Lemmes finis
pour la dynamique des gaz
(1988-1998)

---

février 2011.

LEMMES FINIS

POUR LA DYNAMIQUE DES GAZ

(1988-1998)

François Dubois *

* Conservatoire National des Arts et Métiers et Université Paris Sud.

En mathématiques, un lemme est un résultat préliminaire.
Les lemmes sont maintenant finis.

Avant-propos

Les équations de la dynamique des gaz constituent un domaine de recherche en constante activité tant du point de vue de leur étude mathématique que de celui de leur approximation numérique. En effet, les résultats abstraits récents, décrits par exemple dans le second tome du livre de Pierre-Louis Lions [Li96], ne portent que sur des modèles relativement simples en regard du besoin des ingénieurs. Aussi les méthodes d'approximation les plus efficaces et populaires pour représenter les ondes non linéaires telles que chocs et détentes sont également les plus rustiques. La méthode des volumes finis est de celles-ci. Elle est née d'une numérisation naturelle des lois de conservation fondamentales de la physique des milieux continus et elle permet une capture correcte des discontinuités admissibles sans avoir à les détecter au préalable. Nous n'abordons pas dans ce mémoire les résultats mathématiques généraux sur les volumes finis, pour lesquels nous renvoyons le lecteur au livre d'Edwige Godlewski et Pierre-Arnaud Raviart [GR96] ; nous nous concentrons ici sur les applications à la dynamique des gaz.

Ce document est une compilation bibliographique qui regroupe divers rapports de recherche et cours spécialisés rédigés en Français entre 1988 et 1998. On y trouve une synthèse de connaissances classiques et plusieurs résultats originaux. Les diverses contributions sont auto-consistantes et peuvent donc être lues indépendamment les unes des autres, ceci il est vrai au prix de quelques redites.

Toutefois, l'ordre choisi dans cette présentation permet une progression didactique à partir de connaissances préalables en physique des fluides et en calcul scientifique acquises typiquement à l'issue d'un premier cycle universitaire.

Dans le premier document, nous étudions la résolution exacte et approchée du problème de Riemann pour la dynamique des gaz. Il s'agit d'une question posée à une dimension d'espace qui correspond à une condition initiale formée de deux états constants séparés par une discontinuité. Physiquement, cette description mathématique modélise un dispositif expérimental connu sous le nom de "tube à choc". Numériquement, la résolution efficace du problème de Riemann est à la base des schémas décentrés modernes et constitue en quelque sorte "l'équation du second degré" de l'hyperbolicien. Ce travail a été initié par un cours à l'Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur sur les "Méthodes numériques pour le calcul d'écoulements compressibles ; applications industrielles" [CDV92] organisé par Jean-Paul Vila en septembre 1992.

Au second temps, nous étudions le problème des conditions aux limites pour les équations d'Euler de la dynamique des gaz d'un point de vue mathématique et numérique. Dans le cas d'une dimension d'espace, nous rappelons quelques résultats classiques, fondés sur une analyse du problème linéarisé et nous présentons une formulation non linéaire du problème fondée sur une analyse de la dissipation de l'entropie. Cette approche fortement non linéaire autorise, avec la notion de "problème de Riemann partiel", la prise en compte numérique d'effets non triviaux au bord du domaine d'étude. Ce chapitre a été rédigé sous cette forme [Du88] à l'occasion d'une "école Cea-Edf-Inria" sur les "Méthodes de différences finies et équations hyperboliques" organisée en novembre 1988 par Pierre-Louis Lions.

Dans le cas bi ou tridimensionnel, c'est-à-dire pour des problèmes issus de modèles physiques réalistes, nous adaptons les idées précédentes et présentons [CDV92] une approche pour la discrétisation spatiale multidimensionnelle. Diverses possibilités géométriques peuvent être envisagées et nous présentons plusieurs variantes de la méthode des volumes finis. Nous discutons du choix de la grille, présentons la version du premier ordre du schéma décentré, étudions la prise en compte de diverses conditions aux limites et présentons une extension de la méthode au second ordre de précision en espace.

Dans une quatrième partie, nous abordons l'étude d'une paroi mobile, dans l'hypothèse classique d'un couplage aéroélastique qui suppose des petits mouvements devant la dimension de la première maille ainsi qu'une vitesse de déformation modérée devant celle des ondes sonores. Nous montrons, grâce à la prise en compte de bilans dans l'espace-temps et la notion de problème de Riemann partiel pour le traitement des conditions aux limites, qu'il est possible au premier ordre de remplacer une modélisation géométrique de ce mouvement par un flux limite de paroi mobile sur les facettes qui relient le fluide et la structure et présentons la nécessaire adaptation du schéma numérique. *In fine*, le mouvement peut être décrit en termes algébriques.

Nous présentons dans un cinquième document une approche générale pour exprimer la condition d'entropie dans le cas de l'approximation de systèmes hyperboliques de lois de conservation par un schéma continu en temps et discret en espace avec la méthode des volumes finis dans le cas de plusieurs dimensions d'espace. Nous établissons un lien avec le schéma de Godunov dans le cas de la dynamique des gaz.

