X}_m\times\mathrm{Y}'$ *qui dépend continuement des données* θ_0, g_0, σ_0, π_0 *et* **f**.

Théorème 3. — *Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème* 2, *si de plus* **f** *appartient à* $\mathbf{L}^2(\Omega)$, *si* θ_0 *appartient à l'espace fonctionnel* $\mathrm{TH}^{1/2}(\Gamma_\theta)$ *et si* σ_0 *est tel que* $\operatorname{div}_\Gamma\sigma_0$ *appartient à* $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma_t)$, *alors la solution* $(\omega, \mathbf{u}, p)$ *du problème de Stokes* (20)-(23) *appartient à* $\mathbf{H}^1(\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)\times\mathrm{H}^1(\Omega)$ *et dépend continuement des données.*

4. Approximation par éléments finis. — L'approximation par éléments finis mixtes du problème variationnel (20)-(23) s'effectue très naturellement si on utilise des approximations conformes des espaces W, X et Y'. Nous précisons maintenant le choix d'une interpolation de plus bas degré qui conduit pour un maillage rectangulaire et après condensation de différentes matrices de masse à la méthode MAC-grille C. Le tourbillon tout d'abord est approché par éléments finis P_1 classiques si $n=2$ (il est alors défini par

ses valeurs aux sommets du maillage) et grâce à l'élément fini de Nédélec conforme dans l'espace H (rot, Ω) si $n=3$ (les degrés de liberté sont dans ce cas les circulations élémentaires le long des arêtes du maillage). La vitesse est approchée en utilisant l'élément de Raviart-Thomas-Nédélec, conforme dans H (div, Ω) (elle est définie par son flux sur chaque face du maillage) et la pression peut être supposée constante dans chaque élément fini. Lorsque la frontière $\partial\Omega$ du domaine d'étude est connexe, la conservation de la masse (2) autorise la représentation du champ de vitesses par une fonction courant. Dans le cas de deux dimensions d'espace, on obtient ainsi une reformulation de la méthode MAC-grille C à l'aide de l'opérateur biharmonique (Glowinski [10], Ciarlet-Raviart [3], Girault [7]). Nous pouvons par ailleurs approcher exactement le domaine Ω à l'aide d'un maillage curviligne en utilisant la généralisation des éléments finis vectoriels précédents développée dans Dubois [5]. Nous pensons que sous des hypothèses de régularité du même type que celles démontrées au théorème 3 et pour une famille de maillages dont les angles restent minorés et majorés uniformément, le schéma ainsi obtenu est convergent et conduit à une précision du même ordre que l'erreur d'interpolation.

Note remise le 6 décembre 1991, acceptée le 9 décembre 1991.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. ARAKAWA, *J. of Computational Physics*, 1, 1966, p. 119-143.

[2] C. BÈGUE, C. CONCA, F. MURAT et O. PIRONNEAU, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 304, série I, 1987, p. 23-28.

[3] P. G. CIARLET et P.-A. RAVIART, in *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, Academic Press, 1974, p. 125-145.

[4] R. DAUTRAY et J.-L. LIONS éd., *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, 1984.

[5] F. DUBOIS, *S.I.A.M. J. of Numerical Analysis*, 27, n° 5, 1990, p. 1103-1141.

[6] F. DUBOIS, Rapport interne Aérospatiale, TIST/S n° 266, 1991.

[7] V. GIRAULT, *Numerische Mathematik*, 26, 1976, p. 39-59.

[8] V. GIRAULT, *Mathematics of Computation*, 51, n° 183, 1988, p. 55-74.

[9] V. GIRAULT et P.-A. RAVIART, *Finite Element Methods for Navier Stokes Equations. Theory and Applications*, Springer Verlag, 1986.

[10] R. GLOWINSKI, in *Topics in Numerical Analysis*, Academic Press, 1973, p. 123-171.

[11] F. HARLOW et J. WELCH, *Physics of Fluids*, 8, 1965, p. 2182-2189.

[12] J.-C. NÉDÉLEC, *Numerische Mathematik*, 35, 1980, p. 315-341.

[13] J.-C. NÉDÉLEC, *Numerische Mathematik*, 39, 1982, p. 97-112.

[14] R. A. NICOLAIDES, *A.I.A.A.* Paper n° 89-1978, 1989.

[15] P.-A. RAVIART et J.-M. THOMAS, in *Lecture Notes in Mathematics*, 606, Springer Verlag, 1977, p. 292-315.

[16] R. TEMAM, *Navier Stokes Equations*, North Holland, 1977.

Aérospatiale, Division Systèmes stratégiques et spatiaux, Département Mathématiques appliquées et Calcul scientifique, B.P. n° 96, 78133 *Les Mureaux Cedex*.