Après avoir remarqué que les équations de la dynamique des gaz conservent le moment cinétique, nous proposons dans un sixième temps un nouveau schéma de volumes finis pour leur approximation numérique. C'est une généralisation du schéma de Godunov qui prend en compte un champ de vitesse de type solide rigide dans chaque maille. Le point original du schéma est l'équation d'évolution du tourbillon, qui est donnée par la conservation du moment cinétique. Il s'agit de la version rédigée de quelques remarques présentées en juin 1998 lors d'un groupe de travail animé par Pierre-Arnaud Raviart au Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique.

Nous avons choisi lors des travaux précédents de présenter l'approximation des lois de conservation qui régissent l'évolution d'un fluide compressible grâce à une approche qui découple l'espace et le temps. Pour la septième partie, nous abordons [CDV92] l'équation différentielle temporelle définie une fois fixé le schéma en espace, pour en donner une discrétisation complète en temps. Nous rappelons les principes fondamentaux de la discrétisation d'un système différentiel, détaillons les méthodes de Runge-Kutta explicites et diverses méthodes implicites, étudions l'effet de la discrétisation en temps sur le maintien de la propriété de variation totale décroissante et présentons plusieurs schémas dans le cas où certains termes ont une dynamique très rapide par rapport à d'autres.

Dans le huitième document, nous proposons une approche générale qui permet d'évaluer les termes dissipatifs du second ordre des équations de la mécanique des fluides sur des maillages non structurés généraux dans le cas de deux et trois dimensions d'espace avec la méthode des volumes finis. Les opérateurs de dérivation en espace sont discrétisés en se fondant sur leur caractère à la fois local et linéaire. Le schéma obtenu reste toujours compact et ne fait intervenir que sept points au plus dans le cas bidimensionnel et onze points en tridimensionnel. Cette recherche finalisée en février 1992 [Du92] a été menée dans le cadre de la société “Aerospatiale” aux Mureaux et fut impulsée par Bertrand Mercier.

Dans le contexte industriel du développement d’un logiciel de résolution des équations de Navier-Stokes des gaz visqueux, nous montrons enfin [Du91] que la mise en place d’une phase implicite est facile si le calcul des gradients s’effectue à l’aide de l’approche détaillée au chapitre précédent.

Tous ces travaux de recherche industrielle et institutionnelle ont été menés au cours de la décennie 1988-1998. Ils n’ont donné lieu à aucune publication classique dans un journal à comité de lecture mais ont pu être présentés lors de séminaires et d’ateliers scientifiques. La rédaction présentée ici est celle originale, toujours en langue Française, à la correction de coquilles près lors de la révision dactylographique. La numérotation des paragraphes et des formules algébriques est propre à chaque partie. La bibliographie a toutefois été regroupée à la fin du document.

Ce travail de recherche constitue un corpus cohérent de connaissances préliminaires pour la conception, le développement et la réalisation de logiciels pour la simulation de la dynamique des gaz. Les réalisations informatiques associées ont en parallèle donné lieu à divers échanges internationaux dans les années 1990, entre autres en collaboration avec Olivier Michaux ([DM92], [DM93]) et Guillaume Mehlman ([DM96]).

Lemmes finis pour la dynamique des gaz.

Orsay, septembre 2003, octobre 2006, février 2011.

Remerciements

Les résultats présentés dans ce mémoire sont pour l'essentiel le fruit d'un travail d'équipe mené au cours des années quatre vingt dix à "Aerospatiale Espace & Defense" aux Mureaux, entreprise qui s'est transformée depuis en "Astrium Space Transportation". Il n'aurait pas été possible sans des discussions régulières et parfois quotidiennes avec Florence Arnoux, Rémy Baraille, Pierre Brenner, Patrick Bugnon, Eric Chaput, Jean-Jacques Chattot, François Coron, Eric Duceau, Jean Dupont, Laurent Fusade, Victor Grégo, Hervé Hollanders, Claude Hug, Gérard Laruelle, Vincent Levillain, Guillaume Mehlman, Bertrand Mercier, Olivier Michaux, Gilles Moulès, Michel Pollet, Antonio Rivas, Fabrice Ruffino et Isabelle Terrasse.

Nous tenons donc à remercier chaleureusement les responsables de la société "Astrium Space Transportation" d'avoir autorisé la publication des résultats présentés ici. De plus, l'Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur a permis que les "notes de cours" soient mises à disposition d'un plus grand nombre d'ingénieurs et nous l'en remercions également.

Enfin, l'explicitation et la mise en forme rédigée de méthodes abstraites en vue des applications est également le fruit d'interactions constructives au sein du milieu universitaire, entre autres avec Rémi Abgrall, Yann Brenier, Didier Chargy, Frédéric Coquel, Jean-Pierre Croisille, Jean-Antoine Désidéri, Bruno Després, Philippe Destuynder, Thierry Gallouët, Edwige Godlewski, Laurence Halpern, Bernard Larrouturou, Philippe Le Floch, Alain Lerat, Alain-Yves Le-Roux, Patrick Le-Tallec, Pierre-Louis Lions, Sylvie Mas-Gallic, Jean-Claude Nédélec, Roger Ohayon, Jacques Périaux, Pierre Perrier, Olivier Pironneau, Pierre-Arnaud Raviart, Philip Roe, Denis Serre, Bruno Stoufflet et Jean-Paul Vila. Merci à tous, plus encore à ceux qui ont été oubliés !

Table des matières